UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MAGISTER EN MATEMÁTICAS-ACADÉMICO

Productos Interiores No-Arquimedeanos

Profesor Guía: José Aguayo Garrido
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tesis para ser presentada a la Dirección de Postgrado de la Universidad de Concepción

DANIEL EDUARDO INZUNZA HERRERA
CONCEPCIÓN-CHILE
2011

Productos Interiores No-Arquimedeanos

Daniel Inzunza Herrera

Enero de 2011

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer de forma muy especial a mi profesor guia, José Aguayo, por su infinita paciencia, constante preocupación y estímulo permamente en el desarrollo de esta tesis.

A mis padres y hermanos por su incondicional apoyo en todos los años de mi vida, como también a las muchas personas con quienes comparto a diario, que de una u otra forma hicieron posible el desarrollo de esta tesis.

Introducción

Desde 1945 se ha intentado definir, de manera apropiada, un producto interior no-arquimedeano y con ello un espacio con producto interior no-arquimedeano. Estos espacios muestran una cercana analogía con los espacios de Hilbert clásicos pero, al contrario de estos, no son ortomodulares: es decir, dado X espacio de Banach y $M \subset X$ subespacio, se tiene

$$M^{\perp\perp} = M \iff X = M \oplus M^{\perp} \tag{1}$$

La existencia de un espacio no arquimedeano de dimensión infinita (no clásico) ortomodular fue una pregunta abierta durante cierto tiempo, hasta que A. Keller dio una respuesta positiva en 1980 [10].
Tales espacios deben ser poco comunes, según el siguiente teorema de M.P. Solér [11]: *"Sea X un espacio ortomodular y supongamos que contiene una sucesión ortonormal $e_1, e_2, \ldots$(en el sentido del producto interior). Entonces el campo de base es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y X es un espacio de Hilbert clásico".*

El objetivo de este trabajo es lograr definir un producto interior sobre un espacio de Banach E, y analizar las condiciones necesarias y suficientes para que los subespacios cerrados de E admitan un complemento normal. En particular, se enfocará el estudio al espacio de Banach $c_0(T)$.

Esta tesis está estructurada de la siguiente forma: en el Capítulo 1 se revisan algunas definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo. Así, por ejemplo, se estudian los campos y espacios ultramétricos. Además, de definir los espacios de Banach $c_0(T)$ y $\ell^\infty(T)$ se demuestra que todo espacio que tiene una base es linealmente homeomorfo a algún $c_0(T)$. Por otro lado, con la idea de utilizar conjuntos compactos que también son convexos, se definen los conjunto compactoides, y se muestran algunas propiedades generales sobre éstos.

En el Capítulo 2, se entrega la definición de producto interior no-arquimedeano, y se muestra la relación que existe entre los vectores ortogonales y los productos interios no-arquimedeanos utilizando el concepto de Normalidad. También, dado un espacio de Banach E, se dan condiciones necesarias y suficientes para que éste admita un producto interior no-arquimedeano. Además, se muestra que el espacio $c_0(T)$ admite un producto interior no-arquimedeano, que induce la norma natural de $c_0(T)$ si y sólo si el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Sobre $c_0(\mathbb{N})$, o simplemente c_0, se da un teorema del tipo Gram-Schmidt, y se define la propiedad de Riemann-Lebesgue, la cual se utilizará para caracterizar los subespacios espacios ortomodulares existentes en c_0. A tales subespacios se les denominará normalmente complementado.

En el Capítulo 3, se definen lo operadores Proyección Normal, y se relacionan éstos con la propiedad de Riemann-Lebesgue y los subespacios normalmente complementado. Se construyen operadores Proyección Normal a a partir de una sucesión de elementos de c_0 que tienen la propiedad de Reimann-Lebesgue. Posteriormente se estudian los operadores compactos y auto-adjuntos demostrando una análogo no-arquimedeano de un teorema de descomposición espectral.

En el Capítulo 4 y final, se generalizan los resultados de los capítulos anteriores para el espacio de Banach $E_\omega = c_0\left(\mathbb{N}, \mathbb{K}, |\omega_i|^{1/2}\right)$, obtienendo condiciones necesarias y suficientes para que E_ω admita un producto interior no-arquimedeano que induzca su norma. Por otro lado, se muestra que E_ω no es ortomodular y, al mismo tiempo se caracterizan los subespacios que admiten un complemento normal. Se asocian las proyecciones normales a cada subespacio que admite un complemento normal y, al final del capítulo, se caracterizan las proyecciones normales sobre E_ω.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

En este capítulo presentamos nociones y resultados básicos necesarios para comprender la teoría que en esta tesis se presenta. Definimos los conceptos de espacios y campos ultramétricos, espacios de tipo contable, como también el de espacio de Banach no-arquimedeano y base. En particular, se dedica una sección al estudio del espacio de Banach $c_0(I)$, y se muestra un resultado clave para el desarrollo de este trabajo.

1.1. Espacios Ultramétricos

Definición 1.1. *Sea X un conjunto. Un métrica sobre X es una función $d : X \times X \to [\,0, \infty[$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

para todo $x, y \in X$. El par (X, d) se llamará espacio métrico.

Observación 1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $a \in X$ y $r > 0$. Entonces, el conjunto*

$$B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$$

se llama "bola cerrada de radio r y centro a". Del mismo modo, el conjunto

$$B(a, r^-) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

se llama "bola abierta de radio r y centro a".

Definición 1.2. *Un espacio métrico (X, d) se dice "espacio ultramétrico" si su métrica asociada d satisface además*

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \quad \forall\, x, y \in X\,,$$

llamada "desigualdad triangular fuerte".
En este caso, d se llama "ultramétrica".

Observación 1.2. *A continuación, enumeramos algunas hechos básicos sobre los espacios ultramétricos que lo diferencian del caso clásico. Si bien estos resultados son sencillos de obtener, es necesario conocerlos para todo lo que sigue.*

1. *Cada punto de una bola es el centro de ésta.*

2. *Cada bola es abierta y cerrada a la vez.*

3. *Dos bolas o bien son disjuntas, o bien una está contenida en la otra.*

4. *Sean $x, y, z \in X$. Entonces, para $d(x, y) \neq d(y, z)$, se tiene*

$$d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

El siguiente concepto también es parte de los espacio ultramétricos.

Definición 1.3. *Un espacio ultramétrico (X, d) se dirá esféricamente completo si cada sucesión de bolas $B_1, B_2, \ldots \subset X$ con $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ tiene intersección no vacía.*

Notar que, los espacios ultramétricos compactos son espacios esféricamente completos. Además, todo espacio ultramétrico esfericamente completo es completo, sin embargo el recíproco de este resultado es falso como lo muestra el siguiente contra-ejemplo:
Se define en $\mathbb{N}$ la siguiente métrica

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m = n \\ \max\left(1 + \dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{m}\right) & \text{si} \quad m \neq n \end{cases} .$$

Notar que $\rho(n, m) > 1$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, $(*)$.
Afirmamos que $(\mathbb{N}, \rho)$ es completo. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cauchy en $\mathbb{N}$. Así, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geq N \implies \rho(x_n, x_m) < \epsilon\, .$$

Luego, de ésto y utilizando $(*)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \forall\, n, m \geq N \quad &\implies \quad \rho(x_n, x_m) = 0 \\ &\implies \quad x_n = x_m \\ &\implies \quad x_n = c\, , \quad \text{para algún } c \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Así, para este mismo $N \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$\forall\, n \geq N \implies \rho(x_n, x_m) = 0 < \epsilon\, ,$$

en otras palabras, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cauchy.
Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen los conjuntos,

$$B_n = B\left(n, 1+\frac{1}{n}\right) = \left\{m \in \mathbb{N} : \rho(m,n) < 1+\frac{1}{n}\right\} \subset \mathbb{N}\,,$$

los cuales cumplen la relación: $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ y, claramente, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Esto muestra que $(\mathbb{N}, \rho)$ no es esféricamente completo.

Al igual como ocurre con los espacio vectoriales y la completitud de estos, todo espacio vectorial normado está contenido en un espacio esféricamente completo.

Teorema 1.1 ([3], 4.43). *Cada espacio vectorial normado tiene una completación esférica. Además, dos completaciones esféricas de un espacio vectorial normado son isomorfas.*

1.2. Campos Ultramétricos

Llamaremos "valuación" sobre un campo $\mathbb{K}$ a una función $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ que satisface,

1. $|x| \geq 0$, $x \in \mathbb{K}$.
2. $|x| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{K}}$, $x \in \mathbb{K}$.
3. $|x\,y| = |x|\;|y|$, $x, y \in \mathbb{K}$.
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$, $x, y \in \mathbb{K}$.

Llamaremos "campo valuado" o "campo con valuación" al par $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Observación 1.3.

1. *Una valuación $|\cdot|$ induce una métrica d de la manera siguiente*

$$d(x,y) := |x-y|\ , \quad x, y \in \mathbb{K}\,.$$

La adición, la multiplicación y la inversión son continuas respecto de ésta métrica d. $\mathbb{K}$ se dirá completo si lo es respecto a la métrica d.

2. *La bola cerrada unitaria es el conjunto*

$$B_{\mathbb{K}} := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}\,.$$

Del mismo modo, se define la bola abierta unitaria, como el conjunto

$$B_{\mathbb{K}}^{-} := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}\,.$$

Definición 1.4. *Dos valuaciones se dirán "equivalentes" si inducen la misma topología.*

El foco de estudio de esta tesis son los campos valuados no-arquimedeanos.

Definición 1.5. *Sea* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *una campo con valuación. La valuación* $|\cdot|$ *se dirá "no-arquimedeana", y* $\mathbb{K}$ *se dirá un "campo con valuación no-arquimedeana", si* $|\cdot|$ *satisface además la "desigualdad triangular fuerte", es decir,*

$$|x+y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\}, \quad x, y \in \mathbb{K}.$$

Un importante, y muy utilizado, resultado sobre valuaciones no-arquimedeanas es el siguiente:

Teorema 1.2. *Sea* $|\cdot|$ *una valuación en* $\mathbb{K}$*. Las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

1. *La valuación es no-arquimedeana.*
2. $|n| \leq 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
3. *Si* $a, b \in \mathbb{K}$ *y* $|a| < |b|$*, entonces* $|b-a| = |b|$*.*

Demostración.
1.$\Rightarrow$ 2. Inducción sobre n.

2.$\Rightarrow$ 1. Sea $r = \sup\{|n| : n \in \mathbb{N}\}$, el cual existe pues el conjunto $\{|n| : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Entonces, $|nx| \leq r\,|x|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{K}$. Ahora, sean $a, b \in \mathbb{K}$ y llamemos $s = \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|a+b|^m = |(a+b)^m| \leq \sum_{j=0}^{m} \left| \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} a^j\, b^{m-j} \right| \leq (m+1)\, r\, s^m .$$

Así,

$$|a+b| \leq \left(\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{(m+1)\, r} \right) s = s = \text{máx}\{|a|, |b|\}.$$

1.$\Rightarrow$ 3. Supongamos que $|b| > |a|$ y notemos que

$$|b| = |a+b-a| \leq \text{máx}\{|a|, |b-a|\} = |b-a| \quad (\text{pues } |b| > |a|).$$

Así,

$$|b| \leq |b-a| \leq \text{máx}\{|b|, |-a|\} = |b|\ ,$$

lo cual implica

$$|b-a| = |b| = \text{máx}\{|a|, |b|\}.$$

3.$\Rightarrow$ 1. Si $|a+b| > |a|$, entonces $|b| = |(a+b)-a| = |a+b|$. En particular, $|a+b| \leq |b|$. Del mismo modo, $|a+b| \leq |a|$ y así,

$$|a+b| \leq \text{máx}\{|a|, |b|\}.$$

$\square$

Corolario 1.1. *Sea $\mathbb{K}$ un campo con valuación no-arquimedeana completo y sean $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{K}$.*

1. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, entonces $|x_n| = |x|$ para n suficientemente grande.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en $\mathbb{K}$.*

Demostración.

1. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, mostremos que $|x_n| = |x|$ para cierto n suficientemente grande. En efecto, para $\epsilon = |x| > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \forall\, n\,,\ n \geq N_\epsilon \quad &\Longrightarrow \quad |x_n - x| < |x| \\ &\Longrightarrow \quad |x_n - x + x| = |x| \\ &\Longrightarrow \quad |x_n| = |x| \end{aligned}$$

lo que muestra el resultado.

2. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ n,\ \ n \geq N \ \Longrightarrow |x_n| < \epsilon\,.$$

Sea $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$. Mostraremos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cauchy. En efecto, notar que para $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, obtenemos

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right| \leq \text{máx}\{|x_k| : k = m+1, m+2, \ldots, n\}\,.$$

Así,

$$\forall\, n, m \geq N \ \Longrightarrow |S_n - S_m| \leq \text{máx}\{|x_k| : k = m+1, m+2, \ldots, n\} < \epsilon\,,$$

lo que muestra que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de cauchy. Luego, como $\mathbb{K}$ es completo, se sigue que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún elemento de $\mathbb{K}$, es decir, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge.

□

Observación 1.4. *Denotaremos por $\mathbb{K}^*$ a $\mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\mathbb{K}^*$ es un grupo multiplicativo sobre $\mathbb{K}$. De esto y de las propiedades de $|\cdot|$, se concluye que $|\mathbb{K}^*| = \{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ es un grupo multiplicativo de números reales positivos, llamado "grupo de valores de $\mathbb{K}$". Para éste, tenemos tres posibilidades:*

1. *1 no es un punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$. Entonces, $|\mathbb{K}^*|$ es un subgrupo discreto de $(0, \infty)$, en tal caso la valuación se llama "discreta".*
   Se demuestra que
   $$\rho = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in B_{\mathbb{K}}^-\}$$
   existe y que $|\mathbb{K}^*| = \{\rho^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

2. *Puede ocurrir que $|\mathbb{K}^*| = \{1\}$. Entonces, la valuación es conocida como "valuación trivial" y esta dada por*
   $$|\lambda| := \begin{cases} 0 & si \quad \lambda = 0 \\ 1 & si \quad \lambda \in \mathbb{K}^* \end{cases}$$
   cuya métrica asociada es la trivial, la cual induce la topología discreta.

3. *1 es un punto acumulación de $|\mathbb{K}^*|$. Entonces, $|\mathbb{K}^*|$ es un subgrupo denso de $(0, +\infty)$, en tal caso la valuación se llama "densa".*
   Notar que, la bola unitaria $B_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ no sólo es cerrada para la multiplicación, si no que también es cerrada para la adición, gracias a la desigualdad triangular fuerte. Así, $B_{\mathbb{K}}$ es un anillo conmutativo con identidad. La bola abierta $B_{\mathbb{K}}^-$ es un ideal maximal en $B_{\mathbb{K}}$, pues cada elemento de $B_{\mathbb{K}} \setminus B_{\mathbb{K}}^-$ es invertible. Luego, $B_{\mathbb{K}}/B_{\mathbb{K}}^-$ es un campo, llamado "campo de clases residuales de $\mathbb{K}$", comunmente denotado por $\Bbbk$.

Para $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$, el elemento de $\Bbbk$ determinado por α se denotará por $\overline{\alpha}$.

Ejemplo 1.1. *Cada número primo p determina una valuación no-arquimedeana (valuación p-ádica) $|\cdot|_p$ sobre $\mathbb{Q}$, definida por*

$$|n| := \begin{cases} p^{-r(n)} & si \quad n \neq 0 \\ 0 & si \quad n = 0 \end{cases},$$

donde $r(n)$ es el número positivo más grande tal que $p^{r(n)}$ divide a n.

El siguiente teorema clasifica todas las valuaciones sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema 1.3 ([3] , 1.2). *Sea $|\cdot|$ una valuación no-arquimedeana sobre $\mathbb{Q}$. Entonces, $|\cdot|$ es la valuación trivial o es equivalente a alguna una valuación p-ádica.*

Al igual que en el caso caso clásico $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, donde $|\cdot|$ es el valor absoluto, $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ no es completo. La completación de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ se llama $\mathbb{Q}_p$, "campo de los números p-ádicos".

El siguiente teorema nos muestra como construir campos con valuación no-arquimedena. Daremos un bosquejo de su demostración, y para más detalles ver [3, 1.3]

Teorema 1.4. *Sea F un campo y Σ un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Entonces, existe un campo con valuación no-arquimedeana $\mathbb{K}$ cuyo campo de clases residuales es isomorfo a F y cuyo grupo de valores es $\{e^s : s \in \Sigma\}$.*

Demostración. Se define la colección

$$\mathcal{S} = \{S \subset \Sigma : \text{para cada } s \in \mathbb{R},\ S \cap (-\infty, s) \text{ es un conjunto finito}\}.$$

Esta colección satisface las siguientes propiedades:

1. $\{s\} \in \mathcal{S}$, $\forall\, s \in \Sigma$.
2. Si $S \in \mathcal{S}$ y $S \neq \emptyset$, entonces S tiene un primer elemento.
3. Si $S \in \mathcal{S}$ y $T \subset S$, entonces $T \in \mathcal{S}$.
4. Si $S, T \in \mathcal{S}$, entonces $S \cup T \in \mathcal{S}$.
5. Si $S, T \in \mathcal{S}$, entonces $S + T \in \mathcal{S}$, donde $S + T = \{s + t : s \in S,\ t \in T\}$.
6. Si $S, T \in \mathcal{S}$ y $u \in \Sigma$, entonces existe una cantidad finita de elementos s de S tales que $u - s \in T$.
7. Si $S \subset \Sigma$ y si $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ es una sucesión tal que $\lim a_n = \infty$ mientras que $(-\infty, a_n) \cap S \in \mathcal{S}$ para todo n, entonces $S \in \mathcal{S}$.

Ahora, para una función $f : \Sigma \to F$, se consideramos el conjunto

$$\mathit{supp}(f) = \{s \in \Sigma : f(s) \neq 0\}$$

y se define

$$\mathbb{K} = \{f : \Sigma \to F /\ \mathit{supp}(f) \in \mathcal{S}\},$$

el cual es un espacio vectorial sobre F, con la operaciones de adicción y producto por escalar de funciones. Además, para $f, g \in \mathbb{K}$ se define $f * g : \Sigma \to F$ como

$$(f * g)(u) = \sum_s f(s) g(u - s), \quad u \in \Sigma.$$

Así, $(\mathbb{K}, +, *)$ resulta ser un campo.
Para $f \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$, se denota $r(f) = \min \mathit{supp}(f)$. Así, se define

$$|f| = \begin{cases} e^{-r(f)} & \text{si} \quad f \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f = 0 \end{cases}.$$

Se demuestra que, $|\cdot|$ resulta ser una valuación no-arquimedeana sobre $\mathbb{K}$, cuyo grupo de valores es justamente $\{e^s : s \in \Sigma\}$.
Ahora, se define el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rccl} H & : & \{f \in \mathbb{K} : |f| \leq 1\} & \to & F \\ & & f & \mapsto & H(f) = f(0) \end{array}$$

Notar que el kernel de H es $\{f \in \mathbb{K} : |f| < 1\}$. Entonces, al aplicar el primer teorema de isomorfía se obtiene

$$\{f \in \mathbb{K} : |f| \leq 1\}/\{f \in \mathbb{K} : |f| < 1\} \cong F\,,$$

es decir, el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es isomorfo a F.
Notar también que,

$$|f - g| \leq \epsilon \iff f = g \text{ en } (-\infty, -\log(\epsilon))\,,$$

con esto se muestra que $\mathbb{K}$ es completo. □

Observación 1.5. *Si consideramos "$F = \mathbb{R}$ y $\Sigma = \mathbb{Q}$" en el teorema anterior, entonces el campo $\mathbb{K}$ se conoce como "campo de Levi-Civita" y se denota por $\mathcal{R}$.*

Definición 1.6. *Un campo F se dirá formalmente real si para cada $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset F$, con $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$, se tiene que $a_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Como un ejemplos conocido de la definición anterior es el campo de los números reales $\mathbb{R}$. En cambio el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ no es formalmente real. Notar también que, el campo de clases residuales de $\mathcal{R}$ es formalmente real, pues es isomorfo a $\mathbb{R}$, en cambio, el campo de clases residuales de $\mathbb{Q}_p$ no lo es, pues es un campo finito.

Observación 1.6. *Sean F y Σ como en el Teorema 1.4 y sea $\mathcal{S}$ la colección de todos los subconjuntos bien ordenados de Σ. Entonces, $\mathcal{S}$ satisface todas las propiedades de 1. a 7. mencionadas en el Teorema 1.4 . Se define,*

$$\mathbb{L} = \{S \subset \Sigma : S \text{ es bien ordenado}\}$$

y de la misma forma que en la demostación del Teorema 1.4 , $\mathbb{L}$ tiene una estructura de campo con valuación no-arquimedeana, que resulta ser completo para esta valuación, cuyo grupo de valores es el conjunto $\{e^s : s \in \Sigma\}$ y su campo de clases residuales es isomorfo a F.
El campo $\mathbb{K}$ construido en la demostración del Teorema 1.4 es un subcampo cerrado de $\mathbb{L}$.
Los campos $\mathbb{K}$ y $\mathbb{L}$ coinciden si y sólo si Σ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}$.

La siguiente proposición muestra una importante propiedad de los campos definidos anteriormente.

Proposición 1.1 ([3] , pág. 25).

1. *El campo K dado en el Teorema 1.4 es esféricamente completo si y sólo si Σ es discreto.*

2. *El campo L mencionado en la observación anterior es siempre esféricamente completo, más aún, L es la completación esférica de $\mathbb{K}$.*

1.2.1. Espacios de Banach

A partir de ahora, $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ denotará un campo con valuación no-arquimedeana y completo. Además, se asumirá que la valuación de $\mathbb{K}$ no es la trivial.

Definición 1.7. *Una norma no-arquimedeana en un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ es una función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{K}$ que satisface:*

1. $\|x\| \neq 0$, *si* $x \neq 0$, $x \in E$.
2. $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$, $x, y \in E$.
3. $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\ \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

Observación 1.7.

1. *Si E posee una norma no-arquimedeana, diremos que E es un espacio normado no-arquimedeano.*
2. *E se dirá "espacio de Banach", si éste es completo respecto a la métrica inducida por la norma*
$$d(x, y) = \|x - y\| \ , \quad x, y \in E\,.$$
3. *La bola cerrada unitaria del espacio normado E, es el conjunto*
$$B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}\,.$$
Del mismo modo, la bola unitaria abierta del espacio normado E es el conjunto
$$B_E^- := \{x \in E : \|x\| < 1\}\,.$$
Se define, también
$$\|E\| := \{\|x\| : x \in E\}\,.$$

Notar que, en general $\|E\| \not\subset |\mathbb{K}|$. Para ver esto, basta tomar $s \in [0, \infty[\setminus |\mathbb{K}|$ y definir la norma
$$\|\lambda\| = |\lambda|\, s$$
en $\mathbb{K}$. En este caso $\|\mathbb{K}\| \neq |\mathbb{K}|$.

Observación 1.8. *Dos normas se dirán equivalente si ellas inducen la misma topología.*

Al igual que el caso clásico, si se consideran dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas sobre un mismo espacio vectorial E, éstas serán equivalentes si, y sólo si, existen constantes $c > 0$ y $C > 0$ tales que
$$c\ \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\ \|x\|_1 \ , \quad \forall\, x \in E\,.$$

Sean E y F espacio normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(E,F)$ a la colección de todos los operadores lineales continuos de E en F, y por $\mathcal{L}(E)$ si $F=E$. Es bien conocido que E' denota a $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.
Bajo las operaciones de adicción y producto por escalar de funciones, el espacio $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio normado, con norma

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} .$$

Por otro lado, la fórmula

$$\|T\|_o = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$$

también define una norma en $\mathcal{L}(E,F)$ y, que a diferencia del caso clásico, $\|\cdot\| \neq \|\cdot\|_0$, pero sin embargo son equivalentes. En efecto, se considera $F=\mathbb{Q}_3$ provisto de la valuación 3-ádica como norma, y $E=\mathbb{Q}_3$ con la norma $\|x\| = 2\,|x|$. Luego, para la función identidad $I : E \to E$, se obtiene

$$\|I\| = \frac{1}{2}\ , \quad \text{y} \qquad \|I\|_o = \frac{1}{3}\,.$$

Similarmente al caso clásico, si E y F son espacios normados, con F un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(E,F)$ será también un espacio de Banach. En particular, E' es un espacio de Banach.

1.3. Los espacio $c_0(I)$ y $\ell^\infty(I)$

Para un conjunto I, se define el espacio $\ell^\infty(I)$ como el espacio de todas las funciones acotadas $x : I \to \mathbb{K}$.
El espacio $\ell^\infty(I)$ es un espacio de Banach bajo la norma

$$\|x\|_\infty = \max_{i\in I} |x(i)|\ .$$

Si $I=\mathbb{N}$, entonces se denotará a $\ell^\infty(\mathbb{N})$ por ℓ^∞.

Se define el espacio $c_0(I)$ como el espacio de todas las funciones $x : I \to \mathbb{K}$ tal que para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $\{i \in I : |x(i)| \geq \epsilon\}$ es finito.
El espacio $c_0(I)$ es un espacio de Banach bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Observación 1.9. *Si $I=\mathbb{N}$, entonces es fácil ver que*

$$c_0(\mathbb{N}) = \{x_n \in \mathbb{K} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}\,.$$

Se denotará por c_0 a $c_0(\mathbb{N})$.

1.3.1. Bases

Sea E un espacio normado no-arquimedeano, y sea I un conjunto. Diremos que $(x_i)_{i\in I}$ es "sumable" con "suma" $x \in E$, si $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito $J_0 \subset I$ tal que, para cada subconjunto finito J, con $J_0 \subset J \subset I$, se tiene

$$\left\| x - \sum_{i\in J} x_i \right\| < \epsilon\,.$$

La siguiente proposición muestra algunas propiedades importantes de las familias sumables.

Proposición 1.2 ([5] , 2.5.1). *Sea E un espacio normado y sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de E. Entonces,*

1. *Si $(x_i)_{i\in I}$ es sumable, entonces existe un conjunto numerable $J = \{i_1, i_2, \ldots\} \subset I$ tal que $x_i = 0$ si $i \notin J$, y*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n}\,.$$

2. *$(x_i)_{i\in I}$ es sumable si $\lim\limits_{i\in I} x_i = 0$, es decir, si para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\{i \in I : \|x_i\| \geq \epsilon\}$ es finito. Recíprocamente, si E es un espacio de Banach y $\lim\limits_{i\in I} x_i = 0$, entonces $(x_i)_{i\in I}$ es sumable.*

Sea E un espacio de Banach y sea X un subconjunto de E, con $0 \notin X$. Se considera la función

$$\begin{array}{cccl} S & : & c_0(X) & \rightarrow & E \\ & & f & \mapsto & S(f) = \sum\limits_{x\in X} f(x)\,x \end{array} \tag{1.1}$$

la cual está bien definida, puesto que para $f \in c_0(X)$, el conjunto $\{x \in X : \|f(x)\,x\| \geq \epsilon\}$ es finito cualquier sea $\epsilon > 0$.

Definición 1.8. *Diremos que X es una base de E si la función S es biyectiva, es decir, si para cada $a \in E$, existe una única $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ tal que*

$$a = \sum_{x\in X} f(x)\,x\,.$$

Si X es una base de E, entonces X es un conjunto linealmente independientes y $\overline{[X]} = E$, donde $\overline{[X]}$ denota el clausura del conjunto generado por X. Además, si para cada $x \in X$, existe x' tal que x' es un múltiplo escalar de x, entonces $\{x' : x \in X\}$ es también una base de E.
Sea $\rho \in \mathbb{K}$, $0 < |\rho| < 1$. Notar que

$$\lim_{n\to\infty} |\rho|^n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to-\infty} |\rho|^n = \infty$$

y así,

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]\ |\rho|^{n+1}, |\rho|^n\ ]\,.$$

Luego, para cada $x \in E$, $x \neq 0$, existirá $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$|\rho|^{m+1} \leq \|x\| \leq |\rho|^m$$

o equivalentemente

$$|\rho| \leq \left\|\rho^{-m} x\right\| \leq 1\,.$$

Así, si E tiene una base X, entonces también tendrá una base Y con la propiedad

$$|\rho| \leq \|y\| \leq 1\,, \quad y \in Y$$

Observación 1.10.

1. *Si I es un conjunto cualquiera, y si $x \in I$, x fijo, entonces las funciones*

$$e_x = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \{x\} \\ 0 & , \quad x \in I \backslash \{x\} \end{cases}$$

   forman una base de $c_0(I)$. Además, si I es numerable, entonces, para $i \in I$, se tiene $e_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$

2. *Si X es una base numerable en E, entonces X se dirá base Schauder.*

3. *Si $X = \{e_1, e_2, e_3 \ldots\}$ es una base Schauder de E, y $a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, e_n$ en E, entonces la función $f_a : X \to \mathbb{K}$, dada en Definición 1.8, tendrá la forma*

$$f_a(x) = \begin{cases} \lambda_i & si \quad x = e_i \\ 0 & si \quad x \neq e_i \end{cases}$$

Observación 1.11. *Notemos que, en el caso clásico, el dual de $c_0(I)$ es isometricamente isormofo a $\ell^1(I)$. Sin embargo, en el caso no-arquimedeano $c_0'(I)$ es isometricamente isomorfo a $\ell^\infty(I)$, como veremos a continuación. Notar que, para cada $x = (x_i)_{i\in I} \in c_0(I)$ y cada $y = (y_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$, se tiene*

$$|x_i\, y_i| \leq |x_i|\, \|y\| \to 0\,.$$

Así, la fórmula

$$B(x, y) = \sum_{i\in I} x_i\, y_i$$

define una forma bilineal $B : c_0(I) \times \ell^\infty(I) \to \mathbb{K}$. Además,

$$|B(x, y)| = \left|\sum_{i\in I} x_i\, y_i\right| \leq \max_{i\in I}\, |x_i\, y_i| \leq \|x\|_\infty\, \|y\|_\infty$$

por lo que se sigue que B es continua.
Para cada y fijo en $\ell^\infty(I)$ se define la función $f_y = B(\cdot, y)$. Se afirma que f_y es un elemento de $c_0'(I)$. En efecto, dado $x \in c_0(I)$ se tiene

$$|f_y(x)| = |B(x, y)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

y así,

$$\|f_y\| \leq \|y\|_\infty \ ,$$

lo que muestra la continuidad de f_y.
Por otro lado, aplicando f_y a los vectores unitarios e_i de $c_0(I)$ se tiene que

$$|f_y(e_i)| = |y_i| = |y_i| \ \|e_i\|_\infty \ .$$

Así, para cada $i \in I$, se obtiene

$$\|f_y\| \geq |y_i| \ .$$

Luego,

$$\|f_y\| \geq \|y\|_\infty \ ,$$

de lo que se concluye $\|f_y\| = \|y\|_\infty$, es decir,

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma & : & \ell^\infty(I) & \rightarrow & c_0'(I) \\ & & y & \mapsto & \Gamma(y) = f_y \end{array}$$

es una isometría.

Teorema 1.5. *$c_0'(I) \cong \ell^\infty(I)$.*

Demostración. En base a lo anterior, basta probar que Γ es sobreyectiva. En efecto, sea $g \in c_0'(I)$, luego $z = (g(e_i))_{i \in I} \in \ell^\infty(I)$ pues

$$|g(e_i)| \leq \|g\| \ \|e_i\|_\infty = \|g\| < +\infty \, .$$

Ahora, para un $x = (\lambda_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} \lambda_i \, e_i \in c_0(I)$, la linealidad y la continuidad de f_y muestra que

$$f_z(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \, g(e_i) = g(\sum_{i \in I} \lambda_i \, e_i) = g(x) \, ,$$

es decir, $f_z = g$. Así, $\Gamma(z) = f_z = g$. $\square$

De aquí en adelante, identificaremos $\ell^\infty(I)$ y $c_0'(I)$ usando el teorema anterior.

Con el fin de demostrar el principal resultado de esta sección, se enunciarán los siguientes resultados:

Lema 1.1 ([5] , 2.1.18). *Sean E, F espacios normados, y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Entonces,*

1. *Si T es sobreyectiva y F es completo, entonces $\overline{T(B_E)}$ es abierto.*
2. *Si E es completo y $\overline{T(B_E)}$ es abierto, entonces $\overline{T(B_E)} = T(B_E)$.*

Demostración.

1. Sea $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{K}$, $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$, $\text{lím}_n |\lambda_n| = \infty$. Ahora, del hecho que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n B_E$ y de la sobreyectividad de T se tiene que $F = \cup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n T(B_E) = \cup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \overline{T(B_E)}$. Luego, por la completitud de F y del Lema de las Categorias de Baire, se tiene que existe m tal que $A := \lambda_m \overline{T(B_E)}$ tiene interior no vacío, es decir, así existen $x \in A$ y $r > 0$ tal que $x + B_F(0, r) \subset A$. Notar que gracias a la desigualdad triangular fuerte, el conjunto A es un grupo aditivo. Por lo tanto, para cada $y \in A$, se tiene
$$y + B_F(0, r) \subset y - x + x + B_F(0, r) \subset A + A + A \subset A\,,$$
se sigue de esto que A es abierto y, por lo tanto, también lo será $\lambda_m^{-1} A = \overline{T(B_E)}$.

2. Notemos que como $\overline{T(B_E)}$ es un grupo aditivo, por lo que es suficiente probar que si $B_F(0, r) \subset \overline{T(B_E)}$ para algún $r > 0$, entonces $B_F(0, r) \subset T(B_E)$. En efecto, sea $y \in B_F(0, r)$ y sea $\rho \in \mathbb{K}$, $0 < |\rho| < 1$. Como $y \in \overline{T(B_E)}$, existe $x_0 \in B_E$ tal que
$$\|y - T(x_0)\| < |\rho|\; r\,,$$
por tanto, $\left\|\rho^{-1}(y - T(x_0))\right\| < r$. Desarrollando los mismos pasos, obtenemos que existe $x_1 \in B_E$ tal que $\left\|\rho^{-1}(y - T(x_0)) - T(x_1)\right\| < |\rho|\; r$, es decir $\|y - T(x_0) - T(x_1)\| < |\rho|^2\; r$. Continuando de esta manera, se encontrará inductivamente una sucesión $x_0, x_1, \ldots \in B_E$ tal que, para todo n,
$$\|y - T(x_0 + \rho\, x_1 + \rho\, x_2 + \cdots + \rho^n\, x_n)\| < |\rho|^{n+1}\; r \qquad (*)\,.$$
Ahora, como
$$\lim_{n\to\infty} \rho^n\, x_n = 0\,,$$
se obtiene
$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\, x_n \quad \text{ y } \quad x \in B_E\,.$$
Luego, por $(*)$ y la continuidad de T se obtiene que $T(x) = y$, es decir, $y \in T(B_E)$ y el resultado se sigue.

$\square$

El siguiente teorema es análogo al caso clásico del análisis funcional, cuya demostración sigue del lema previo.

Teorema 1.6 ([5] , 2.1.17). *Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sobreyectiva. Entonces, T es una aplicación abierta.*

El resultado se sigue del siguiente lema.

Corolario 1.2 ([3] , 2.1.19).

Si T es una transformación lineal biyectiva y continua entre espacio de Banach, entonces T es un homeomorfismo.

Como consecuencia de este corolarios se tiene un segundo resultado.

Corolario 1.3. *Si B es una base de E, entonces existe $t > 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{b \in B} f(b)\, b \right\| \geq t \max_{b \in B} \| f(b)\, b \|$$

para todo $f \in c_0(B)$

Demostración. Sea B una base de E. Luego, existe un único $f \in c_0(B)$ tal que para cada $x \in E$, se tiene

$$x = \sum_{b \in B} f(b)\, b$$

así,

$$\lim_{b \in B} f(b)\, b = 0$$

por lo que $\|x\|_B = \max_{b \in B} \|f(b)\, b\|$ existe. Además,

$$\|x\| = \left\| \sum_{b \in B} f(b)\, b \right\| \leq \max_{b \in B} \|f(b)\, b\| = \|x\|_B \ .$$

Ahora, como $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, se sigue que $(E, \|\cdot\|_B)$ es también un espacio de Banach gracias a que

$$\|f(b)\, b\| \leq \max_{b \in B} \|f(b)\, b\| \ .$$

Así, aplicando el Corolario 1.2, obtenemos que existe $C \geq 1$ tal que $\|\cdot\|_B \leq C\, \|\cdot\|$. Así,

$$\left\| \sum_{b \in B} f(b)\, b \right\| \geq C^{-1}\ \|x\|_B = C^{-1}\ \max_{b \in B} \|f(b)\, b\|$$

lo cual muestra lo pedido. $\square$

A continuación se enuncia el principal resultado de esta sección:

Teorema 1.7. *Un espacio de Banach E posee una base si y sólo si es linealamente homeomorfo a $c_0(B)$, para algún $B \subset E$.*

Demostración.

$\Leftarrow\rfloor$ El homeomorfismo estará dado por la función S, introducida en la Definición *1.8.*

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que E posee una base B, y probemos que E es linealmente homeomorfo a $c_0(B)$. En efecto, sin perdida de generalidad podemos asumir que para un $\rho \in \mathbb{K}$ con $0 < |\rho| < 1$, se tiene que $|\rho| \leq \|b\| \leq 1$ para todo $b \in B$. Ahora, dado $f \in c_0(B)$ y $\epsilon > 0$, tenemos que el conjunto $\{b \in B : \|f(b)\, b\| \geq \epsilon\}$ es finito. De aquí

$$\lim_{b\in B} f(b)\, b = 0$$

y así,

$$\sum_{b\in B} f(b)\, b$$

existe en E, pues es sumable. Luego, la fórmula

$$(f(b))_{b\in B} \mapsto \sum_{b\in B} f(b)\, b$$

define una transformación lineal $T : c_0(B) \to E$, en la cual $T(c_0(B))$ es denso en E. Luego,

$$\|T(f)\| = \left\|\sum_{b\in B} f(b)\, b\right\| \leq \max_{b\in B} \|f(b)\, b\| = \max_{b\in B} |f(b)|\ \|b\| \leq \max_{b\in B} |f(b)| = \|f\|_\infty .$$

Por otro lado, por el corolario anterior, existe $t > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{b\in B} f(b)\, b\right\| \geq t \max_{b\in B} \|f(b)\, b\| .$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \|T(f)\| = \left\|\sum_{b\in B} f(b)\, b\right\| \quad & \geq \quad t \max_{b\in B} \|f(b)\, b\| = t\ \max |f(b)|\ \|b\| \\ & \geq \quad t\ |\rho| \max_{b\in B} |f(b)| = t\ |\rho|\ \|f\|_\infty \end{aligned}$$

De lo que se sigue que T es un homeomorfismo. Así, $T(c_0(B))$ es completo, y por tanto cerrado en E. Luego, $T(c_0(B)) = \overline{T(c_0(B))} = E$, lo que muestra la sobreyectividad, y el resultado se sigue.

$\square$

1.4. Ortogonalidad

El siguiente concepto de ortogonalidad es una adaptación del caso clásico en los espacios normados.

Definición 1.9. *Sea X un espacio normado y sean $x, y \in X$. Diremos que x es "ortogonal" a y, notación $x \perp y$, si*

$$\|x\| \leq \|x + ay\| \quad \forall a \in \mathbb{K}\,.$$

Teorema 1.8. *Sean $x, y \in X$ y $t \in]\,0, 1]$ tal que $\|x + y\| \geq t\,\|x\|$. Entonces,*

$$\|x + y\| \geq t\,\|y\|$$

Demostración. Si $\|x\| \geq \|y\|$, entonces $\|x + y\| \geq t\,\|x\| \geq t\,\|y\|$. Si $\|x\| < \|y\|$, entonces $\|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} = \|y\| \geq t\,\|y\|$. □

El siguiente teorema caracteriza los vectores que son ortogonales.

Teorema 1.9. *Sean $x, y \in X$. Entonces, $x \perp y$ si y sólo si,*

$$\forall a, b \in \mathbb{K}\,, \quad \|ax + by\| = \max\{\|ax\|, \|by\|\}\,.$$

Demostración.

$\Leftarrow\rfloor$ Considerando $a = 1 \in \mathbb{K}$, obtenemos

$$\|x + by\| = \max\{\|x\|, \|by\|\} \geq \|x\| \quad \forall\, b \in \mathbb{K}$$

$\Rightarrow\rfloor$ Por la desigualdad triangular fuerte, tenemos que $\|ax + by\| \leq \max\{\|ax\|, \|by\|\}$. Ahora, supongamos que x es ortogonal a y. Entonces, $\|ax + by\| = |a|\,\left\|x + a^{-1}by\right\| \geq |a|\,\|x\| = \|ax\|$ y por el teorema anterior $\|ax + by\| \geq \|by\|$. Así, $\max\{\|ax\|, \|by\|\} \leq \|ax + by\|$ y el resultado se sigue.

□

Definición 1.10.

1. *Sean $E_1, E_2 \subset X$. Diremos que E_1 es ortogonal a E_2, notación $E_1 \perp E_2$, si $x \perp y$ para todo $x \in E_1$, $y \in E_2$. Si $x \in X$, denotaremos $x \perp E_1$ en vez de $\{x\} \perp E_1$.*

2. *Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de elementos de X. Diremos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto ortogonal si, para cada $i \in \mathbb{N}$,*

$$x_i \perp [\{\, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \,\}]$$

donde $[\ ]$ indica el espacio generado por $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Un conjunto ortogonal $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se dirá ortonormal si $\|x_i\| = 1$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

3. *Un conjunto arbitrario es "ortogonal" si todo subconjunto finito de éste lo es.*

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 1.9.

Proposición 1.3. *Sea* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *un conjunto finito de elementos de* X*. Entonces,* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *es ortogonal si, y sólo si, para cada* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{K}$*, tenemos que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \text{máx}\{\|a_i x_i\| \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ es un conjunto ortogonal. Mostraremos que para cada $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{K}$, se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \text{máx}\{\|a_i x_i\| \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

En efecto, como $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es ortogonal, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tendrá que

$$a_i x_i \perp [\, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \,]$$

y por definición de ortogonalidad, obtenemos

$$\left\| a_i x_i + \sum_{j \neq i} a_j x_j \right\| \geq \|a_i x_i\| \ .$$

Luego,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \geq \text{máx}\{\|a_i x_i\| \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Por otro lado, como el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es arbitrario, podemos aplicar la desigualdad triangular fuerte para obtener

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \text{máx}\{\|a_i x_i\| \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}\,,$$

lo que muestra la igualdad.

$\Leftarrow\rfloor$ Recíprocamente, supongamos que para cada $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{K}$, se cumple que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \text{máx}\{\|a_i x_i\| \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Mostremos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto ortogonal. En efecto, dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ y $i \in \{1, \ldots, n\}$, se toma

$$u = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j \in [\{ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \}] .$$

Así, dado $a \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\|x_i + au\| = \left\| x_i + \sum_{j \neq i} a\, \lambda_j x_j \right\| = \max\{\|x_i\|, \|a\lambda_1 x_1\|, \ldots, \|a\lambda_n x_n\|\} \geq \|x_i\| ,$$

como $i \in \{1, \ldots, n\}$ es arbitrario, se tiene que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es ortogonal.

□

Definición 1.11. *Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos no nulos de E. Diremos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortogonal (ortonormal) de X si*

1. *$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es ortogonal.*
2. *para cada $x \in E$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{K}$ tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, x_n$$

Algunas propiedades de las bases ortonormales son las siguientes.

Proposición 1.4. *Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de X y sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, x_n \in E$, para ciertos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{K}$. Entonces,*

1. *$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.*
2. *$\|x\| = \max\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$.*
3. *Si además $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, x_n$ con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha_n = \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

1. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, x_n$ es una serie convergente, se sigue que

$$0 = \lim_{n \to \infty} \|\lambda_n\, x_n\| = \lim_{n \to \infty} |\lambda_n|\, \|x_n\| = \lim_{n \to \infty} |\lambda_n|$$

2. Sea $x_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \, x_n$ y notemos que, como $\{x_n\}$ es un conjunto ortonormal, obtenemos

$$\begin{aligned} \|y_m\| &= \text{máx}\{\|\lambda_n \, x_n\| : n = 1, \ldots, m\} \\ &= \text{máx}\{|\lambda_n| \; \|x_n\| : n = 1, \ldots, m\} \\ &= \text{máx}\{|\lambda_n| \; : \; n = 1, \ldots, m\} \\ &\leq \text{máx}\{|\lambda_n| \; : \; n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

   Así,
$$\|x\| = \lim_{m \to \infty} \|y_m\| \leq \text{máx}\{|\lambda_n| \; : \; n \in \mathbb{N}\} \, .$$
   Por otro lado, sea $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_{i_0}| = \text{máx}\{|\lambda_n| \; : \; n \in \mathbb{N}\}$ y tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $i_0 < k$. Luego, para $y_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \, x_n$ se tiene

$$|\lambda_{i_0}| \leq \|y_k\|$$

   y así,
$$|\lambda_{i_0}| \leq \lim_{k \to \infty} \|y_k\| = \|y\|$$
   lo que muestra el resultado.

3. Notemos que $0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \alpha_n) \, x_n$ y aplicando 2. obtenemos que

$$|\lambda_n - \alpha_n| \leq \text{máx}\{|\lambda_i - \alpha_i| \; : \; i \in \mathbb{N}\} = 0 \, , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   y el resultado se sigue.

□

Definición 1.12. *Sea E un espacio normado y sea E_1 un subespacio cerrado de E. Diremos que E_1 es "complementado" si existe un subespacio E_2 de E tal que*

1. $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

2. $E = E_1 + E_2$.

El subespacio E_2 se dirá complemento de E_1.
Si, además, $E_1 \perp E_2$, entonces E_2 se dirá ortocomplemento de E_1.

1.5. Espacios de Tipo contable

Un importante concepto, en los espacios normados no-arquimedeanos es el siguiente.

Definición 1.13. *Un espacio normado E se dirá de tipo contable, si éste tiene un subconjunto numerable D tal que $\overline{[D]} = E$.*

Los espacios no-arquimedeanos también cuentan con el teorema de Hahn-Banach, como lo muestra el siguiente resultado probado en [5, pág. 171].

Teorema 1.10. *Sea E un espacio vectorial definido sobre un campo esféricamente completo $\mathbb{K}$, y sea p una seminorma sobre E. Entonces, para cada subespacio D de E y cada $f \in D^*$ con $|f| \leq p$ sobre D, existe una extensión $\overline{f} \in E^*$ de f tal que $\left|\overline{f}\right| \leq p$ sobre E.*

Como consecuencias inmediatas del Teorema 1.10, se tienen los siguientes resultados (Ver [5, pág. 171]).

Corolario 1.4. *Sea E un espacio normado definido sobre un campo esfericamente completo $\mathbb{K}$, y sea D un subespacio de E. Entonces, cada $f \in D'$ se puede extender a un $\overline{f} \in E'$ tal que $\left\|\overline{f}\right\| = \|f\|$.*

Corolario 1.5. *Sea E un espacio localmente convexo definido sobre un campo esféricamente completo $\mathbb{K}$, y sea D un subespacio de E. Entonces, cada $f \in D'$ se puede extender a un $\overline{f} \in E'$*

Aún sin ser $\mathbb{K}$ un campo esféricamente completo, se pueden extender funcionales lineales, como lo muestra el siguiente teorema (Ver [5, pág. 176]).

Teorema 1.11. *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita y de tipo contable, y sean D un subespacio de E, $f \in D'$ y $\epsilon > 0$ dados. Entonces, f se puede extender a una función $\overline{f} \in E'$ tal que*

$$\left\|\overline{f}\right\| \leq (1+\epsilon)\,\|f\|$$

1.6. Conjuntos Compactoides

Definición 1.14. *Sea E un espacio vectorial normado. Diremos que un subconjunto D de E es "absolutamente convexo" si $\lambda\, x + \mu\, y \in D$ para todo $x, y \in X$ y $\lambda, \mu \in B_{\mathbb{K}}$.*

Para cada $Y \subset E$, se define la cápsula convexa cerrada de Y, denotada por $\overline{co}(Y)$, como la intersección de todos los subconjuntos cerrados y absolutamente convexos de E que contienen a Y.

Observación 1.12.

1. *$\overline{co}(Y)$ es el conjunto cerrado y absolutamente convexo más pequeño de E, que contiene a Y.*

2. *Si* $a_1, \ldots, a_n \in E$, *entonces*

$$\overline{co}\{a_1, \ldots, a_n\} = \{\lambda_1 \, a_1 + \cdots + \lambda_n \, a_n : \lambda_i \in B_{\mathbb{K}}\}$$

3. *Si* $a_1, a_2, \ldots$ *es una sucesión en* E *y si existe* $t \in (0, 1]$ *tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \, a_i \right\| \geq t \, \max_{i \in \mathbb{N}} \|\lambda_i \, a_i\|$$

entonces

$$\overline{co}\{a_1, a_2, \ldots\} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \, a_i : \lambda_i \in B_{\mathbb{K}}, \, \lim_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \, a_i = 0 \right\}$$

Los conjuntos acotados se definen de igual forma que en el caso clásico.

Definición 1.15. *Un subconjunto* X *de un espacio localmente convexo* E *se dirá acotado si cada vecindad de cero es absorbente, es decir, si para cada vecindad de cero* U, *existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tal que* $X \subset \lambda U$.

Un problema que surge al definir conjuntos convexos-compactos en un espacio localmente convexo definido sobre $\mathbb{K}$, es que, en general, $\mathbb{K}$ no es localmente compacto; es decir, los conjuntos convexos-compactos resultan ser los triviales. Con el fin de "convexificar" los conjuntos compactos, nace el siguiente concepto, el cual es propio de los espacios no-arquimedeanos.

Definición 1.16. *Un subconjunto* X *de un espacio vectorial normado* E *se dirá compactoide, si para cada* $\epsilon > 0$ *existe un conjunto finito* $F \subset E$ *tal que*

$$X \subset B_\epsilon(0) + \overline{co}(F)$$

donde $B_\epsilon(0) = \{x \in E : \|x\| \leq \epsilon\}$.

A continuación se anuncian algunas propiedades de los conjuntos compactoides:

1. La clausura y la cápsula cerrada absolutamente convexa de compactoides es compactoide.

2. Cada subconjunto de un conjunto compactoide es compactoide.

3. Si X e Y son compactoides, también lo son $X \cup Y$ y $X + Y$.

4. Dados E y F espacios vectoriales normados. Si $X \subset E$ es compactoide y $T \in L(E, F)$, entonces $T(X)$ es compactoide en F.

5. Todo compactoide es acotado.

6. Si E es finito dimensional, entonces los conjuntos compactoides de E son los conjuntos acotados.

7. Si $X \subset E$ es compactoide, entonces $[X]$ es de tipo contable.

8. Si $a_1, a_2, \ldots \in E$ y si $\lim_n a_n = 0$, entonces $\overline{co}\{a_1, a_2, \ldots\}$ es compactoide.

El siguiente teorema caracteriza los conjuntos compactoides (Ver [3, pág. 141]).

Teorema 1.12 ([3] , 4.38). *Sea X un subconjunto acotado y absolutamente convexo de un espacio de Banach E y sea $0 < t < 1$.*

1. *Supongamos que cada subespacio uno-dimensional de E es ortocomplementado. Entonces, las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

   a) *X es compactoide.*

   b) *Existe una sucesión ortogonal $a_1, a_2, \ldots \in X$ tal que $\lim_n a_n = 0$ y $X \subset \overline{co}\{a_1, a_2, \ldots\}$.*

   c) *Cada sucesión ortogonal en X tiende a cero.*

2. *Si la valuación de $\mathbb{K}$ es discreta, entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes*

   a) *X es compactoide.*

   b) *Existe una sucesión ortogonal $a_1, a_2, \ldots \in E$ tal que $\lim_n a_n = 0$ y $\overline{X} = \overline{co}\{a_1, a_2, \ldots\}$.*

Capítulo 2

Producto Interior No-Arquimedeano

Este capítulo se desarrollará el artículo [7] de L. Narici y E. Beckenstein, y parte del artículo [1] de J. Aguayo y M. Nova. En éste estudiaremos los espacios de tipo Hilbert, y daremos condiciones necesarias para que un espacio de Banach no-arquimedeano admita un producto interior. En particular, para $c_0(I)$ mostraremos una condición necesaria y suficiente para que éste espacio admita un producto interno, y además la norma inducida por éste coincida con su norma natural.
Finalmente, se mostrarán condiciones para que un subespacio cerrado admita, lo que vamos a llamar, un "complemento normal".

Definición 2.1. *Sea $\mathbb{K}$ un campo con valuación no-arquimedeana y sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se define el "Producto Interior no-arquimedeano" como una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ que satisface las siguientes propiedades:*

i) $\langle x, x \rangle \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K} - \{0\}$.

ii) $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \ \forall x, y, z \in E$.

iii) $|\langle x, y \rangle|^2 \leq |\langle x, x \rangle| \, |\langle y, y \rangle| \quad \forall x, y \in E$. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)*

Si $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \forall x, y \in E$, entonces éste se llamará "Producto Interior Simétrico".

Observación 2.1. *El par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se conocerá como "Espacio con Producto Interior no-Arquimedeano".*

Teorema 2.1. *Un producto interior no arquimedeano induce la siguiente norma no-arquimedeana*

$$\|x\| = |\langle x, x \rangle|^{1/2}$$

Demostración. Dado $a \in \mathbb{K}$, con $a \neq 0$, y $x \in E$, con $x \neq 0$, se tiene

$$\|ax\|^2 = |\langle ax, ax\rangle| = |a|\,\langle x, ax\rangle \leq |a|\,\|x\|\,\|ax\|$$

y así,

$$\|ax\| \leq |a|\,\|x\|$$

Utilizando lo anterior, obtenemos

$$\|x\| = \left\|\left(\frac{1}{a}\right) ax\right\| \leq \left|\frac{1}{a}\right| \|ax\|$$

es decir,

$$|a|\,\|x\| \leq \|ax\|$$

En conclusión,

$$\|ax\| = |a|\,\|x\|$$

Para la desigualdad triangular fuerte, supongamos que $\|x+y\| \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= |\langle x+y, x+y\rangle| = |\langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle| \\ &\leq \text{máx}\{|\langle x, x+y\rangle|, |\langle y, x+y\rangle|\} \end{aligned}$$

Además, como $|\langle x, x+y\rangle| \leq \|x\|\,\|x+y\|$ y $|\langle y, x+y\rangle| \leq \|y\|\,\|x+y\|$, se obtiene que

$$\|x+y\|^2 \leq \|x+y\|\,\text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

Luego,

$$\|x+y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

$\square$

En lo que sigue, cuando se haga referencia al espacio normado E, se hará respecto de la norma proveniente del producto interior no arquimedeano $\|x\| = |\langle x, x\rangle|^{1/2}$.

Notemos que $\|E\| \subset |\mathbb{K}|^{1/2} = \{|a|^{1/2} : a \in \mathbb{K}\}$.

Ejemplo 2.1. *Consideremos el espacio $E = \mathbb{K}^2$. Para $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{K}^2$, se define*

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} x_1\, y_1 & , \quad |y_1| \geq |y_2| \\ \\ x_2\, y_2 & , \quad |y_1| < |y_2| \end{cases}$$

Esta función es un producto interior que induce la norma del máximo en $\mathbb{K}^2$.

En efecto, notemos que $\langle x, x\rangle = x_1^2$ o $\langle x, x\rangle = x_2^2$ dependiento si $|x_1| \geq| x_2|$ o $|x_1| < |x_2|$ respectivamente. Entonces,

$$\|x\|^2 = |\langle x, x\rangle| = \text{máx}\{|x_1|^2, |x_2|^2\} \Rightarrow \|x\| = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\} = \|x\|_\infty$$

Así, para $x \neq 0$ se tiene $\langle x, x\rangle \neq 0$. Por otro lado, para $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{K}^2$ y $a, b \in \mathbb{K}$ tenemos

$$\langle ax + by, z\rangle = \begin{cases} (ax_1 + by_1)\, z_1 & , \quad |z_1| \geq |z_2| \\ \\ (ax_2 + by_2)\, z_2 & , \quad |z_1| < |z_2| \end{cases} = a\,\langle x, z\rangle + b\,\langle y, z\rangle$$

Finalmente, para la desigualdad de Cauchy-Schwarz, supongamos que $|y_1| \geq |y_2|$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle|^2 &= |x_1\, y_1|^2 = |x_1|^2\, |y_1|^2 \leq \text{máx}\{\, |x_1|^2\,, |x_2|^2\,\}\, |y_1|^2 \\ &\leq \|x\|_\infty^2\, \text{máx}\{\, |y_1|^2\,, |y_2|^2\,\} = \|x\|_\infty^2\, \|y\|_\infty^2 \end{aligned}$$

El caso $|y_1| < |y_2|$ se desarrolla de manera similar.

Para el caso particular $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_2$ y para $x = (2, 4) \in \mathbb{Q}_2^2$, obtenemos que $\langle x, x\rangle = 2 \cdot 2$, pues $|2|_2 \geq |4|_2$. Así,

$$|\langle x, x\rangle|_2 = \frac{1}{4}$$

de lo que se sigue que

$$\|x\| = |\langle x, x\rangle|_2^{1/2} = \frac{1}{2}$$

Definamos $\beta = \dfrac{1}{2}$, y notemos que $\beta \in \mathbb{Q}_2$. Así, considerando $u = \beta^{-1}x = (4, 8)$, obtenemos que

$$\|u\| = \text{máx}\{|4|_2\,, |8|_2\} = \frac{1}{4} \neq 1$$

por lo que se concluye que no siempre es posible crear vectores unitarios.

2.1. Normalidad

Definición 2.2. *Sea E un espacio con producto interior no arquimedeano y sean $x, y \in E$.*

1. *Diremos que x es normal a y, si $\langle y, x\rangle = 0$.*

2. *Dado $B \subset E$. Se define el complemento normal de B como el conjunto,*

$$B^{\dashv} = \{\, y \in E \,:\, \langle x, y\rangle = 0 \;\; \forall\, x \in B\,\}$$

3. *Dado $A \subset E$. Se define el complemento transversal de B como el conjunto,*

$$A^{\vdash} = \{\, y \in E \,:\, \langle y, x\rangle = 0 \;\; \forall\, x \in A\,\}$$

4. *Dados $A, B \in E$. Diremos que A es normal a B, y lo denotaremos por $A \dashv B$, si*

$$\langle y, x\rangle = 0\;, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Observación 2.2. *Si* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es simétrico, entonces* $B^{\dashv}$ *se dirá "perpendicular" y lo denotaremos, simplemente, por* B^p

Proposición 2.1. *Si* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es simétrico, entonces* B^p *es un subespacio cerrado.*

Demostración. Para $x \in B$, x fijo, se define la función $f_x : E \to \mathbb{K}$, $y \mapsto f_x(y) = \langle x, y \rangle$. La cual resulta ser continua, pues

$$|f_x(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Así, como $Ker(f_x) = B^p$ se concluye que B^p es cerrado. □

La relación entre normalidad y ortogonalidad se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Sea* E *es un espacio con producto interior no-Arquimedeano. Si* x *es normal a* y*, entonces* x *es ortogonal a* y*.*

Demostración. Supongamos que $x \neq 0$. Como $\langle y, x \rangle = 0$, entonces para todo $b \in \mathbb{K}$

$$\|x\|^2 = |\langle x, x \rangle| = |\langle x, x \rangle + \langle by, x \rangle| = |\langle x + by, x \rangle| \leq \|x + by\| \, \|x\|$$

De lo anterior, se sigue que

$$\|x\| \leq \|x + by\| \quad \forall, b \in \mathbb{K}$$

□

El recíproco no necesariamente se cumple, como lo muestra que siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. *Consideremos el el producto interior del Ejemplo 2.1 , con* $x = (1, 1)$ *e* $y = (1, 0)$*. Entonces,*

$$\|x + ay\| = \max\{|1 + a|, 1\} \geq 1 = \|x\| \quad \forall\, a \in \mathbb{K}$$

de lo que se concluye que x *es ortogonal a* y*, pero en cambio, como* $1 \geq 1$ *se sigue que*

$$\langle y, x \rangle = 1 \cdot 1 \neq 0$$

por lo que ortogonalidad no implica normalidad.

Observación 2.3. *Si* $\{x_1, x_2, \ldots\}$ *es un conjunto ortonormal, entonces* $\{x_1, x_2, \ldots\}$ *es linealmente independiente (Proposición 1.4).*

Teorema 2.3. *Sean* M, N *subespacios de* E*, con* M *normal a* N *y sean* (x_n) *e* (y_n) *sucesiones en* M *y* N *respectivamente. Entonces* (z_n)*, con* $z_n = x_n + y_n$*, es una sucesión de Cauchy en* $M + N$ *si y sólo si* (x_n) *e* (y_n) *son sucesiones de Cauchy en* M *y* N *respectivamente.*

Demostración. Notemos que si $x, y \in M$ y $v, w \in N$, entonces por los Teoremas 1.9 y 2.2, se tiene que

$$\|(x-y)+(v-w)\| = \text{máx}\{\|x-y\|\,;\|v-w\|\}$$

Así, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ obtenemos

$$\|z_m - z_n\| = \|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\| = \text{máx}\{\,\|x_m - x_n\|\,, \|y_m - y_n\|\,\}$$

de lo cual se sigue que la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $M+N$ si y sólo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo son en M y N respectivamente. □

Corolario 2.1. *Si M y N son subespacios cerrados de E, con M normal a N, entonces $M+N$ es un subespacio cerrado.*

Demostración. Como M y N son subespacios cerrados de E, y E es un espacio de Banach, se sigue que M y N son espacios de Banach. Luego, el resultado se obtiene aplicando el teorema anterior. □

2.2. Productos Interiores Compatibles

Proposición 2.2. *Sea E un espacio normando no-arquimedeano sobre un cuerpo esféricamente completo $\mathbb{K}$ tal que $\|E\| \subset |\mathbb{K}|$. Entonces, existe un producto interior no-arquimedeano sobre E que induce la norma original.*

Demostración. Sea $x \in E$, $x \neq 0$. Como $\|E\| \subset |\mathbb{K}|$ podemos escoger $a \in \mathbb{K}$ tal que $|a| = \|x\|$. Luego, para todo $b \in \mathbb{K}$ se define

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [\,x] & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & bx & \mapsto & f(bx) = ba^2 \end{array}$$

donde $[\,x]$ es el subespacio generado por x. Entonces,

$$\|f\| = \sup_{bx\neq 0} \frac{|f(bx)|}{\|bx\|} = \sup_{bx\neq 0} \frac{\left|ba^2\right|}{|b|\;\|x\|} = \sup_{bx\neq 0} \frac{|b|\;|a|^2}{|b|\;\|x\|} = \|x\|$$

Así, como $\mathbb{K}$ es esfericamente completo, podemos aplicar el teorema de Hahn-Banach para extender f a un funcional lineal $f_x \in E'$, tal que $\|f_x\| = \|x\|$.
Denotemos por $\mathcal{P}(E')$ a la colección de todos los subconjuntos de E' y definamos la función

$$\begin{array}{rcccl} D & : & E & \longrightarrow & \mathcal{P}(E') \\ & & x & \longmapsto & Dx = \{\, f \in E' \;:\; f(x) = a^2 \text{ donde } |a| = \|x\|\,\}\,. \end{array}$$

Ahora, para cada $x \in E$, escogemos $f_x \in Dx$ y denotemos por

$$S = \{f_x \in Dx : x \in E\}\,.$$

Con lo anterior se define $\langle\cdot,\cdot\rangle_S : E \times E \to \mathbb{K}$ por

$$\langle x, y\rangle_S = f_y(x)\,.$$

Esta función satisface $i)$ y $ii)$ de la definición 2.1, además como

$$|\langle x, y\rangle|_S = |f_y(x)| \leq \|f_y\| \, \|x\| = \|y\| \, \|x\|$$

con lo que se demuestra que $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ es un producto interior en E que induce su norma. $\square$

Observación 2.4. *El producto interior definido en la proposición anterior se conoce como "Producto Interior de Hanh Banach". Este, en general, no es único, en efecto, consideremos $E = \mathbb{K} = \mathbb{Q}_7$ y tomemos $x = 1$,$a_1 = 1$ y $a_2 = 5$. Así, $|1|_7 = |6|_7 = 1$. Luego, se definie los funcionales lineales*

$$\begin{array}{rccl} f & : & [1] & \rightarrow & \mathbb{Q}_7 \\ & & \alpha\,1 & \mapsto & f(\alpha\,1) = \alpha\,1^2 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccl} g & : & [6] & \rightarrow & \mathbb{Q}_7 \\ & & \beta\,5 & \mapsto & f(\beta\,1) = \beta\,6^2 \end{array}$$

Además,

$$\|f\| = 1 \quad y \quad \|g\| = 1$$

Por lo que, aplicando el teorema de Hahn-Banach, podemos extender los funcionales f y g a los funcionales $f_x, g_x \in E'$, tales que $\|f_x\| = 1$ y $\|g_x\| = 1$. Con lo anterior, podemos definir los productos interiores de Hahn-Banach

$$\langle x, y\rangle_{S_f} = f_y(x) \quad y \quad \langle x, y\rangle_{S_g} = g_y(x)$$

los cuales inducen la norma de E.

El siguiente teorema caracteriza los espacios de Banach E que admiten un producto interior compatible.

Teorema 2.4. *Para un espacio de Banach no-arquimedeano E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E admite un producto interior que induce la norma de E.*
2. *$\|E\| \subset |\mathbb{K}|^{1/2}$ y cada subespacio 1-dimensional de E es ortocomplementado.*
3. *Existe una función $y \longmapsto f_y$ de E en E' que satisface $\|f_y\| = \|y\|$ y $|f_y(y)| = \|y\|^2$ para todo $y \in E$.*

Demostración.
1. $\Rightarrow$ 2. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interior que induce la norma original de E. Entonces, para cada $x \in E$, $\|x\|^2 = |\langle x, x\rangle| \in |\mathbb{K}|$. Así $\|E\| \subset |\mathbb{K}|^{1/2}$. Ahora, dado $y \in E$, $y \neq 0$, el complemento transverso $\{y\}^{\dashv}$ es un subespacio cerrado de E (Proposición 2.1); además $\{y\}^{\dashv}$ es ortogonal a $\{y\}$ (Teorema 2.2).
Ahora, notemos que, para cada $x \in E$, se tiene

$$x \;=\; x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}y + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}y$$

con

$$x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \in \{y\}^{\dashv} \quad \text{y} \quad \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \in [y]$$

Así,

$$E = \{y\}^{\dashv} + [y]$$

2. $\Rightarrow$ 3. Dado $y \in E$, $y \neq 0$, existe un subespacio M_y tal que

$$E = M_y \oplus [\,y] \quad \text{y} \quad [\,y] \perp M_y$$

Además, como $\|y\| \in \|E\| \subset |\mathbb{K}|^{1/2}$, existe $a_y \in \mathbb{K}$ tal que $|a_y| = \|y\|^2$. Con esto podemos definir el funcional lineal continuo

$$\begin{array}{rclcl} f_y & : & M_y \oplus [\,y] & \to & \mathbb{K} \\ & & x + by & \mapsto & f_y(x + by) = ba_y \end{array}$$

Ahora, dado $z \in E$, existen $x \in M_y$ y $b \in \mathbb{K}$ tales que $z = x + by$ y así,

$$\begin{array}{rcl} |f_y(z)| & = & |ba_y| = |b| \; \|y\|^2 \\ & = & \|by\| \; \|y\| \\ & \leq & \|x + by\| \; \|y\| = \|z\| \; \|y\| \end{array}$$

Por lo que, $\|f_y\| \leq \|y\|$. Pero como $|f_y(y)| = |a_y| = \|y\|^2$, se sigue que $\|f_y\| = \|y\|$.

3. $\Rightarrow$ 1. $\langle x, y\rangle = f_y(x)$ define un producto interior sobre E con

$$|\langle x, x\rangle| = |f_x(x)| = \|x\|^2$$

□

El siguiente corolario es una versión débil de ortogonalidad implica la normalidad.

Corolario 2.2. *Sea E un espacio de Banach no-arquimedeano con las propiedades que todo subespacio 1-dimensional de E es ortocomplementado y que $\|E\| \subset |\mathbb{K}|^{1/2}$. Sea M subespacio finito-dimensional y sea S un conjunto de vectores ortogonales a M. Entonces existe un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre E que induce la norma, y que además $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x \in M$, $y \in S$.*

Demostración. Notemos que, como cada subespacio 1-dimensional admite un ortocomplemento, entonces los subespacios finito-dimesionales también los admiten. Luego, para cada $y \in S$, $y \neq 0$, el subespacio finito-dimensional $M + [y]$ admite un ortocomplemento que lo denotaremos por N_y, es decir,

$$E = N_y \oplus (M + [y]) \quad \text{y} \quad N_y \perp (M + [y])$$

De lo anterior, se sigue que $M_y = M + N_y$ es un ortocomplemento de $[y]$.
Ahora, como $\|y\| \in \|E\| \subset |\mathbb{K}|^{1/2}$, existe $a_y \in \mathbb{K}$ tal que $|a_y| = \|y\|^2$. Con esto se define el funcional lineal continuo

$$\begin{array}{rcccl} g_y & : & M_y \oplus [\,y] & \to & \mathbb{K} \\ & & x + by & \mapsto & g_y(x+by) = ba_y \end{array}$$

Notemos que $g_y(x) = 0$, para todo $x \in M_y$.
Luego, definiendo $\langle x, y\rangle = g_y(x)$, se obtiene un producto interior sobre E, el induce su norma. Como $M \subset M_y$, para cada $y \in S$, se sigue que

$$\langle x, y\rangle = 0 \ \ \forall\, x \in M\,,\ \forall\, y \in S$$

$\square$

2.3. Producto Interior Simétrico

Comenzamos la sección demostrando un lema tecnico.

Lema 2.1. *El campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real si, y sólo si, para cada subconjunto finito $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$, se tiene*

$$\left|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2\right| = \text{máx}\left\{\left|\lambda_1^2\right|, \left|\lambda_2^2\right|, \ldots, \left|\lambda_n^2\right|\right\}$$

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Probemos que si $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$, entonces

$$\left|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2\right| = \text{máx}\left\{\left|\lambda_1^2\right|, \left|\lambda_2^2\right|, \ldots, \left|\lambda_n^2\right|\right\}$$

En efecto, definamos

$$\|\lambda\| = \text{máx}\left\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\right\} \ \text{ e } I = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : |\lambda_i| = \|\lambda\|\}$$

Entonces, $|\lambda_i| = \|\lambda\|$ para $i \in I$ y $|\lambda_i| < \|\lambda\|$ para $i \notin I$. Ahora, supongamos por un instante que $\|\lambda\| = 1$, entonces $|\lambda_i| = 1$ para $i \in I$ y así $\overline{\lambda_i} \neq \overline{0}$. Luego, como $\Bbbk$ es formalmente real, se tiene que

$$\overline{\sum_{i\in I} \lambda_i^2} = \sum_{i\in I} \overline{\lambda_i^2} \neq \overline{0}$$

y así,

$$\left|\sum_{i\in I} \lambda_i^2\right| = 1$$

Por otro lado, como $|\lambda_i| < 1$ para $i \notin I$, obtenemos

$$\left|\sum_{i\notin I} \lambda_i^2\right| < 1 = \left|\sum_{i\in I} \lambda_i^2\right|$$

con lo que se obtiene

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right| = \left|\sum_{i\notin I}\lambda_i^2 + \sum_{i\in I}\lambda_i^2\right| = \left|\sum_{i\in I}\lambda_i^2\right| = 1 = \|\lambda\|^2$$

Ahora, si $\|\lambda\| \neq 0$ y $\|\lambda\| \neq 1$, escogemos $a \in \mathbb{K}$ tal que $|a| = \|\lambda\|$ y aplicamos el procedimiento anterior al conjunto finito $\{a^{-1}\lambda_1, a^{-1}\lambda_2, \ldots, a^{-1}\lambda_n\} \subset \mathbb{K}$.

$\Leftarrow\rfloor$ Recíprocamente, supongamos que, para cada subconjunto finito $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$, se tiene

$$\left|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2\right| = \text{máx}\left\{\left|\lambda_1^2\right|, \left|\lambda_2^2\right|, \ldots, \left|\lambda_n^2\right|\right\}$$

Mostrermos que $\Bbbk$ es formalmente real. En efecto, sea $\{\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}\} \subset \Bbbk$ tal que

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i}^{\,2} = \overline{0}$$

Luego, $\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right| = 0$ y

$$\left|\lambda_i^2\right| \leq \text{máx}\{\left|\lambda_1^2\right|, \ldots, \left|\lambda_n^2\right|\} = \left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right| = 0$$

de lo que sigue que $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

$\square$

Observación 2.5.

1. *Notemos que si $x \in c_0(T)$, entonces $|x(t)| \leq \|x\|_\infty$ para todo $t \in T$.*
   Por otro lado, si $x \neq 0$ y $\epsilon = \|x\|_\infty$, entonces el conjunto $\{t \in T : |x(t)| = \|x\|_\infty\}$ es, a lo más, finito, pues $\{t \in T : |x(t)| \geq \epsilon\}$ es finito por la definición de $c_0(T)$.
   Denotemos por $\pi(x)$ al conjunto $\{t \in T : |x(t)| = \|x\|_\infty\}$.

2. *Consideremos $x, y \in c_0(T)$. Entonces,*

$$\sum_{t\in T} x(t)y(t)$$

   es una forma bilineal simétrica y continua, pues

$$\left|\sum_{t\in T} x(t)y(t)\right| \leq \text{máx}_{t\in T}\{|x(t)|, |y(t)|\} \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty < +\infty$$

   Además, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, y cada $x, y, z \in c_0(T)$ se tiene

$$\sum_{t\in T}(\alpha\, x(t) + \beta\, z(t))y(t) = \alpha\sum_{t\in T} x(t)y(t) + \beta\sum_{t\in T} z(t)y(t)$$

Con lo anterior, podemos mostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Consideremos la forma bilineal*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{t\in T} x(t)y(t)$$

en $c_0(T)$. *Entonces,* $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *es un producto interior si y sólo si la clase residual de* $\mathbb{K}$ *es formalmente real. Además, cuando* $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *es un producto interior, se tiene*

$$|\langle x, x\rangle| = \|x\|_\infty^2 = \left|\sum_{t\in T} x^2(t)\right| \;, \quad \forall x = (x(t)) \in c_0(T)$$

Demostración.

$\Leftarrow]$ Supongamos que la clase residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Por el punto 2 de la Observación 2.5, basta mostrar que $|\langle x, x\rangle| = \|x\|_\infty^2$. En efecto, si consideramos $\pi(x) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, se tiene que $|x(t_i)| = \|x\|_\infty$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $|x(t)| < \|x\|_\infty$ para $t \notin \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Además,

$$\left|\sum_{t\notin\pi(x)} x^2(t)\right| \leq \text{máx}\left\{\left|x^2(t)\right| : t \notin \pi(x)\right\} < \|x\|_\infty^2$$

Por lo que basta mostrar que

$$\left|x^2(t_1) + x^2(t_2) + \cdots + x^2(t_n)\right| = \|x\|_\infty^2$$

para obtener

$$\left|\sum_{t\in T} x^2(t)\right| = \|x\|_\infty^2$$

En efecto, notemos que $\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\}$ es un conjunto finito de $\mathbb{K}$. Luego, como el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real, podemos aplicar el Lema 2.1 para obtener

$$\|x\|^2 = |\langle x, x\rangle| = \left|\sum_{t\in\pi(x)} x^2(t)\right| = \|x\|_\infty^2$$

Así,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty = \|x\| \; \|y\|$$

lo que muestra que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es un producto interior no-arquimedeano que induce la norma de $c_0(T)$.

$\Rightarrow]$ Supongamos que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es un producto interior que induce la norma de $c_0(T)$. Mostremos que el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. En efecto, sea $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ y para $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ definamos $x(t_i) = \lambda_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $x(t) = 0$ en otros casos. Así,

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2\right| = |\langle x, x\rangle| &= \left|\sum_{t\in T} x^2(t)\right| \\
&= \text{máx}\{\left|x^2(t)\right| : t \in T\} \\
&= \text{máx}\{\left|\lambda_i^2\right| : i = 1, 2, \ldots, n\}
\end{aligned}$$

Luego, por el Lema 2.1 obtenemos que el campo de clases residuales es formalmente real.

□

Corolario 2.3. *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Si el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real y $|a_i| = c$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right| = c^2$$

Demostración. Para $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ definamos $x(t_i) = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $x(t) = 0$ para otros casos. Así,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right| = \left|\sum_{t\in T} x^2(t)\right| = \text{máx}\{|x(t)|^2 : t \in T\} = c^2$$

□

Corolario 2.4. *Sean $x, y \in c_0(T)$ y supongamos que el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Entonces,*

$$|\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle| = \text{máx}\{\, |\langle x, x\rangle| \,, |\langle y, y\rangle| \,\}\,.$$

Demostración. Si $|\langle x, x\rangle| \neq |\langle y, y\rangle|$, entonces el resultado se sigue aplicando el Teorema 1.2.

Sin perdidad de generalidad, supongamos que $|\langle x, x\rangle| = \|x\|_\infty^2 = \|y\|_\infty^2 = |\langle y, y\rangle| = 1$ y consideremos $\pi(x) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, $\pi(y) = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$. Luego, aplicando el Lema 2.1 a los conjuntos $\{x(t_1), \ldots, x(t_n)\}$ y $\{y(s_1), \ldots, y(s_m)\}$ se tiene

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^2(t_i)\right| = 1 \quad \text{y} \quad \left|\sum_{j=1}^{m} y^2(s_j)\right| = 1$$

y aplicando nuevamente el Lema a $\{x(t_1), \ldots, x(t_n), y(s_1), \ldots, y(s_m)\}$, se concluye

$$\begin{aligned}
|\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle| &= \left|\sum_{t\notin\pi(x)} x^2(t)+\sum_{t\in\pi(x)} x^2(t)+\sum_{t\notin\pi(y)} y^2(t)+\sum_{t\in\pi(y)} y^2(t)\right| \\
&= \left|\sum_{t\in\pi(x)} x^2(t)+\sum_{t\in\pi(y)} y^2(t)\right| \\
&= \left|x^2(t_1)+\ldots+x^2(t_n)+y^2(s_1)+\cdots+y^2(s_m)\right| \\
&= \max_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \{|x_{t_i}|^2, |y_{s_j}|^2\}=1 \\
&= \max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x^2(t_i)\right|, \left|\sum_{j=1}^{m} y^2(s_j)\right|\right\} \\
&= \max\{|\langle x,x\rangle|, |\langle y,y\rangle|\}
\end{aligned}$$

□

Siguiendo los mismos argumentos que en la demostración del corolario anterior, se obtiene:

Corolario 2.5. *Si* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in c_0(T)$*, entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\langle x_i,x_i\rangle\right| = \max\{|\langle x_i,x_i\rangle| : i=1,\ldots,n\}$$

Demostración. Mostremos el Corolario para tres elementos $x,y,z\in c_0(T)$. Si $|\langle x,x\rangle|\neq|\langle y,y\rangle|\neq|\langle z,z\rangle|$, el resultado se sigue de la desigualdad triangular fuerte.
Si $|\langle x,x\rangle|=|\langle y,y\rangle|$ pero $|\langle x,x\rangle|\neq|\langle z,z\rangle|$, entonces por el Corolario 2.4, se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle+\langle z,z\rangle| &= \max\{|\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle|, |\langle z,z\rangle|\} \\
&= \max\{\max\{|\langle x,x\rangle|, |\langle y,y\rangle|\}, |\langle z,z\rangle|\} \\
&= \max\{|\langle x,x\rangle|, |\langle y,y\rangle|, |\langle z,z\rangle|\}
\end{aligned}$$

Si $|\langle x,x\rangle|=|\langle y,y\rangle|=|\langle z,z\rangle|=1$, entonces, siguiendo la demostración del Corolario 2.4, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{3}\langle x_i,x_i\rangle\right| &= \left|\sum_{t\notin\pi(x_1)} x_1^2(t)+\sum_{t\in\pi(x_1)} x_1^2(t)+\ldots+\sum_{t\notin\pi(x_n)} x_n^2(t)+\sum_{t\in\pi(x_n)} x_n^2(t)\right| \\
&= \left|\sum_{t\in\pi(x_1)} x_1^2(t)+\ldots+\sum_{t\in\pi(x_n)} x_n^2(t)\right| = 1 \\
&= \max\{|\langle x,x\rangle|, |\langle y,y\rangle|, |\langle z,z\rangle|\}
\end{aligned}$$

□

Observación 2.6. *Notemos que en el caso real o complejo, cuando tenemos un producto interior que cumple con*

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\| \ ,$$

entonces existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $y = ax$.
Este no es el caso para los productos interiores no arquimedeanos. En efecto, supongamos que el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Luego, en $\mathbb{K}^3$ consideramos el producto interior simétrico natural. Así, para los elementos $y = (0,1,1)$ y $x = (1,0,1)$ se tiene que $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente independiente, pero en cambio

$$1 = \|x\|_\infty = \|y\|_\infty = |\langle x, y\rangle| = \|x\|_\infty \, \|y\|_\infty$$

2.4. Gram-Schmidt en c_0

Aún cuando se mencionó en el Ejemplo 2.1 que, en general, no es posible crear vectores unitarios en espacios de Banach, cada elemento no nulo de c_0 puede ser normalizado. En efecto, si $x \in c_0$, con $x \neq 0$, se define $p(x) = \min \pi(x)$; entonces, $|x(p(x))| = \|x\|_\infty$. Luego, tomando $a = x(p(x))^{-1}$, se obtiene que $y = ax$ es un vector unitario.

Teorema 2.6. *Sea $(x_n) \in c_0$ una sucesión de vectores linealmente independientes. Entonces existe una sucesión ortonormal de vectores $(y_n) \in \ c_0$ tal que $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Demostración. Sea $w_1 = x_1$ y $w_2 = x_2 - \langle x_2, w_1\rangle \langle w_1, w_1\rangle^{-1} w_1$ (notemos que $w_2 \neq 0$ pues si lo fuera, x_2 sería múltiplo de x_1, contradiciendo la independencia lineal). Luego,

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2\rangle &= \left\langle x_1, x_2 - \langle x_2, x_1\rangle \langle x_1, x_1\rangle^{-1} x_1 \right\rangle \\ &= \langle x_1, x_2\rangle - \langle x_2, x_1\rangle \langle x_1, x_1\rangle^{-1} \langle x_1, x_1\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

de lo que se sigue, w_1 es ortogonal a w_2.
De la misma forma, se define

$$w_3 = x_3 - \langle x_3, w_1\rangle \langle w_1, w_1\rangle^{-1} w_1 - \langle x_3, w_2\rangle \langle w_2, w_2\rangle^{-1} w_2$$

($w_3 \neq 0$ pues si no lo fuera, x_3 sería combinación lineal de x_1 y de x_2) con lo que obtenemos $\langle w_1, w_3\rangle = 0$ y $\langle w_2, w_3\rangle = 0$.
Iterando de la misma forma, obtenemos que, para $k > 1$

$$w_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k, w_i\rangle \langle w_i, w_i\rangle^{-1} w_i \ , \quad \text{con } \langle w_i, w_j\rangle = 0 \ \forall\, i, j \ , \ i \neq j$$

Para normalizar la sucesión obtenida definimos, $y_k = a_k w_k$ con $a_k = w_k(p(w_k))^{-1}$, y así $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$. □

2.5. La propiedad de Riemann-Lebesgue

Notemos que, si (x_n) es una base ortonormal de c_0, entonces todo $x \in c_0$ se puede escribir como $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$, con $a_n \in \mathbb{K}$. Así, por la continuidad del producto interior y utilizando el hecho que la sucesión (x_n) es normal obtenemos que para todo $x \in c_0$, $\langle x, x_n\rangle = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y por la Proposición 1.4 concluimos

$$\langle x, x_n\rangle \to 0 \;\text{ cuando }\; n \to \infty$$

Con este hecho podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.3. *Sea (x_n) una sucesión en c_0. Diremos que (x_n) tiene la "Propiedad de Riemann-Lebesgue" si $\langle x, x_n\rangle \to 0$ para todo $x \in c_0$*

A continuación mostraremos que toda sucesión ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue esta "dentro de una base ortonormal".

Teorema 2.7. *Si $S \subset c_0$*

1. *es un conjunto ortonormal finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, o*
2. *es una sucesión ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de Riemann-Lebesgue,*

entonces S puede completarse a una base ortonormal de c_0.

Demostración.

1. Sean $M = [\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}]$ e $I = \{k \in \mathbb{N} : e_k \notin M\}$. Para cada $k \in I$, definimos
$$w_k = e_k - \sum_{j=1}^{n} \langle e_k, x_j\rangle \langle x_j, x_j\rangle^{-1} x_j$$
y consideramos un subconjunto linealmente independiente maximal W de $\{w_k : k \in \mathbb{N}\}$. Sea $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto obtenido al aplicar el Teorema de Gram-Schmitd a W. Pongamos $N = cl[\{y_k : k \in \mathbb{N}\}]$. Ahora, para todo $w_m \in W$ tenemos
$$w_m = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i y_i \quad \mu_i \in \mathbb{K},\; y_i \in N$$
Así,
$$e_m = \sum_{j=1}^{n} \langle e_m, x_j\rangle \langle x_j, x_j\rangle^{-1} x_j + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i y_i \in M + N$$
lo que muestra el resultado.

2. Sean $M = cl[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}] \neq c_0$ y $I = \{n \in \mathbb{N} : e_n \notin M\}$. Por la propiedad de Riemann-Lebesgue de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenemos

$$\lim_j \langle e_n, x_j \rangle = 0 \quad \forall n \in I$$

y así, la serie

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \langle e_n, x_j \rangle \langle x_j, x_j \rangle^{-1} x_j$$

converge para todo $n \in I$. Ahora, para $n \in \mathbb{N}$, se define

$$w_n = e_n - \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle e_n, x_j \rangle \langle x_j, x_j \rangle^{-1} x_j \neq 0 \quad (e_n \notin M)\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle w_n, x_i \rangle &= \langle e_n, x_i \rangle - \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle e_n, x_j \rangle \langle x_j, x_j \rangle^{-1} \langle x_j, x_i \rangle \\ &= \langle e_n, x_i \rangle - \langle e_n, x_i \rangle = 0 \quad \forall n \in I, \forall i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

De esto se sigue que w_n es normal a M, para todo $n \in \mathbb{N}$. Siguiendo las mismas ideas del caso anterior, consideramos un subconjunto linealmente independiente maximal W de $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ y aplicamos el Teorema 2.6 para obtener un conjunto ortonormal $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego, definiendo $N = cl[\, y_n : n \in \mathbb{N}]$, obtenemos que N es normal a M y resultado se sigue de igual forma que el caso anterior.
Ahora, como $M + N$ es cerrado (Corolario 2.1) y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset M + N$, se tiene $c_0 = M + N$.

□

Corolario 2.6. *Sea M un subespacio de c_0. Entonces, si M es de dimensión finita o M es de dimensión infinita y tiene una base ortonormal con la propiedad de Riemann-Lebesgue, entonces $c_0 = M \oplus M^p$.*

Demostración. Si M es finito-dimensional, entonces M posee una base ortonormal $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, por el Teorema 2.6. Ahora, si $z \in c_0$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \langle z, x_k \rangle \langle x_k, x_k \rangle^{-1} x_k \in M \ .$$

Pues bien, si consideremos

$$y = z - \sum_{k=1}^{n} \langle z, x_k \rangle \langle x_k, x_k \rangle^{-1} x_k \ .$$

entonces para $x_j \in M$ tenemos

$$\langle y, x_j \rangle = \langle z, x_j \rangle - \langle z, x_j \rangle = 0 \ .$$

Esto implica que $y \in M^p$. Por lo tanto, para cada $z \in c_0$ tenemos la representación

$$z = \sum_{k=1}^{n} \langle z, x_k \rangle \langle x_k, x_k \rangle^{-1} x_k + y \in M + M^p$$

donde el primero sumando de la derecha pertenece a M y el segundo sumando a M^p. En consecuencia $c_0 = M \oplus M^p$.

Supongamos que M es de dimensión infinita y que posee una base ortonormal $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ con la Propiedad de Riemann-Lebesgue.
Por el teorema anterior, existe una base ortonormal numerable $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal para c_0. Definiendo $M = cl[x_n : n \in \mathbb{N}]$, obtenemos que $N = cl[y_n : n \in \mathbb{N}] = M^p$. □

Observación 2.7. *No toda sucesión ortonormal posee la Propiedad de Riamnn-Lebesgue, como lo muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 2.3. *Consideremos los vectores,*

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 1, 0, \ldots) \\
x_2 &= (1, -1, 1, 0, \ldots) \\
x_3 &= (1, -1, 2, -6, 1, 0, \ldots) \\
x_4 &= (1, -1, 2, -6, -42, 1, 0, \ldots) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_n &= (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, 1, 0, 0, \ldots)
\end{aligned}$$

Para $n > 2$,

$$x_{n+1} = \left(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, -\sum_{i=1}^{n} a_i^2, 1, 0, 0, \ldots \right)$$

Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión de vectores tales que

$$\|x_n\| = \text{máx}\{|a_i| : i \in \mathbb{N}\} = 1 \quad (\textit{con } a_i \textit{ entero, para todo } i \in \mathbb{N})$$

Además, como $|\langle x_n, e_1 \rangle| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que (x_n) no posee la Propiedad de Riemann-Lebesgue.

A continuación damos un criterio para identificar sucesiones con la Propiedad de Riemann-Lebesgue.

Teorema 2.8. *Una sucesión ortonormal $(x_n) = (x_n(k)_{k \in \mathbb{N}})$ tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ y para todo $m > 0$, existe $N = N(m, \epsilon) > 0$ tal que*

$$n > N \implies |x_n(i)| < \epsilon \ , \ \forall\, i,\ 1 \leq i \leq m$$

Demostración.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $\epsilon > 0$ dado, y supongamos que para todo $m > 0$, existe $N = N(m, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \implies |x_n(i)| < \epsilon \;, \;\; \forall\, i,\, 1 \leq i \leq m$$

Mostremos que (x_n) tiene la propiedad de Riemann-Lebesgue. En efecto, dado $x = (x(n)) \in c_0$, escojemos $m > 0$ tal que

$$|x(i)| < \epsilon \;\; \text{para} \;\; i > m$$

Por hipótesis, para este m, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |x_n(i)| < \epsilon \;\; \text{para} \;\; 1 \leq i \leq m$$

Ahora, como $|x_n(i)| < \epsilon$ para $i \leq m$ y $n \geq N$ y que $|x(i)| \leq \| x\|_\infty$ para todo i, se sigue de esto que

$$|x(i)x_n(i)| \leq \epsilon \; \|x\|_\infty \;\; \text{para } n \geq N \text{ y } i \leq m$$

y así,

$$\left| \sum_{i \leq m} x(i)x_n(i) \right| \leq \max \{ |x(i)x_n(i)| : i \leq m \} \leq \|x\|_\infty \; \epsilon$$

Por otro lado, para $i > m$ se tiene que $|x(i)| < \epsilon$ y $|x_n(i)| \leq \| x_n\|_\infty = 1$, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$|x(i)x_n(i)| < \epsilon \;\; \text{para } i > m \text{ y } n \geq N$$

y por tanto,

$$\left| \sum_{i > m} x(i)x_n(i) \right| \leq \max \{ |x(i)x_n(i)| : i > m \} < \epsilon \;\; \text{para } n \geq N \; .$$

En consecuencia, para $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |\langle x, x_n \rangle| &= \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} x(i)x_n(i) \right| = \left| \sum_{i \leq m} x(i)x_n(i) + \sum_{i > m} x(i)x_n(i) \right| \\ &\leq \max\{ \|x\|_\infty \; \epsilon, \epsilon \} \end{aligned}$$

lo que muestra que $\langle x, x_n \rangle \to 0$.

$\Rightarrow\rfloor$ Ahora, supongamos que existen $\epsilon > 0$ y $m > 0$ tales que para infinitos n se tiene $|x_n(i_n)| \geq \epsilon$ para cierto $i_n \leq m$. Luego, para $x = (\delta_{n,i_0})$, con δ_{n,i_0} delta de Kronecker, se tiene $|\langle x, x_n \rangle| \geq \epsilon$, es decir,

$$\langle x, x_n \rangle \;\not\to\; 0$$

$\square$

2.6. Complementos Normales

En la sección anterior, gracias al Corolario 2.6 hemos encontrado condiciones suficientes para las cuales un subespacio cerrado M cumple con

$$c_0 = M \oplus M^p$$

En la presente sección se encontrarán condiciones necesarias que permitirán caracterizar tales subespacios cerrados.

Definición 2.4. *Sean M y N dos subespacios cerrados de c_0. Diremos que N es un complemento normal de M si*

1. $\langle x, y\rangle = 0 \ \ \forall\, x \in M\,,\ \ \forall\, y \in N.$
2. $c_0 = M \oplus N.$

Teorema 2.9. *Sea f un funcional lineal continuo, distinto del nulo, definido sobre c_0. Entonces, f es un funcional de Riesz si y sólo si $N(f)^p \neq \{0\}$. Para esto último, se tiene que*

$$c_0 = N(f) \oplus N(f)^p$$

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que f es un funcional de Riesz. Luego, existe $y \in c_0$, $y \neq 0$, tal que $f(\cdot) = \langle \cdot, y\rangle$. Notar que $y \notin N(f)$, pues $|\langle y, y\rangle| = \|y\|^2 > 0$. Ahora, como

$$\langle x, y\rangle = 0 \quad \forall x \in N(f)$$

se concluye que $y \in N(f)^p$, lo que muetra que $N(f)^p \neq \{0\}$.

$\Leftarrow\rfloor$ Reciprocamente, supongamos ahora que existe $w \in N(f)^p$, $w \neq 0$. Así, $w \notin N(f)$ y con esto se define $M = [y]$, donde $y = w/f(w)$. Ahora, para $x \in c_0$, definamos $\beta = f(x)$. Notar que, $x - \beta\, y \in N(f)$, y que $x = x - \beta\, y + \beta\, y \in N(f) + M$. Además, $N(f) \cap M = \{0\}$, lo que muestra que $c_0 = N(f) \oplus M$. Luego, dado $x \in c_0$, existe $z \in N(f)$ y $a \in \mathbb{K}$ tal que $x = z + ay$. Notar que,

$$f(x) = f(z + ay) = f(z) + af(y) = a$$

Así, tomando $b = \langle y, y\rangle^{-1}$ obtenemos que

$$\langle x, by\rangle = \langle z + ay, by\rangle = \langle ay, by\rangle = a = f(x)$$

lo que muestra que f es un funcional de Riesz. Se sigue del Corolario 2.6 que

$$c_0 = [by]^p \oplus [by] = N(f) \oplus N(f)^p$$

□

Corolario 2.7. *Sea f un funcional lineal, no trivial, continua definida sobre c_0. Si $N(f)$ tiene una base ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la Propiedad de Riemann-Lebesgue, entonces f es un funcional de Riesz.*

Demostración. Supongamos que $N(f)$ tiene una base ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la Propiedad de Rienamm-Lebesgue. Entonces, por el Corolario 2.6, se tiene

$$c_0 = N(f) \oplus N(f)^p$$

Además, como $f \not\equiv 0$, se sigue que $N(f) \neq c_0$, es decir, existe $w \in N(f)^p$ con $w \neq 0$, en otras palabras $N(f)^p \neq \{0\}$. Por el Teorema 2.9 f es un funcional de Riesz. □

El siguiente teorema caracteriza las bases ortormales de $N(f)$ que tienen la Propiedad de Riemann-Lebesgue.

Teorema 2.10. *Sea f un funcional no nulo, continuo definido en c_0 y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $N(f)$. Entonces, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle e_j, x_n\rangle = 0$ cuando $e_j \notin N(f)$.*

Demostración.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $\lim_n \langle e_j, x_n\rangle = 0$ cuando $e_j \notin N(f)$.
Consideremos la sucesión $(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty (= c_0')$, por la continuidad de f. Por otro lado, notar también que $x - f(x)a_j^{-1}\, e_j \in N(f)$. En efecto,

$$f(x - f(x)a_j^{-1}e_j) = f(x) - f(x)a_j^{-1}f(e_j) = f(x) - f(x)a_j^{-1}a_j = 0$$

Por tanto, como $\{\, x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $N(f)$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle x - f(x)a_j^{-1}\, e_j, x_n\right\rangle = 0$$

Sea $x \in c_0$,

$$\begin{aligned} \langle x, x_n\rangle &= \left\langle x - f(x)a_j^{-1}e_j, x_n\right\rangle + \left\langle f(x)a_j^{-1}\, e_j, x_n\right\rangle \\ &= \left\langle x - f(x)a_j^{-1}e_j, x_n\right\rangle + f(x)a_j^{-1}\,\langle e_j, x_n\rangle \end{aligned}$$

Tomando límite cuando n tiende al infinito y aplicando la hipótesis, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, x_n\rangle = 0$$

lo que muestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue.

$\Rightarrow\rfloor$ Ahora, supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $N(f)$ con la Propiedad de Riemann-Lebesgue, es decir,

$$\langle x, x_n\rangle \to 0 \quad \forall x \in c_0$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_j, x_n\rangle = 0$$

para $e_j \notin N(f)$. □

Observación 2.8. *Como el dual de c_0 es ℓ^∞, entonces existen $f \in c_0'$ que no son funcionales de Riesz. Para estos funcionales, $N(f)^p = \{0\}$ por el teorema anterior.*

Teorema 2.11. *Si $f \in c_0'$ es un funcional de Riesz, entonces cualquier base ortonormal de $N(f)$ tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue.*

Demostración. Si $f \equiv 0$, entonces $N(f) = c_0$ y así, cualquier base de c_0 tiene la propiedad de Riemann-Lebesgue.
Supongamos que $f \not\equiv 0$ y como f es un funcional de Riesz, existe $y \in c_0$, $y \neq 0$, tal que $f(\cdot) = \langle \cdot, y\rangle$. Por el Teorema 2.10, basta mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \langle e_j, x_n\rangle = 0$ cuando $e_j \notin N(f)$.
Sea e_j un elemento de la base canónica tal que $e_j \notin N(f)$ y consideremos la sucesión $(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Luego,

$$\left\langle y, y - \langle y,y\rangle\, a_j^{-1}\, e_j \right\rangle = \langle y,y\rangle - \langle y,y\rangle\, a_j^{-1}\, \langle y, e_j\rangle = \langle y,y\rangle - \langle y,y\rangle\, a_j^{-1}\, a_j = 0$$

Es decir, $y - \langle y,y\rangle\, a_j^{-1}\, e_j \in N(f)$. Ahora, si (x_n) es una base ortonormal de $N(f)$, entonces

$$0 = \langle y, x_n\rangle = \left\langle y - \langle y,y\rangle\, a_j^{-1}\, e_j, x_n \right\rangle + \langle y,y\rangle\, a_j^{-1}\, \langle e_j, x_n\rangle$$

y luego,

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_j, x_n\rangle = -\lim_{n\to\infty} \frac{a_j}{\langle y,y\rangle} \left\langle y - \langle y,y\rangle\, a_j^{-1}\, e_j, x_n \right\rangle = 0\ .$$

□

Observación 2.9. *Dada la base canónica $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, se define el funcional lineal,*

$$\begin{array}{cccl} e_i' & : & c_0 & \to \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto e_i'(x) = x_i \end{array}$$

donde $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. Notemos que $e_i' \in c_0' = \ell^\infty$ y que

$$\|e_i'\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|e_i'(x)|}{\|x\|} = 1$$

Además, e_i' es un funcional de Riesz, ya que $e_i'(x) = x_i = \langle e_i, x\rangle$.

Proposición 2.3. *$cl[\{e_i' : i \geq 1\}] \cong c_0$.*

Demostración. Definamos la aplicación lineal

$$\Phi \quad :[\quad \{e_i' : i \in \mathbb{N}\}] \quad \to \quad c_0$$

por $\Phi(e_i') = e_i$ en su base. Como

$$\|\Phi(e_i')\| = \|e_i'\| = 1 = \|e_i\|$$

Φ resulta ser isometría.
Se extiende continuamente Φ a la claususra de $[\{e'_i : i \in \mathbb{N}\}]$

$$\hat{\Phi} \quad : \quad cl[\{e'_i : i \geq 1\}] \quad \rightarrow \quad c_0$$

la cual resulta ser también una isometría. Afirmamos que $\hat{\Phi}$ es sobreyectiva. En efecto, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ y definamos

$$x' = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \, e'_n \, .$$

Como

$$0 = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a_n| \; \|e'_n\| \; ,$$

se tiene que $x' \in \ell^{\infty}$. En particular,

$$x' = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e'_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i e'_i \in cl[\{e'_i : i \geq 1\}] \, .$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x') &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \, \Phi(e'_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \, e_i \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_i \, e_i = (a_n) \end{aligned}$$

lo que muestra que $\hat{\Phi}$ es sobreyectiva. □

La siguiente proposición es una caracterización de los funcionales de Riesz sobre c_0.

Proposición 2.4. *$f \in cl[\{e'_i : i \geq 1\}]$ si, y sólo si, f es un funcional de Riesz.*

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $f \in cl[\{e'_i : i \geq 1\}]$. Luego, existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ tal que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, e'_k$$

con

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| \; \|e'_k\| = \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$$

Por lo tanto, definiendo

$$y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \, e_n$$

se tiene que $y \in c_0$, y que

$$\begin{aligned} f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, e'_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e'_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \cdot \right\rangle \\ &= \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \cdot \right\rangle \\ &= \langle y, \cdot \rangle \end{aligned}$$

lo que muestra que f es un funcional de Riesz.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que f es un funcional de Riesz. Entonces, existe $y \in c_0$, con $y \neq 0$, tal que $f(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$. Ahora, notemos que

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n \, e_n \in c_0$$

y así,

$$f = \langle y, \cdot \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, \langle e_i, \cdot \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, e'_i \in cl[\{e'_i : i \geq 1\}]$$

$\square$

Capítulo 3

Operadores sobre c_0

En este capítulo se estudiarán en detalle los trabajos [1] y [2] de J. Aguayo y M. Nova.
En estos trabajos se caracterizan los espacios que admiten un complemento normal y cómo estos se relacionan con los operadores proyección.
Además, utilizando las proyecciones normales, se mostrará un análogo no-arquimedeano de un teorema de descomposición espectral.

3.1. Proyecciones Normales

Sea $T : c_0 \to c_0$ un operador lineal. Entonces,

1. llamaremos "espacio nulo de T" al conjunto

$$N(T) = \{x \in c_0 : T(x) = 0\}$$

2. llamaremos "Rango de T" al conjunto

$$R(T) = \{y \in c_0 : y = T(x); \text{para algún } x \in c_0\}$$

3. Además, denotaremos por $\mathcal{L}(c_0)$ al espacio de todos los operadores lineales T definidos sobre c_0.

Definición 3.1. *Sea $P \in \mathcal{L}(c_0)$. Entonces, P se dirá "Proyección Normal" si satisface*

1. $P^2 = P$
2. *P es continua.*
3. *$\langle x, y\rangle = 0$, para $x \in N(P)$ e $y \in R(P)$.*

Observación 3.1.

1. *De 1. y 3. en la definición anterior, obtenemos que $c_0 = N(P) \oplus R(P)$.*

2. *Si $x \in c_0$, entonces $x - Px \in N(P)$. En efecto,*

$$P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0$$

3. *Si $x \in R(P)$, entonces $x = P(x)$. En efecto, dado $x \in R(P)$ existe $z \in c_0$ tal que $x = P(z)$. Así,*

$$P(x) = P(P(z)) = P^2(z) = P(z)$$

Teorema 3.1. *Sea P una proyección normal. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $N(P)$, entonces ésta tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal de $N(P)$ y sea $x \in c_0$ arbitrario. Si $x \in N(P)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x, x_n\rangle = 0$, ya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $N(P)$. Supongamos que $x \notin N(P)$; como P es una proyección normal, se tiene $x - Px \in N(P)$ y que $\langle Px, x_n\rangle = 0$. Así,

$$\langle x, x_n\rangle = \langle x - Px, x_n\rangle + \langle Px, x_n\rangle = \langle x - Px, x_n\rangle$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x - Px, x_n\rangle = 0$$

□

Corolario 3.1. *Si P es proyección normal sobre c_0, entonces $I - P$ es también una proyección normal. Además, $N(P)^p = R(P) = N(I - P)$ y $R(P)^p = N(P) = R(I - P)$.*

Demostración.

1. $I - P$ es continua, pues I y P los son. Además,

$$(I - P)^2(x) = (I - P)(x - P(x)) = x - P(x) - P(x) + P^2(x) = x - P(x)$$

Así, $(I - P)^2 = I - P$. Finalmente, $\langle x, y\rangle = 0$ con $x \in N(I - P)$ e $y \in R(I - P)$, se obtiene de las igualdades $R(P) = N(I - P)$ y $N(P) = R(I - P)$, las cuales se prueban a continuación.

2. $N(P)^p = R(P)$.
Sea $x \in N(P)^p$ y sea $(u, v) \in N(P) \times R(P)$ tal que $x = u + v$ (Observación 3.1). Como $\langle x, u\rangle = 0$ y $\langle v, u\rangle = 0$, se tiene que $\langle u, u\rangle = 0$, lo cual implica que $u = 0$. Luego, $x = v \in R(P)$.
Por otro lado, dado $x \in R(P)$ e $y \in N(P)$ obtenemos que $\langle x, y\rangle = 0$, por el punto 3 de la Definición 3.1. Así, $x \in N(P)^p$.

3. $R(P) = N(I - P)$.

$$\begin{aligned} x \in R(P) &\Leftrightarrow x = P(x) \\ &\Leftrightarrow x - P(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (I - P)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in N(I - P) \end{aligned}$$

4. $N(P) = R(I - P)$.

$$\begin{aligned} x \in N(P) &\Leftrightarrow P(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = x - P(x) \in R(I - P) \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1. *Sea M un subespacio cerrado de c_0. Si M posee una base ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue, entonces existe una proyección normal P tal que $M = N(P)$.*

Demostración. Por el Corolario 2.6, se tiene $c_0 = M \oplus M^p$. Si $x \in c_0$, entonces existe un único par $(u, v) \in M \times M^p$ tal que $x = u + v$. Definiendo $P_M(x) = v$, obtenemos la proyección normal que cumple con $N(P) = M$. □

Corolario 3.2. *Sea M un subespacio cerrado y finito-dimensional de c_0. Entonces, las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

1. *M admite un complemento normal.*
2. *M tiene una base ortonormal con la propiedad de Riemann-Lebesgue.*
3. *Existe una proyección normal P tal que $N(P) = M$.*

Demostración.
1.$\Rightarrow$ 2. Supongamos que M admite un complemento normal, es decir, existe un subespacio N tal que

$$c_0 = M \oplus N \ \text{ y que } \ \langle x, y\rangle = 0\,, \ \ x \in M\,, \ y \in N$$

Luego, dado $z \in c_0$ existen únicos $(x, y) \in M \times N$ tales que $z = x + y$. Entonces, definiendo $P_M(z) = y$, obtenemos un proyección normal que satisface $N(P_M) = M$. Así, dada una base ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $N(P_M)$, ésta tendrá la Propiedad de Riemann-Lebesgue gracias al Teorema 3.1.

2.$\Rightarrow$ 3. Sea M un subespacio cerrado tal que admite una base ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue. Luego, aplicando la Proposición 3.1 obtenemos la existencia de una proyección normal P tal que $N(P) = M$.

3.$\Rightarrow$ 1. Supongamos que existe una proyección normal P tal que $N(P) = M$. Luego, por el Corolario 3.1 tenemos que $R(P) = N(P)^p = M^p$, y utilizando la Observación 3.1, item 1. se tiene que,

$$c_0 = M \oplus M^p$$

lo cual muestra el resultado. □

Corolario 3.3. *Sea M un subespacio cerrado de c_0. Entonces,*

1. *Si M es finito-dimensional o tiene una base ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue, entonces M^p tiene una base con la propiedad de Riemann-Lebesgue o es finito-dimensional.*

2. *Si M tiene una base ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue, entonces cualquier otra base ortonormal tiene la misma propiedad.*

Demostración.

1. Supongamos que M es finito dimensional, luego por el Corolario 2.6 se tiene $c_0 = M \oplus M^p$. Así, si $x \in c_0$, entonces existe un único par $(u, v) \in M \times M^p$ tal que $x = u+v$. Definiendo $P_{M^p}(x) = u$, obtenemos una proyección normal que satisface que $N(P_{M^p}) = M^p$. Luego, el resultado se sigue del Corolario 3.2.

2. Supongamos que M tiene una base ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue, entonces por el Corolario 3.2 existe una proyección normal P tal que $N(P) = M$. Así, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal cualquiera de $M = N(P)$, podemos aplicar el Teorema 3.1 para obtener que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también satisface la Propiedad de Riemann-Lebesgue.

□

Definición 3.2. *Un subespacio cerrado M de c_0 se dirá que tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue si M es finito-dimensional o tiene una base ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue.*

Lo siguiente, generaliza la Observación 2.9

Observación 3.2. *Sea $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ la base canónica de c_0. Se define el operador lineal*

$$\begin{array}{rcccl} e'_j \otimes e_i & : & c_0 & \rightarrow & c_0 \\ & & x & \mapsto & e'_j \otimes e_i(x) = e'_j(x)\, e_i \,. \end{array}$$

Notemos que,

$$\left\| e'_j \otimes e_i \right\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\left| e'_j(x) \right| \, \| e_i \|}{\| x \|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left| e'_j(x) \right|}{\| x \|} = \left\| e'_j \right\| = 1$$

Por lo que $e'_j \otimes e_i \in \mathcal{L}(c_0)$.

Proposición 3.2. *Sea $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base canónica de c_0. Entonces, cada $u \in \mathcal{L}(c_0)$ se puede escribir de forma única como*

$$u = \sum_{j,i} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i$$

donde para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0$$

Además,

$$\|u\| = \sup_{j,i} |\alpha_{ij}|$$

Demostración. Sea $u \in \mathcal{L}(c_0)$. Entonces, para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $u(e_j) \in c_0$. Luego, como $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de c_0, existen únicos $\alpha_{1j}, \alpha_{2j} \ldots \in \mathbb{K}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ tales que

$$u(e_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, e_i \quad \text{con} \quad \lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0$$

Se sigue de esto que,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j u(e_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, x_j\, e_i = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, e'_j(x) e_i \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i(x) \end{aligned}$$

Además,

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| \left\|e'_j \otimes e_i\right\| = \lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0 \;\; \forall j \in \mathbb{N}$$

Así,

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i$$

es una suma puntualmente convergente. Por otro lado, notemos que

$$\frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|} \leq \|u\| \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Ahora, para cada $x \in c_0$, se tiene

$$\|u(x)\| = \left\|\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j\, u(e_j)\right\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\; \|u(e_j)\| \leq \|x\| \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u(e_j)\|$$

por lo que

$$\|u\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u(e_j)\|$$

lo que muestra que

$$\|u\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u(e_j)\|$$

Finalmente

$$\|u\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u(e_j)\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_{ij}| \right\} = \sup_{j,i} |\alpha_{ij}|$$

$\square$

Observación 3.3. *Por la proposición anterior, sabemos que si $u \in \mathcal{L}(c_0)$, entonces u se puede escribir de forma única como una suma puntualmente convergente*

$$u = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i$$

en términos matriciales, lo anterior puede representarse como

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3j} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \end{pmatrix}$$

Proposición 3.3. *Sea $u \in \mathcal{L}(c_0)$, con $u = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i$. Entonces, las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

1. $u^2 = u$
2. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, *para todo $i, j \in \mathbb{N}$.*

Demostración.
1. $\Rightarrow$ 2. Basta probarlo para los elementos de la base canónica. En efecto, sea e_j un elemento de la base canónica. Entonces,

$$u(e_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, e_i = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}, \ldots)$$

lo que implica que,

$$
\begin{aligned}
u^2(e_j) &= u(u(e_j)) \\
&= u\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} e_i\right) \\
&= u(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}, \ldots) \\
&= \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1k} & \cdots \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2k} & \cdots \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3k} & \cdots \\
\vdots & & & \ddots & & \\
\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \cdots & \alpha_{ik} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \alpha_{3j} \\ \vdots \\ \alpha_{kj} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_{1k}\alpha_{kj} \\
\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_{2k}\alpha_{kj} \\
\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_{3k}\alpha_{kj} \\
\vdots \\
\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\alpha_{kj} \\
\vdots
\end{pmatrix} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\alpha_{kj}\right) e_i \,.
\end{aligned}
$$

Así,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\alpha_{kj}\right) e_i = u^2(e_j) = u(e_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} e_i$$

en vista de la unicidad,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\,\alpha_{kj} = \alpha_{ij}$$

2.$\Leftarrow$ 1. De la parte anterior, se sabe que

$$u^2(e_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\alpha_{kj}\right) e_i \quad \text{y que} \quad u(e_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, e_i$$

Así,

$$u^2(e_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\alpha_{kj}\right) e_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, e_i = u(e_j)$$

lo que muestra que $u^2 = u$. $\square$

Observación 3.4. *Sea e_k un elemento de la base canónica y u como en la Proposición 3.3 . Entonces,*

$$\begin{aligned}\langle e_k - u(e_k), u(e_k)\rangle &= \left\langle (0,\ldots,\underbrace{1}_{k\text{-ésimo}},0,\ldots) - (\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots),(\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots)\right\rangle \\ &= -\alpha_{1k}^2 - \ldots - \alpha_{(k-1)k}^2 + \alpha_{kk}(1-\alpha_{kk}) - \alpha_{(k+1)k}^2 - \ldots \\ &= \alpha_{kk} - \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2\end{aligned}$$

Así, u una proyección será normal si, y sólo si,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2 = \alpha_{kk}$$

Utilizando la Proposición 3.3 y la Observación 3.4 se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Sea $u = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i \in \mathcal{L}(c_0)$. Entonces, las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

1. *u es proyección normal.*
2. *Para cada $k \in \mathbb{N}$,*
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2 = \alpha_{kk}$$
y, para cada $i, k \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$$

Demostración. Por la Proposición 3.3, se tiene que u es proyección si, y sólo si,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\, \alpha_{jk} = \alpha_{ik} \qquad \forall\, i,k \in \mathbb{N}$$

Además, por la Observación 3.4, obtenemos que u es proyección normal si, y sólo si,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2 = \alpha_{kk}$$

lo que muestra el resultado. □

3.2. Operadores Adjuntos y Auto-Adjuntos

Definición 3.3. *Sean $u, v \in \mathcal{L}(c_0)$. Diremos que v es adjunto de u (con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$) si, para todo $x, y \in c_0$, se tiene que*

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$$

En tal caso, diremos que u admite un adjunto y que denotaremos por u^*. Si $u = u^*$ diremos que u es auto-adjunto.

Observación 3.5.

1. *El adjunto de u es único.*

2. *Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada $x, y \in c_0$, obtenemos $(\lambda u)^* = \lambda u^*$.*
En efecto, dados $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in c_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle (\lambda u)(x), y \rangle &= \langle \lambda u(x), y \rangle = \lambda \langle u(x), y \rangle \\ &= \lambda \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, \lambda u^*(y) \rangle \\ &= \langle x, (\lambda u^*)(y) \rangle \end{aligned}$$

y por la unicidad $(\lambda u)^* = \lambda u^*$.

3. $(uv)^* = v^* u^*$.
En efecto, dados $x, y \in c_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle (uv)(x), y \rangle &= \langle u(v(x)), y \rangle = \langle v(x), u^*(y) \rangle \\ &= \langle x, v^*(u^*(y)) \rangle = \langle x, v^* u^*(y) \rangle \end{aligned}$$

y por la unicidad $(uv)^* = v^* u^*$.

4. *No todo elemento $u \in \mathcal{L}(c_0)$ admite adjunto. Como contra-ejemplo, consideremos*

$$u = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \right) e_1$$

y supongamos que éste admite un adjunto u^*. Luego,

$$1 = \langle u(e_i), e_1 \rangle = \langle e_i, u^*(e_1) \rangle$$

cualquiera sea $i \in \mathbb{N}$. Como $(u^*(e_1)) = (y_i)$ debes er un elemento de c_0 y $\langle e_i, u^*(e_1) \rangle = y_i \to 0$, obtenemos una contradicción a lo anteior.

Teorema 3.2. *Si P es una proyección normal, entonces P es operador auto-adjunto. Reciprocamente, si P es un operador auto-adjunto y $P^2 = P$, entonces P es un proyección normal.*

Demostración. Supongamos que P es una proyección normal y sean $x, y \in c_0$. Luego, se tiene que $x - Px$, $y - Py \in N(P)$ y

$$\langle Px, y - Py \rangle = \langle Px - x, Py \rangle = 0\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle Px, y \rangle &= \langle Px, y - Py \rangle + \langle Px, Py \rangle = \langle Px, Py \rangle \\ &= \langle Px - x, Py \rangle + \langle x, Py \rangle \\ &= \langle x, Py \rangle \end{aligned}$$

Reciprocamente, supongamos P un operador auto-adjunto y $P^2 = P$, y sean $x \in N(P)$ e $y \in R(P)$. Luego, existe $z \in c_0$ tal que $y = Pz$. Así,

$$\langle x, y \rangle = \langle x, Pz \rangle = \langle Px, z \rangle = 0$$

lo que muestra el resultado. $\square$

Teorema 3.3. *Sea* $u = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i \in \mathcal{L}(c_0)$*. Entonces, u admite un único operador adjunto si, y sólo si,*

$$\lim_{j\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0 \ \ \forall\, i \geq 0$$

Bajo esta condición, se tiene

$$u^* = \sum_{i,j} \alpha_{ji}\, e'_j \otimes e_i$$

Demostración. Sean $u, v \in \mathcal{L}(c_0)$. Por la Proposición 3.2, u y v se escriben de forma única como,

$$u = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i \ \ \text{y} \ \ v = \sum_{i,j} \beta_{ij}\, e'_j \otimes e_i$$

con

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0 \ \ \text{y} \ \ \lim_{i\to\infty} |\beta_{ij}| = 0$$

Luego, v es un adjunto de u si y sólo si

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle \qquad \forall x, y \in c_0$$

Entonces, si consideramos la base ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0, obtendremos que

$$\begin{aligned} \alpha_{ji} &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ki}\, e_k, e_j \right\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle \\ &= \langle e_i, v(e_j)\rangle = \left\langle e_i, \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_{kj}\, e_k \right\rangle \\ &= \beta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Además,

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_{ji}| = \lim_{i\to\infty} |\beta_{ij}| = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, v se puede escribir como

$$v = \sum_{i,j} \alpha_{ji}\, e'_j \otimes e_i$$

□

Observación 3.6. *Por la proposición anterior, sabemos que si* $u \in \mathcal{L}(c_0)$*, entonces* $u = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i$ *admite un adjunto si, y sólo si,*

$$\lim_{j\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

en términos matriciales, lo anterior nos dice que

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \to 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \to 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3j} & \dots & \to 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \to 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Observación 3.7. *Sea $f(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$ un funcional de Riesz, donde $y = (y_n) \in c_0$, $y \neq 0$. Notemos que $f(e_i) = y_i$, $\langle y, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle e_i, y \rangle^2 \in \mathbb{K}$. El operador lineal u definido como*

$$u = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

es continuo, su nucleo es igual $N(f)$, y su adjunta es

$$u^* = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ y_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ y_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ y_4 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Proposición 3.5. *Si f y u están definidos como en la observación anterior, entonces*

$$P = \frac{1}{\langle y, y \rangle} u^* \circ u$$

es un proyección normal y $N(P) = N(u) = N(f)$.

Demostración.

$$P^* = \left(\frac{1}{\langle y, y \rangle} u^* \circ u \right)^* = \frac{1}{\langle y, y \rangle} (u^* \circ u)^* = \frac{1}{\langle y, y \rangle} u^* \circ (u^*)^* = \frac{1}{\langle y, y \rangle} u^* \circ u = P$$

Lo que muestra que P es un operador auto-adjunto. Ahora, la matriz asociada a P es la siguiente:

$$P = \frac{1}{\langle y, y \rangle} \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_1 y_3 & y_1 y_4 & \cdots \\ y_1 y_2 & y_2^2 & y_2 y_3 & y_2 y_4 & \cdots \\ y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_3^2 & y_3 y_4 & \cdots \\ y_1 y_4 & y_2 y_4 & y_3 y_4 & y_4^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Para probar que P es proyección normal, por la Proposición 3.4, basta mostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\alpha_{kj} = \alpha_{ij}\ , \quad \forall i,j \in \mathbb{N}$$

y

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2 = \alpha_{kk}\ , \quad k \in \mathbb{N}$$

donde

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\langle y,y\rangle}\, y_i y_j$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} \alpha_{ik}\alpha_{kj} &= \frac{1}{\langle y,y\rangle^2}\sum_{k\geq 1}(y_i y_k)(y_k y_j) = \frac{y_i y_j}{\langle y,y\rangle^2}\sum_{k\geq 1} y_k^2 \\
&= \frac{y_i y_j}{\langle y,y\rangle^2}\langle y,y\rangle = \frac{y_i y_j}{\langle y,y\rangle} = \alpha_{ij}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1} \alpha_{ik}^2 &= \frac{1}{\langle y,y\rangle^2}\sum_{i\geq 1}(y_i y_k)^2 = \frac{y_k^2}{\langle y,y\rangle^2}\sum_{i\geq 1} y_i^2 \\
&= \frac{y_k^2}{\langle y,y\rangle^2}\langle y,y\rangle = \frac{y_k^2}{\langle y,y\rangle} = \alpha_{kk}
\end{aligned}$$

□

Observación 3.8.

1. *Notemos que,*

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{1}{\langle y,y\rangle}\begin{pmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & y_1y_3 & y_1y_4 & \cdots \\ y_1y_2 & y_2^2 & y_2y_3 & y_2y_4 & \cdots \\ y_1y_3 & y_2y_3 & y_3^2 & y_3y_4 & \cdots \\ y_1y_4 & y_2y_4 & y_3y_4 & y_4^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\langle y,y\rangle}\begin{pmatrix} y_1x_1y_1 + y_1x_2y_2 + y_1x_3y_3 + y_1x_4y_4 + \cdots \\ y_2x_1y_1 + y_2x_2y_2 + y_2x_3y_3 + y_2x_4y_4 + \cdots \\ y_3x_1y_1 + y_3x_2y_2 + y_3x_3y_3 + y_3x_4y_4 + \cdots \\ y_4x_1y_1 + y_4x_2y_2 + y_4x_3y_3 + y_4x_4y_4 + \cdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\langle y,y\rangle}\begin{pmatrix} y_1\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}} x_iy_i \\ y_2\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}} x_iy_i \\ y_3\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}} x_iy_i \\ y_4\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}} x_iy_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{\langle y,y\rangle}\begin{pmatrix} y_1\cdot\langle x,y\rangle \\ y_2\cdot\langle x,y\rangle \\ y_3\cdot\langle x,y\rangle \\ y_4\cdot\langle x,y\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\, y$$

Además,

$$\|P(x)\| = \left\| \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y \right\| = \left| \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \right| \, \|y\| = \frac{|\langle x,y\rangle|}{|\langle y,y\rangle|}\, \|y\| = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|} \leq \frac{\|x\|\,\|y\|}{\|y\|} = \|x\|$$

por lo que

$$\|P\| \leq 1$$

Por otro lado, sea $a \in \mathbb{K}$ tal que $|a| = \|y\|$. Entonces,

$$1 = \frac{1}{\|y\|}\frac{|\langle y,y\rangle|}{|\langle y,y\rangle|}\,\|y\| = \frac{\left|\left\langle a^{-1}\, y, y\right\rangle\right|}{|\langle y,y\rangle|}\,\|y\| \leq \|P\|$$

Luego, P es proyección normal con $\|P\| = 1$.

2. *Generalizando el punto anterior, consideremos $\{y^1, y^2, \ldots, y^n\} \subset c_0$ tal que $\left\langle y^i, y^j\right\rangle = 0$ si $i \neq j$. Entonces, el operador*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left\langle x, y^i\right\rangle}{\langle y^i, y^i\rangle}\, y^i$$

define una proyección normal con $\|P\| = 1$. En efecto, notemos que

$$P(y^j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left\langle y^j, y^i\right\rangle}{\langle y^i, y^i\rangle}\, y^i = \begin{cases} y^i & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P^2(x) &= P(P(x)) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\left\langle x, y^i\right\rangle}{\langle y^i, y^i\rangle}\, y^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left\langle x, y^i\right\rangle}{\langle y^i, y^i\rangle}\, P(y^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left\langle x, y^i\right\rangle}{\langle y^i, y^i\rangle}\, y^i = P(x) \end{aligned}$$

Notar, por lo anteior, que cada $P_i(x) = \dfrac{\left\langle x, y^i\right\rangle}{\langle y^i, y^i\rangle} y^i$ define un operador auto-adjunto y así se tiene,

$$\begin{aligned} \langle P(x), y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} P_i(x), y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_i(x), y\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, P_i(y)\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} P_i(y) \right\rangle \\ &= \langle x, P(y)\rangle \end{aligned}$$

es decir, P es un operador auto-adjunto. Además,

$$\begin{aligned}\|P(x)\| &= \text{máx}\left\{\frac{|\langle x, y^i\rangle|}{|\langle y^i, y^i\rangle|}\,\|y^i\| : i = 1, 2, \ldots, n\right\}\\ &\leq \text{máx}\left\{\frac{\|x\|\,\|y^i\|}{\|y^i\|^2}\,\|y^i\| : i = 1, 2, \ldots, n\right\} = \|x\|\\ \Rightarrow \|P\| &\leq 1\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $a_i \in \mathbb{K}$ tal que $|a_i| = \|y^i\|$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego,

$$1 = \frac{1}{\|y^i\|}\frac{|\langle y^i, y^i\rangle|}{|\langle y^i, y^i\rangle|}\,\|y^i\| = \frac{|\langle a_i^{-1}\, y^i, y^i\rangle|}{|\langle y^i, y^i\rangle|}\,\|y^i\| \leq \|P\|$$

Así, P es proyección normal con $\|P\| = 1$.

El siguiente teorema presenta una generalización del punto 2 de la observación anterior.

Teorema 3.4. *Sea $\{y^1, y^2, \ldots\}$ una sucesión ortonormal con la propiedad de Riemann-Lebesgue. Entonces, $P : c_0 \to c_0$ es una proyección normal con $R(P) = \overline{[\{y^1, y^2, \ldots\}]}$ si, y sólo si,*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, y^i\rangle}{\langle y^i, y^i\rangle}\, y^i$$

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que $P : c_0 \to c_0$ es una proyección normal con $R(P) = \overline{[\{y^1, y^2, \ldots\}]}$. Entonces, dado $x \in c_0$, se tiene que $P(x) \in R(P)$. Luego, existen $\alpha_i \in c_0'$, $i \in \mathbb{N}$, tales que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)\, y^i\,.$$

Luego, del hecho que,

$$\begin{aligned}\langle x, y^j\rangle &= \langle x, Py^j\rangle = \langle Px, y^j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) y^i, y^j\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)\,\langle y^i, y^j\rangle = \alpha_j(x)\,\langle y^j, y^j\rangle\end{aligned}$$

se concluye que

$$\alpha_j(x) = \frac{\langle x, y^j\rangle}{\langle y^j, y^j\rangle}\,,$$

es decir α_i es un funcinal de Riesz. Ahora, definamos

$$P_i(x) = \frac{\langle x, y^i \rangle}{\langle y^i, y^i \rangle}\, y^i$$

y notemos que, como $\{y^1, y^2, \ldots\}$ una sucesión ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue, se tiene

$$\lim_{i\to\infty} P_i(x) = \lim_{\to\infty} \frac{\langle x, y^i \rangle}{\langle y^i, y^i \rangle}\, y^i = 0$$

por lo que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, y^i \rangle}{\langle y^i, y^i \rangle}\, y^i$$

lo cual muestra el resultado.

$\Leftarrow]$ Si

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, y^i \rangle}{\langle y^i, y^i \rangle}\, y^i$$

entonces

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, y^i \rangle}{\langle y^i, y^i \rangle}\, y^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, y^i \rangle}{\langle y^i, y^i \rangle}\, y^i \in \overline{[\{y^1, y^2, \ldots\}]} = R(P)$$

Por otro lado, notemos cada $P_i(x) = \dfrac{\langle x, y^i \rangle}{\langle y^i, y^i \rangle}\, y^i$ define un operador auto-adjunto, además

$$P_i(y^j) = \begin{cases} y^i & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

por lo que $P_i^2 = P_i$. Luego,

$$P^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P_i^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P_i = P$$

y así, P es una proyección normal.

$\square$

3.3. Operadores Compactos

Definición 3.4. *Sean E y F espacios de Banach sobre el campo $\mathbb{K}$. Una transformación lineal $T : E \to F$ se dirá compacta si $T(B_E)$ es compactoide.*

Al igual que el caso clásico, tenemos el siguiente resultado, probado en [3, pág. 142], para operadores compactos en espacios no-arquimedeanos.

Teorema 3.5. *Sean E e F espacios de Banach sobre el campo $\mathbb{K}$ y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Entonces, T es compacto si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$, existe $S \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que $S(E)$ es de dimensión finita y*

$$\|T - S\| \leq \epsilon$$

El siguiente teorema nos muestra cómo construir operadores compactos en c_0, considerando sucesiones ortonormales.

Teorema 3.6. *Sea (λ_i) un elemento de c_0 y sea $\{y_1, y_2, \ldots\}$ una sucesión ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue. Entonces, $T : c_0 \to c_0$ definido por*

$$T(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i(\cdot)\,,$$

donde

$$P_i(\cdot) = \frac{\langle\,\cdot, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i\,,$$

es un operador compacto y auto-adjunto.

Demostración. Notemos que si (λ_i) un elemento de c_0, entonces $\|\lambda_i\, P_i\| \to 0$ cuando $i \to \infty$, por tanto T está bien definida. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\left\| Tx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(x) \right\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i P_i(x) \right\| \leq \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i \right\| \\
&\leq \max\left\{ |\lambda_i| \left| \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \right| \|y_i\| \,:\, i = n+1, n+2, \ldots \right\} \\
&\leq \max\{ |\lambda_i|\, \|x\| \,:\, i = n+1, n+2, \ldots\} \\
&= \|x\| \max\{ |\lambda_i| \,:\, i = n+1, n+2, \ldots\}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left\| T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \right\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(x)\|}{\|x\|} \\
&\leq \max\{ |\lambda_i| \,:\, i = n+1, n+2, \ldots\} \to 0
\end{aligned}$$

Como cada P_i tiene rango finito y la convergencia es uniforme, T se convierte en un operador compacto gracias al Teorema 3.5 $\square$

Observación 3.9. *No todo operador compacto es una proyección normal. En efecto, consideremos el operador M_a, con $a = (a_i) \in c_0$ y cuya matriz asociada $[M_a]$ es:*

$$[M_a] = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Así,

$$M_a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P_i\,, \text{ donde } P_i x = \frac{\langle x, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} e_i = \langle x, e_i\rangle\, e_i$$

es un operador compacto (Teorema 3.5) y auto-adjunto, pero no es proyección normal ya que $M_a^2(e_i) = a_i^2 e_i \neq a_i e_i = M_a(e_i)$ *(Proposición 3.4).*

Ahora, sea T un operador compacto y auto-adjunto. La pregunta natural que surge es ¿ existen $(\lambda_i) \in c_0$ y una sucesión de proyecciones normales (P_i) tales que $T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$?

La respuesta es afirmativa y comenzaremos el estudio con aquellos operadores compactos y auto-adjuntos de rango finito.

Teorema 3.7. *Sea $T : c_0 \to c_0$ un operador compacto y auto-adjunto con $R(T) = [\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}]$, donde $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es una sucesión ortonormal. Entonces, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que*

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, P_i\,,$$

donde

$$P_i = \frac{\langle \cdot, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i\,.$$

Demostración. Notar que, para cada $x \in c_0$, $T(x)$ es una combinación lineal de la forma

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, y_i\,,$$

donde $\alpha_i \in c_0'$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, puesto que T un operador continuo. Así, como T es un operador auto-adjunto se tiene

$$\begin{aligned} \langle x, Ty_j\rangle &= \langle Tx, y_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i, y_j \right\rangle \\ &= \alpha_j(x)\,\langle y_j, y_j\rangle \end{aligned}$$

Luego,

$$\alpha_j(x) = \frac{\langle x, Ty_j\rangle}{\langle y_j, y_j\rangle}$$

y por tanto, cada α_i es un funcional de Riesz y

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, Ty_j\rangle}{\langle y_j, y_j\rangle} y_i$$

Ahora, para $x \in c_0$, x fijo, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones con incógnitas λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, Ty_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\langle x, Ty_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} - \lambda_i \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \right] y_i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\langle y_i, y_i\rangle} \left[\langle x, Ty_i\rangle - \lambda_i \langle x, y_i\rangle\right] y_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, Ty_i - \lambda_i y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i = 0 \end{aligned}$$

Como $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene

$$\langle x, Ty_i - \lambda_i y_i\rangle = 0$$

Como x fue elegido de forma arbitraria, se concluye $\langle x, Ty_i - \lambda_i y_i\rangle = 0$ para todo $x \in c_0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} Ty_i - \lambda_i y_i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad Ty_i = \lambda_i y_i \\ &\Leftrightarrow \quad \langle y_i, Ty_i\rangle = \lambda_i \langle y_i, y_i\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_i = \frac{\langle y_i, Ty_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \end{aligned}$$

Así,

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, Ty_j\rangle}{\langle y_j, y_j\rangle} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle y_i, Ty_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(x)$$

con

$$\lambda_i = \frac{\langle y_i, Ty_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \quad \text{y} \quad P_i(x) = \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i$$

$\square$

A continuación, generalizaremos el teorema anterior para operadores compactos y auto-adjuntos de rango infinito.

Teorema 3.8. *Si $T : c_0 \to c_0$ es un operador compacto y auto-adjunto, entonces existe $a = (\lambda_n) \in c_0$ y una sucesión ortonormal $\{y_1, y_2, \ldots\}$ tal que*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

donde

$$P_n = \frac{\langle \cdot, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle} y_n$$

es la proyección normal definida por y_n

Demostración. Como T es un operador compacto, se tiene $X = T(B)$ es compactoide, donde B es la bola unitaria en c_0. Además, cada subespacio uno-dimensional de c_0 admite un complemento normal (Corolario 2.6). Por otro lado, como $X = T(B)$ es absolutamente convexo, compactoide y acotado, toda sucesión ortogonal en X converge a 0 (Teorema 1.12).
Ahora, construiremos una sucesión ortonormal (y_n) en X tal que $X \subset \overline{co}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. En efecto, supongamos que la valuación de $\mathbb{K}$ es densa y sea $\pi \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\pi| < 1$. Escogemos $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{K}$ y $v_1, v_2, \ldots \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} |\beta|^2 &< |\pi|^{-1} \\ 1 &< v_n < |\alpha_n| \ ; \ |\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n| < |\beta| \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Se define $P_0 = Id_{c_0}$ y se escoge $a_1 \in P_0(X) = X$ tal que

$$\|a_1\| \geq v_1^{-1} \sup_{x \in X} \|P_0 x\| = v_1^{-1} \sup_{x \in X} \|x\|$$

El subespacio $[\{a_1\}]$ admite un complemento normal $[\{a_1\}]^p$. Se define la proyección $Q_0 : c_0 \to c_0$ como

$$Q_0(x) = \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1$$

la cual resulta ser una proyección normal (Observación 3.8).
El operador $P_1 = P_0 - Q_0 : c_0 \to c_0$ es también una proyección normal (Corolario 3.1) cuyo rango es $[\{a_1\}]^p$. Esta proyección normal es definida por

$$P_1 x = x - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1$$

y satisface las siguientes propiedades

$$\|P_1\| \leq 1 \ ; \ \ P_1 P_0 = P_1 \ ; \ \text{ y } P_0 - P_1 \text{ es una proyección normal}$$

El siguiente paso es escoger $a_2 \in P_1(X)$ tal que

$$\|a_2\| \geq v_2^{-1} \sup_{x \in X} \|P_1 x\|$$

Como $P_1(X) \subset R(P_1) = [\{a_1\}]^p$, tenemos que $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$. Una vez más, como antes, se define la proyección normal $Q_1 : c_0 \to c_0$ por

$$Q_1(x) = \frac{\langle x, a_2 \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} a_2$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Q_1 P_1(x) &= Q_1 \left(x - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 \right) \\ &= Q_1(x) - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} Q_1(a_1) = Q_1(x) \end{aligned}$$

Se define $P_2 = P_1 - Q_1$, y notemos que satisface

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (P_1 - Q_1)(x) \\ &= P_1(x) - Q_1(x) \\ &= \left(x - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 \right) - \frac{\langle x, a_2 \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} a_2 \\ &= x - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 - \frac{\langle x, a_2 \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} a_2 \end{aligned}$$

la cual es una proyección normal (Observación 3.8) y por tanto $\|P_2\| \leq 1$. Además,

$$P_2 P_1 = (P_1 - Q_1) P_1 = P_1^2 - Q_1 P_1 = P_1 - Q_1 = P_2$$

Resumiendo,

$$\begin{aligned} P_2 P_0 &= P_2\,;\;\; P_2 P_1 = P_2\,;\;\; P_2 P_2 = P_2 \\ P_1 - P_2 &= Q_1 \text{ es proyección normal} \\ \text{y } R(P_2) &= [\{a_1, a_2\}]^p \end{aligned}$$

Siguiendo con el proceso, escogemos $a_3 \in P_2(X)$ tal que

$$\|a_3\| \geq v_3^{-1} \sup_{x \in X} \|P_2 x\|$$

Otra vez, ya que $a_3 \in P_2(X) \subset R(P_2) = [\{a_1, a_2\}]^p$ tenemos que $\langle a_3, a_2 \rangle = \langle a_3, a_1 \rangle = 0$.
Se define la proyección normal $Q_2 : c_0 \to c_0$ como

$$Q_2(x) = \frac{\langle x, a_3 \rangle}{\langle a_3, a_3 \rangle} a_3$$

Como se hizo anteriormente

$$\begin{aligned} Q_2 P_2(x) &= Q_2 \left(x - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 - \frac{\langle x, a_2 \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} a_2 \right) \\ &= Q_2(x) - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} Q_2(a_1) - \frac{\langle x, a_2 \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} Q_2(a_2) = Q_2(x) \end{aligned}$$

y el operador

$$P_3 = P_2 - Q_2$$

es tal que

$$\begin{aligned} P_3(x) &= (P_2 - Q_2)(x) \\ &= P_2(x) - Q_2(x) \\ &= \left(x - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 - \frac{\langle x, a_2 \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} a_2 \right) - \frac{\langle x, a_3 \rangle}{\langle a_3, a_3 \rangle} a_3 \\ &= x - \frac{\langle x, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 - \frac{\langle x, a_2 \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} a_2 - \frac{\langle x, a_3 \rangle}{\langle a_3, a_3 \rangle} a_3 \end{aligned}$$

el cual resulta ser una proyección normal (Observación 3.8).
Procediendo inductivamente, escogemos una sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ tal que $\langle a_i, a_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, y obtenemos una sucesión $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de proyecciones normales en $\mathcal{L}(c_0)$ tal que

$$\begin{aligned} a_n &\in P_{n-1}(X), \;\; \|a_n\| \geq v_n^{-1} \sup_{x\in X} \|P_{n-1}x\| \\ P_{n-1} - P_n &= Q_{n-1} \text{ es una proyección normal} \\ P_n P_i &= P_n\,; \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Es claro que $P_n(c_0) \subset P_{n-1}(c_0)$, ya que $[\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}] \subset [\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}]$ lo cual es equivalente a $[\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}]^p \subset [\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}]^p$.
También notemos que si $i > n$, entonces $a_i \in P_{i-1}(c_0) \subset P_n(c_0)$ y $P_n(a_i) = a_i$.
Por otro lado, si $i \leq n$, entonces

$$P_n(a_i) = a_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle a_i, a_j\rangle}{\langle a_j, a_j\rangle} a_j = 0$$

Así,

$$Q_{n-1}(a_i) = (P_{n-1} - P_n)(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq n \\ a_n & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$

Tambien, notemos que $Q_{n-1}\, P_{n-1} = Q_{n-1}$. En efecto,

$$\begin{aligned} Q_{n-1}\, P_{n-1}(x) &= Q_{n-1}(P_{n-1}(x)) \\ &= Q_{n-1}\left(x - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle x, a_j\rangle}{\langle a_j, a_j\rangle} a_j \right) \\ &= Q_{n-1}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle x, a_j\rangle}{\langle a_j, a_j\rangle} Q_{n-1}(a_j) = Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

ya que $Q_{n-1}(a_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.
Ahora, para cada $x \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = \frac{\langle x, a_n\rangle}{\langle a_n, a_n\rangle} \in \mathbb{K}$ es tal que $Q_{n-1}(x) = \lambda\, a_n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\lambda|\, \|a_n\| &= \|\lambda a_n\| = \|Q_{n-1}(x)\| = \|Q_{n-1}\, P_{n-1}(x)\| \\ &\leq \|Q_{n-1}\|\, \|P_{n-1}(x)\| \leq \|P_{n-1}(x)\| \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} |\lambda|\, \|a_n\| &\leq \|P_{n-1}(x)\| \leq \sup_{x\in X} \|P_{n-1}(x)\| \leq v_n\, \|a_n\| \\ &\Rightarrow \;\; |\lambda| \leq v_n < |\alpha_n| \;\Rightarrow\; \left|\frac{\lambda}{\alpha_n}\right| < 1 \\ &\Rightarrow \;\; Q_n(x) = \lambda a_n = \alpha_n \left(\frac{\lambda}{\alpha_n}\right) a_n \in \alpha_n B_{\mathbb{K}} a_n \end{aligned}$$

Esto dice que

$$\begin{aligned} P_n(X) &\subset P_{n-1}(X) - Q_n(X) \subset P_{n-1}(X) - \alpha_n P_{n-1}(X) \\ &= (1-\alpha_n)P_{n-1}(X) \\ &\subset \alpha_n P_{n-1}(X) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} P_n(X) &\subset \alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1 P_0(X) \\ &= (\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1)X \subset \beta X, \text{ ya que } |\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n| < |\beta| \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Así, $\{a_1, a_2, \ldots\} \subset \beta X$. Como $\{a_1, a_2, \ldots\}$ es una sucesión ortonormal (lo que implica que es ortogonal) de un conjunto compactoide βX, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (Teorema 1.12). Si se define $y_n = \beta a_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0\,; \ \ y_n \in \beta^2 X \subset \pi^{-1} X\,; \text{ y } \langle y_i, y_j\rangle = 0 \text{ para } i \neq j,$$

Se afirma que $X \subset \overline{co}\{y_1, y_2, \ldots\}$. En efecto, sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} \|P_n(x)\| &\leq \sup_{\tilde{x}\in X} \|P_n(\tilde{x})\| \leq v_n \|a_n\| \\ &\leq |\alpha_n|\,\|a_n\| < \beta\,\|a_n\| \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$$

De esto

$$x = P_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(P_{n-1}(x) - P_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-1}(x)$$

y ya que

$$Q_{n-1}(x) \in \alpha_n B_{\mathbb{K}} a_n = \frac{\alpha_n}{\beta} B_{\mathbb{K}} \beta a_n = \frac{\alpha_n}{\beta} B_{\mathbb{K}} y_n \subset \overline{co}\{y_1, y_2, \ldots\}$$

se prueba que $x \in \overline{co}\{y_1, y_2, \ldots\}$, esto es,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x) y_n, \ \ |\eta_n(x)| \leq 1$$

Ahora, sabemos que para todo $u = (u_n) \in c_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|u\| = |u_n|$; escogemos $n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \|u\| = |u_n|\}$. De la linealidad de T, obtenemos

$$\begin{aligned} T(u) &= \omega_u T\left(\frac{1}{\omega_u} u\right) = \omega_u \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n y_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_u \eta_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u) y_n \end{aligned}$$

donde $|\omega_u| = |u_{n_0}| = \|u\|$. Notemos que cada g_n es un funcional lineal continuo y $|g_n| \leq 1$.
Por la ortogonalidad de $\{y_1, y_2, \ldots\}$ respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tenemos que

$$\langle Tx, y_i \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) y_n, y_i \right\rangle = g_i(x) \langle y_i, y_i \rangle$$

y, como T es auto-adjunto, tenemos que

$$g_i(x) = \frac{\langle Tx, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} = \frac{\langle x, Ty_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle}$$

Esta expresión nos dice que cada g_i es un funcional de Riesz y

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, Ty_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n$$

Por otro lado, si definimos

$$T_N x = \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle x, Ty_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|Tx - T_N x\| &= \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\langle x, Ty_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i \right\| \\
&= \text{máx}\left\{ \left| \frac{\langle x, Ty_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} \right| \|y_i\| \,:\, i = N+1, N+2, \ldots \right\} \quad (\{y_1, y_2, \ldots\} \text{ es ortogonal}) \\
&\leq \text{máx}\{\|x\| \, \|g_i\| \, \|y_i\| \,:\, i = N+1, N+2, \ldots\} \\
&\leq \|x\| \, \text{máx}\{\|y_i\| \,:\, i = N+1, N+2, \ldots\}
\end{aligned}$$

De esto, obtenemos que

$$\|T - T_N\| = \sup \frac{\|Tx - T_N x\|}{\|x\|} \leq \text{máx}\{\|y_i\| \,:\, i = N+1, N+2, \ldots\} \to 0$$

esto es,

$$T = \lim_{n \to \infty} T_n \Leftrightarrow T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, Ty_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n$$

y la convergencia es uniforme.
Ahora, para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in c_0$, ambos fijos, definimos el siguiente sistema de ecuaciones para incógnitas λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$T_n x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, Ty_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\langle x, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i \quad (*)$$

Analicemos la existencia de soluciones del sistema:

$$\begin{aligned}(*) \quad \Longrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\langle x, Ty_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} - \lambda_i \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle}\right) y_i = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\langle y_i, y_i\rangle}(\langle x, Ty_i\rangle - \lambda_i \langle x, y_i\rangle) y_i = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\langle y_i, y_i\rangle}(\langle x, Ty_i - \lambda_i y_i\rangle) y_i = 0\end{aligned}$$

Ahora, como $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es linealmente independiente, se concluye que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\langle x, Ty_i - \lambda_i y_i\rangle = 0$$

Ahora, como x fue elegido de forma arbitraria, se tiene que $\langle x, Ty_i - \lambda_i y_i\rangle = 0$ para todo $x \in c_0$, lo cual implica

$$Ty_i - \lambda_i y_i = 0 \Leftrightarrow Ty_i = \lambda_i y_i$$

y entonces

$$\langle Ty_i, y_i\rangle = \lambda_i \langle y_i, y_i\rangle \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\langle Ty_i, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle}$$

Así,

$$T_n x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, Ty_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle Ty_i, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(x)$$

con

$$\lambda_i = \frac{\langle y_i, Ty_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \quad \text{y} \quad P_i(x) = \frac{\langle x, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i$$

$\square$

Capítulo 4

El Espacio E_ω

En este capítulo mostraremos algunas generalizaciones de los resultados obtenidos en el capítulo 2. Comenzaremos definiendo el espacio E_ω.

Sea $\mathbb{K}$ un campo completo con respecto a una valuación no arquimedeana y sea $\omega = (\omega_i)_{i\geq 0}$ una familia de elementos no nulos de $\mathbb{K}$. Entonces, denotaremos por E_ω al espacio

$$c_0\left(\mathbb{N}, \mathbb{K}, \left(|\omega_i|^{1/2}\right)_{i\geq 0}\right) = \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}/x = \sum_{i\in I} x_i\, e_i : \lim_{i\to\infty} |x_i|\, |\omega_i|^{1/2} = 0\right\}$$

Observación 4.1. *Notemos que* $\ell^\infty(X : s)$ *es un espacio de Banach bajo la norma*

$$\|f\|_s = \sup\{|f(x)|\; s(x) : x \in X\},$$

donde $s : X \to (0, +\infty)$ *es una función* (ver *[3]*, *Ejemplo 3.H, p. 49*)*. Además,* $c_0(X : s)$ *es un subespacio cerrado de* $\ell^\infty(X : s)$*. Luego, considerando* $X = \mathbb{N}$ *y* $s : \mathbb{N} \to (0, +\infty)$, $i \mapsto |\omega_i|^{1/2}$, *entonces* $E_\omega = c_0(\mathbb{N} : s)$, *es decir,* E_ω *es un espacio de Banach.*

Observación 4.2. *Notar que* $\|e_i\|_\omega = |\omega_i|^{1/2}$, *donde* $e_i = (\delta_{ij})_{j\geq 0}$, *con* δ_{ij} *delta de Kronecker.*

Para $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in E_\omega$, e $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i \in E_\omega$, la forma

$$\langle x, y\rangle_\omega = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i\, w_i$$

resulta ser una forma bilineal simétrica.

Observación 4.3. *Notemos que, dados $x, y \in E_\omega$*

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle_\omega| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\, \omega_i\right| &\leq \max_{i\in\mathbb{N}} |x_i|\,|y_i|\,|\omega_i| \\ &= \max_{i\in\mathbb{N}} |x_i|\;|\omega_i|^{1/2}\;|y_i|\;|\omega_i|^{1/2} \\ &\leq \|x\|_\omega\;\|y\|_\omega \end{aligned}$$

De aquí en adelante, supondremos que para cada ω_i existe $\mu_i \in \mathbb{K}$, tal que $\omega_i = \mu_i^2$, $i \in \mathbb{N}$. Un ejemplo de un campo no-arquimedeano que cumple con la condición anterior es el campo $\mathcal{R}$ de Levi-Civita (Ver [6]).

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 2.5

Teorema 4.1. *La forma bilineal simétrica, definida anteriormente, es un producto interior no-arquimedeano sobre E_ω la cual induce la norma original del espacio si, y sólo si, el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. En este caso,*

$$|\langle x, x\rangle_\omega| = \|x\|_\omega^2 = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \omega_i\right|$$

Demostración.

$\Leftarrow]$ Supongamos que el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Como $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ es una forma bilineal simétrica, basta mostrar que ésta induce la norma original del espacio. En efecto, consideremos $\pi_\omega(x) = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, y recordemos que $\omega_i = \mu_i^2$, para cada $i \in \mathbb{N}$. De esto se tiene que $|x_i\,\mu_i| = |x_i|\;|\omega_i|^{1/2} = \|x\|_\omega$, para $i \in \pi_\omega(x)$, y $|x_i\,\mu_i| = |x_i|\;|\omega_i|^{1/2} < \|x\|_\omega$, para $i \neq \pi_\omega(x)$. Además,

$$\left|\sum_{i\notin\pi_\omega(x)} x_i^2\,\mu_i^2\right| = \left|\sum_{i\notin\pi_\omega(x)} x_i^2\,\omega_i\right| \leq \max\left\{\left|x_i^2\right|\;|\omega_i| : i \notin \pi_\omega(x)\right\} < \|x\|_\omega^2$$

Ahora, como $\{x_{i_1}\,\mu_{i_1}, x_{i_2}\,\mu_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\,\mu_{i_n}\}$ es un conjunto finito de $\mathbb{K}$, podemos utilizar el Teorema 2.1 para obtener

$$\left|\sum_{i\in\pi_\omega(x)} x_i^2\,\mu_i^2\right| = \left|\sum_{i\in\pi_\omega(x)} x_i^2\,\omega_i\right| = \|x\|_\omega^2$$

Así,

$$|\langle x, y\rangle_\omega| \leq \|x\|_\omega\;\|y\|_\omega = \|x\|\;\|y\|$$

lo cual muestra que $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ es un producto interior que induce la norma de E_ω, donde $\|\cdot\| = |\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega|^{1/2}$.

$\Rightarrow\rfloor$ Ahora, supongamos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ es un producto interior que induce la norma original del espacio E_ω. Mostremos que el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. En efecto, sea $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}\subset\mathbb{K}$ y consideremos el conjunto finito $\{\lambda_1\,\mu_1^{-1},\ldots,\lambda_n\,\mu_n^{-1}\}\subset\mathbb{K}$. Además, definamos $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in E_\omega$ como

$$x_i=\begin{cases}\lambda_i\,\mu_i^{-1} & ,\quad i\leq n\\ 0 & ,\quad i>n\end{cases}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2\right| &= \left|(x_1\,\mu_1)^2+\cdots+(x_n\,\mu_n)^2\right|\\ &= \left|x_1^2\,\omega_1+\cdots+x_n^2\,\omega_n\right|\\ &= \left|\langle x,x\rangle_\omega\right|\\ &= \text{máx}\{|\lambda_i|^2\left|\mu_i^{-1}\right|^2|\omega_i| : i=1,2,\ldots,n\}\\ &= \text{máx}\{|\lambda_i|^2\left|\mu_i^{-1}\right|^2|\mu_i|^2 : i=1,2,\ldots,n\}\\ &= \text{máx}\{|\lambda_i|^2 : i=1,2,\ldots,n\}\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 2.1, se sigue que el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real.

□

Notemos que si $\omega_i=1$ para todo $i\in\mathbb{N}$, entonces el producto interior no-arquimedeano resulta el producto interior trabajado en el capítulo 2.

Corolario 4.1. *Si el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real, entonces*

1. *para toda colección finita $\{a_i\in\mathbb{K} : |a_i|\,|\omega_i|^{1/2}=c\}$, se tiene*

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i^2\omega_i\right|=c^2$$

2. *para todo $x,y\in E_\omega$,*

$$\left|\langle x,x\rangle_\omega+\langle y,y\rangle_\omega\right|=\text{máx}\{\left|\langle x,x\rangle_\omega\right|,\left|\langle y,y\rangle_\omega\right|\}.$$

Demostración.

1. Para $t_1,t_2,\ldots,t_n\in\mathbb{N}$ se define $x_{t_i}=a_i$ y $x_t=0$ para otros casos. Así,

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i^2\,\omega_i\right|=\left|\sum_{i=1}^\infty x_{t_i}^2\,\omega_i\right|=\text{máx}\{|x_t|^2\,|\omega_i| : t\in I\}=c^2$$

2. Si $|\langle x,x\rangle_\omega| \neq |\langle y,y\rangle_\omega|$, entonces el resultado se obtiene directo de la desigualdad triangular fuerte. Supongamos por un momento que $|\langle x,x\rangle_\omega| = \|x\|_\omega^2 = \|y\|_\omega^2 = |\langle y,y\rangle_\omega| = 1$ y consideremos los conjuntos $\pi_\omega(x) = \{t_1,t_2,\dots,t_n\}$ y $\pi_\omega(y) = \{s_1,s_2,\dots,s_m\}$. Así, $|x_t|\,|\omega_t|^{1/2} = 1$ para $t \in \pi(x)$ y $|x_t|\,|\omega_t|^{1/2} < 1$ para $t \notin \pi(x)$; del mismo modo, $|y_s|\,|\omega_s|^{1/2} = 1$ para $s \in \pi(y)$ y $|y_s|\,|\omega_s|^{1/2} < 1$ para $s \notin \pi(y)$. Luego, como el $\Bbbk$ es formalmente real, podemos aplicar el Teorema 2.1 al conjunto $\{x_{t_1}\mu_{t_1},\dots,x_{t_n}\mu_{t_n},y_{s_1}\mu_{s_1},\dots,y_{s_m}\mu_{s_m}\}$ (donde $\mu_k \in \mathbb{K}$ es tal que $\mu_k^2 = \omega_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$) para obtener

$$\begin{aligned} |\langle x,x\rangle_\omega + \langle y,y\rangle_\omega| &= \left|x_{t_1}^2\,\omega_{t_1} + \cdots + x_{t_n}^2\,\omega_{t_n} + y_{s_1}^2\,\omega_{s_1} + \cdots + y_{s_m}^2\,\omega_{s_m}\right| \\ &= \max_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \left\{|x_{t_i}|^2\,|\omega_{t_i}|, \left|y_{s_j}\right|^2\,\left|\omega_{s_j}\right|\right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento anterior, aplicamos el Teorema 2.1 a los conjuntos $\{x_{t_1}\mu_{t_1},\dots,x_{t_n}\mu_{t_n}\}$ y $\{,y_{s_1}\mu_{s_1},\dots,y_{s_m}\mu_{s_m}\}$ para obtener

$$|\langle x,x\rangle_\omega| = \left|\sum_{i=1}^n x_{t_i}^2\omega_{t_i}\right| = \max_{1\le i\le n} |x_{t_i}|^2\,|\omega_{t_i}| = 1$$

y

$$|\langle y,y\rangle_\omega| = \left|\sum_{j=1}^m y_{s_j}^2\omega_{s_j}\right| = \max_{1\le j\le m} \left|y_{s_j}\right|^2\,\left|\omega_{s_j}\right| = 1$$

Así,

$$\begin{aligned} \left|x_{t_1}^2 + \cdots + x_{t_n}^2 + y_{s_1}^2 + \cdots + y_{s_m}^2\right| &= 1 \\ &= \max\left\{\left|\sum_{i=1}^n x_{t_i}^2\omega_i\right|, \left|\sum_{j=1}^m y_{s_j}^2\omega_j\right|\right\} \\ &= \max\{|\langle x,x\rangle_\omega|, |\langle y,y\rangle_\omega|\} \end{aligned}$$

Si $\|x\|_\omega = \|y\|_\omega \neq 1$, escogemos $a \in \mathbb{K}$ tal $\|x\|_\omega = \|y\|_\omega = |a|$ y se aplica el desarrollo anterior a los elementos $v = a^{-1}\,x$ y $z = a^{-1}\,y$.

□

Observación 4.4. *Definamos el espacio*

$$E_{\omega^{-1}} = c_0\left(\mathbb{N},\mathbb{K},\left(\frac{1}{|\omega_i|^{1/2}}\right)\right)$$

y notemos que

$$\|e_i\|_{\omega^{-1}} = \frac{1}{|\omega_i|^{1/2}} = \frac{1}{\|e_i\|_\omega}$$

donde $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces, para $e_i' \in E_\omega'$ definido en la Observación 2.9, obtenemos que

$$\|e_i'\| = \frac{1}{\|e_i\|_\omega} = \|e_i\|_{\omega^{-1}}$$

Además,

$$\left\langle x, e_i\,\omega_i^{-1}\right\rangle_\omega = \omega_i^{-1}\,x_i\,\omega_i = x_i = e_i'(x)$$

es decir, $e_i' \in E_\omega'$ es un funcional de Riesz.

Con elementos de la observación anterior, podemos generalizar el resultado de la Proposición 2.3, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.1.

$$cl[\{e_i' : i \in \mathbb{N}\}] \cong E_{\omega^{-1}}$$

Demostración. Definamos la aplicación lineal

$$\Phi \quad :[\quad \{e_i' : i \geq 0\}] \quad \rightarrow \quad E_{\omega^{-1}}$$

en su base $\{e_i' : i \geq 0\}$ por $\Phi(e_i') = e_i$. Notar que

$$\|\Phi(e_i')\|_{\omega^{-1}} = \|e_i\|_{\omega^{-1}} = \frac{1}{\|e_i\|_\omega} = \|e_i'\|$$

es decir, Φ es una isometría y por tanto inyectiva.
Extendemos Φ a

$$\hat{\Phi} \quad : \quad cl[\{e_i' : i \geq 0\}] \quad \rightarrow \quad E_{\omega^{-1}}$$

la cual resulta ser una isometría por la continuidad de Φ. Afirmamos que $\hat{\Phi}$ es sobreyectiva. En efecto, para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{\omega^{-1}}$ escribimos

$$x' = \sum_{n\geq 0} a_n e_n'\,.$$

Ahora, como

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|\,\|e_n'\|_{\omega^{-1}} = \lim_{n\to\infty} |a_n|\,\frac{1}{|\omega_n|^{1/2}} = 0$$

se tiene que x' está bien definida. En particular,

$$x' = \sum_{n\geq 0} a_n e_n' = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i e_i' \in cl[\{\, e_i' : i \geq 0 \,\}]$$

Ahora,

$$\hat{\Phi}(x') = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi(e_i') = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i e_i = \sum_{n\geq 0} a_n e_n = (a_n)$$

lo que muestra que $\hat{\Phi}$ es sobreyectiva. $\square$

De lo anterior, se sigue de forma natural la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *Si $f \in cl[\{e'_i : i \geq 0\}]$, entonces f es un funcional de Riesz.*

Demostración. Sea $f \in cl[\{e'_i : i \geq 1\}]$. Luego, existe $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ tal que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, e'_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i \in cl[\{e'_i : i \geq 1\}]$$

con

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_i| \, \|e'_i\| = 0$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \left|\alpha_i \, \omega_i^{-1}\right| \, \|e_i\| &= \lim_{i\to\infty} |\alpha_i| \, |\omega_i|^{-1} \, |\omega_i|^{1/2} \\
&= \lim_{i\to\infty} |\alpha_i| \, |\omega_i|^{-1/2} \\
&= \lim_{i\to\infty} |\alpha_i| \, \|e'_i\| = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, definiendo

$$y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \, \omega_n^{-1} \, e_n \, \in \, E_{\omega^{-1}}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, e'_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e'_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \cdot, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \omega_k^{-1} \, e_k \right\rangle_\omega \\
&= \left\langle \cdot, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \omega_k^{-1} \, e_k \right\rangle_\omega \\
&= \langle \cdot, y \rangle_\omega
\end{aligned}$$

lo que muestra que f es un funcional de Riesz. □

4.1. Complementos Normales

Dado un subsespacio M de E_ω, denotaremos por M^p al subespacio de todos lo elementos x de E_ω, tales que $\langle x, y \rangle_\omega = 0$, para todo $y \in M$, es decir,

$$M^p = \{x \in E_\omega : \langle x, y \rangle_\omega = 0 \text{ for all } y \in M \}$$

Supongamos que la valuación de $\mathbb{K}$ es densa y consideremos la sucesión (λ_i) tal que $1 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < 2$. Afirmamos que $M^p = \{0\}$, donde

$$M = \left\{ x = (x_i) \in E_\omega : \sum_{i\geq 1} x_i \, \mu_i \, \lambda_i = 0 \right\}$$

En efecto, supongamos que existe $z = (z_i)$ en M^p, $z \neq 0$; se define $\tilde{z} = \alpha^{-1} z$, donde $\alpha = \sum_{i\geq 1} z_i \mu_i \lambda_i$. Ahora, si $x = (x_i) \in E_\omega$, entonces $x - \beta \tilde{z} \in M$, donde $\beta = \sum_{i\geq 1} x_i \mu_i \lambda_i$, ya que

$$\sum_{i\geq 1} (x_i - \beta \tilde{z}_i) \mu_i \lambda_i = \sum_{i\geq 1} x_i \mu_i \lambda_i - \beta \alpha^{-1} \sum_{i\geq 1} z_i \mu_i \lambda_i = \sum_{i\geq 1} x_i \mu_i \lambda_i - \beta = 0$$

Luego, si $b = \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle_\omega^{-1}$, entonces

$$\langle x, b \tilde{z} \rangle_\omega = \langle x - \beta \tilde{z}, b \tilde{z} \rangle_\omega + \langle \beta \tilde{z}, b \tilde{z} \rangle_\omega = 0 + \beta b \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle_\omega = \beta$$

en particular, para un elemento de la base canónica e_i, se tiene

$$\mu_i \lambda_i = \langle e_i, b \tilde{z} \rangle_\omega = b \tilde{z}_i \omega_i$$

lo que implica

$$1 < |\lambda_i| = |b| \, |\tilde{z}_i| \, |\omega_i|^{1/2}$$

Lo anterior es una contradicción, pues el miembro derecho de la desigualdad converge a cero. En otras palabras, $M^p = \{0\}$. Esto muestra que existen subespacios cerrados sobre E_ω, que no admiten un complemento.

Definición 4.1. *Sean M y N dos subespacios cerrados de E_ω. Diremos que N es un complemento normal de M si*

$$(x \in M\,,\ y \in N \ \Rightarrow\ \langle x, y \rangle_\omega = 0) \quad \textit{and} \quad E_\omega = M \oplus M^p.$$

Si tal complemento normal existe para M, entonces diremos que M admite un complemento normal.

Definición 4.2. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_ω satisface que $\langle x, x_n \rangle_\omega \to 0$, para cada $x \in E_\omega$, entonces diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue.*

Ejemplo 4.1. *La sucesión (y_n), donde $y_n = (\delta_{in}\, \mu_n^{-1})$, tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue. En efecto,*

$$|\langle x, y_n \rangle_\omega| = \left|\mu_n^{-1} x_n \omega_n\right| = \left|\mu_n^{-1} x_n \mu_n^2\right| = |x_n \mu_n| = |x_n| \, |\omega_n|^{1/2} \to 0$$

4.2. Proyecciones Normales

Para un operador lineal $T : E_\omega \to E_\omega$, se definen los conjuntos $N(T) = \{x \in E_\omega : T(x) = 0\}$ y $R(T) = \{y \in E_\omega : y = T(x)$ para algún $x \in E_\omega\}$. También, se define el conjunto de todos los operadores lineales continuos de E_ω sobre si mismo, como $\mathcal{L}(E_\omega)$.
Recordemos que, para $e_i \in E_\omega$ y $e'_j \in E_\omega$,

$$\begin{array}{rcccl} e'_j \otimes e_i & : & E_\omega & \to & E_\omega \\ & & x & \mapsto & e'_j \otimes e_i(x) = e'_j(x)\, e_i \end{array}$$

es un operador lineal y como además,

$$\left\|e'_j \otimes e_i\right\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\left|e'_j(x)\right| \, \|e_i\|_\omega}{\|x\|_\omega} = \sup_{x\neq 0} \frac{\left|e'_j(x)\right| \, |\omega_i|^{1/2}}{\|x\|} = \left\|e'_j\right\| \, |\omega_i|^{1/2} = 1$$

se concluye que $e'_j \otimes e_i \in \mathcal{L}(E_\omega)$.

Con lo anterior, podemos dar una caracterización de los operadores lineales continuos definidos sobre E_ω.

Proposición 4.3. *Sea $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ base de E_ω. Entonces, cada $u \in \mathcal{L}(E_\omega)$ se puede escribir como una única serie doble*

$$u = \sum_{j,i} \alpha_{ij} \, e'_j \otimes e_i \, ,$$

donde $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, y

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| \, |\omega_i|^{1/2} = 0 \ , \ \ \forall\, j \in \mathbb{N} \, .$$

Además,

$$\|u\| = \sup_{j,i} \frac{|\alpha_{ij}| \, |\omega_i|^{1/2}}{|\omega_j|^{1/2}}$$

Demostración. Sean $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ base de E_ω y $u \in \mathcal{L}(E_\omega)$. Entonces, para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $u(e_j) \in E_\omega$. Luego, como $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de E_ω, existen únicos $\alpha_{1j}, \alpha_{2j} \ldots \in \mathbb{K}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ tales que

$$u(e_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} \, e_i \, , \quad \text{con} \quad \lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| \, |\omega_i|^{1/2} = 0$$

Se sigue de esto que,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j u(e_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} \, x_j \, e_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} \, e'_j(x) e_i \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} \, e'_j \otimes e_i(x) \end{aligned}$$

Además,

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| \, \left\|e'_j \otimes e_i\right\| = \lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0 \ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

Así,

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} \, e'_j \otimes e_i$$

es una suma puntualmente convergente. Por otro lado, notemos que

$$\frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|_\omega} \leq \|u\| \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Ahora, para cada $x \in E_\omega$, se tiene

$$\|u(x)\| = \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j\, u(e_j) \right\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\ \|u(e_j)\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|_\omega}\ \|x\|_\omega$$

por lo que

$$\|u\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|_\omega} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|_\omega}$$

lo que muestra que

$$\|u\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|_\omega}$$

Así,

$$\|u\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|_\omega} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_{ij}|\ \frac{\|e_i\|_\omega}{\|e_j\|_\omega} \right\} = \sup_{j,i} \frac{|\alpha_{ij}|\ |\omega_i|^{1/2}}{|\omega_j|^{1/2}}$$

□

Siguiendo las mismas ideas de la Proposición 3.3, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 4.4. *Sea $u \in \mathcal{L}(E_\omega)$, con $u = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i$. Entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

1. $u^2 = u$
2. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$.

Observación 4.5. *Por lo anterior, si u satisface una de las condiciones Proposición 4.4, entonces*

$$\begin{aligned}
\langle e_k - u(e_k), u(e_k)\rangle_\omega &= \left\langle (0,\ldots,\underbrace{1}_{k\text{-ésimo}},0,\ldots) - (\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots),(\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots)\right\rangle_\omega \\
&= -\alpha_{1k}^2\,\omega_1 - \ldots - \alpha_{(k-1)k}^2\,\omega_{k-1} + \alpha_{kk}(1-\alpha_{kk})\,\omega_k - \ldots \\
&= \alpha_{kk}\,\omega_k - \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2\,\omega_i
\end{aligned}$$

Así, una proyección u será normal si, y sólo si,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2\,\omega_i = \alpha_{kk}\,\omega_k$$

De lo anterior y utilizando la Proposición 4.4, se obtiene que $u = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i \in \mathcal{L}(c_0)$ es una proyección normal si, y sólo si, u satisface:

1. $\sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ *para todo* $i, k \in \mathbb{N}$.
2. $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2\,\omega_i = \alpha_{kk}\,\omega_k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

4.3. Adjunto de un Operador

Dado $u \in \mathcal{L}(E_\omega)$, se define

$$D(u^*) = \{y \in E_\omega : \exists\, y^* \in E_\omega\,,\ \langle u(x), y\rangle_\omega = \langle x, y^*\rangle_\omega\ \ \forall\, x \in E_\omega\}$$

el cual resulta ser un subespacio de E_ω.
Notemos que $y^* \in E_\omega$ es único, ya que si existe otro elemento $z^* \in E_\omega$ tal que

$$\langle u(x), y\rangle_\omega = \langle x, z^*\rangle_\omega\ \ \forall\, x \in E_\omega\,,$$

se obtendrá

$$\langle x, y^*\rangle_\omega = \langle u(x), y\rangle_\omega = \langle x, z^*\rangle_\omega\ \ \forall\, x \in E_\omega\,,$$

lo cual es equivalente a

$$\langle x, y^* - z^*\rangle_\omega = 0\ \forall\, x \in E_\omega\,,$$

es decir, $y^* = z^*$.
Denotemos $\mathcal{L}_0(E_\omega) = \{u \in \mathcal{L}(E_\omega) : D(u^*) = E_\omega\}$. Ahora, por la unicidad de y^*, podemos definir el operador lineal

$$\begin{array}{rccl} u^* & : & E_\omega & \rightarrow & E_\omega \\ & & y & \mapsto & u^*(y) = y^* \end{array}$$

El operador u^* se llama adjunto de u, el cual cumple la relación

$$\langle u(x), y\rangle_\omega = \langle x, u^*(y)\rangle_\omega\ \ \forall\, x, y \in E_\omega$$

Con lo anterior, podemos dar la siguiente definición.

Definición 4.3. *Dado $u \in \mathcal{L}(E_\omega)$, se dice que u admite un operador adjunto si existe $u^* \in \mathcal{L}(E_\omega)$ tal que*

$$\langle u(x), y\rangle_\omega = \langle x, u^*(y)\rangle_\omega\ \ \ \forall\, x, y \in E_\omega$$

En el espacio E_ω, podemos caracterizar los operadores que admiten adjunto, tal como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Sea $u = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i \in \mathcal{L}(E_\omega)$. Entonces, u admite un único operador adjunto $v = u^* \in L(E_\omega)$ si, y sólo si, para cada $i \geq 0$ se tiene*

$$\lim_j |\alpha_{ij}|\ |\omega_j|^{-1/2} = 0$$

Bajo esta condición, obtenemos que

$$u^* = \sum_{i,j} \omega_i^{-1} \omega_j\, \alpha_{ji}\, e'_i \otimes e_j$$

Demostración. Sean $u, v \in \mathcal{L}(E_\omega)$. Luego,

$$u = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i \quad \text{y} \quad v = \sum_{i,j} \beta_{ij}\, e'_j \otimes e_i$$

con

$$\lim_i |\alpha_{ij}|\ |\omega_i|^{1/2} = \lim_i |\beta_{ij}|\ |\omega_i|^{1/2} = 0$$

Además, si $(e_i)_{i\in I}$ es base ortogonal de E_ω, entonces

$$u(e_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ki}\, e_k \quad \text{y} \quad v(e_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj}\, e_k$$

Así, v es el adjunto de u si, y sólo si,

$$\langle u(e_i), e_j \rangle_\omega = \langle e_i, v(e_j) \rangle_\omega \ ,$$

es decir,

$$\alpha_{ji}\, \omega_j = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ki}\, e_k, e_j \right\rangle_\omega = \left\langle e_i, \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj}\, e_k \right\rangle_\omega = \beta_{ij}\, \omega_i \quad \forall\, i, j \geq 0\,.$$

Entonces,

$$\beta_{ij} = \omega_i^{-1} \omega_j\, \alpha_{ji} \quad \forall\, i, j \geq 0$$

Además, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_i |\alpha_{ji}|\ |\omega_i|^{-1/2} &= \lim_i |\omega_j|^{-1}\ |\omega_i|^{-1}\ |\omega_j|\ |\alpha_{ji}|\ |\omega_i|^{1/2} \\ &= |\omega_j|^{-1} \lim_i \left|\omega_i^{-1}\, \omega_j\, \alpha_{ji}\right|\ |\omega_i|^{1/2} \\ &= |\omega_j|^{-1} \lim_i |\beta_{ij}|\ |\omega_j|^{1/2} = 0 \end{aligned}$$

lo cual muestra el resultado. □

Observación 4.6. *Del teorema anterior se sigue que no todo operador lineal continuo en E_ω admite un adjunto. En efecto, consideremos el operador*

$$\begin{array}{rccl} T \ : & E_\omega & \to & E_\omega \\ & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, e_i & \mapsto & T(x) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) e_1\, \omega_1^{-1} \end{array}$$

Luego,

$$\|T\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|T(e_i)|}{\|e_i\|_\omega} = \frac{1}{|\omega_1|^2}$$

por lo que $T \in \mathcal{L}(E_\omega)$. Por otro lado, supongamos que T tiene un adjunto T^* tal que $T^*(e_1) = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E_\omega$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\langle\, e_i, T^*(e_1) \rangle_\omega = \langle T(e_i), e_1 \rangle_\omega = \left\langle e_1 \omega^{-1}, e_1 \right\rangle_\omega = 1$$

lo cual implica que $y_i = 1$,para todo $i \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

Teorema 4.3. *Sea* $u = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, e'_j \otimes e_i \;\in\; \mathcal{L}(E_\omega)$*. Entonces, u admite un operador adjunto si, y sólo si, para cada $y \in E_\omega$, se tiene*

$$\lim_{i\to\infty} \langle u(e_i), y\rangle_\omega = 0$$

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que u admite un adjunto. Tomemos $y \in E_\omega$ y escojamos $i \in \mathbb{N}$. Luego, como

$$\langle u(e_i), y\rangle_\omega = \langle e_i, u^*(y)\rangle_\omega = a_i\,\omega_i$$

donde $u^*(y) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E_\omega$, se tiene

$$\lim_{i\to\infty} \langle u(e_i), y\rangle_\omega = 0$$

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que para cada $y \in E_\omega$, se tiene

$$\lim_{i\to\infty} \langle u(e_i), y\rangle_\omega = 0$$

Basta mostrar que

$$\lim_{j\to\infty} |\alpha_{ij}|\;|\omega_j|^{-1/2} = 0$$

En efecto, consideremos $i \in \mathbb{N}$ fijo y tomemos cualquier elemento base e_k. Así, se tiene

$$\begin{aligned} u(e_k) &= \sum_{i,j\geq 0} \alpha_{ij}\, e'_j(e_k)\, e_i \\ &= \sum_{i,j\geq 0} \alpha_{ij}\, e_i \\ &= (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{ik}, \ldots) \end{aligned}$$

de lo que se sigue que

$$0 = \lim_{k\to\infty} \left|\left\langle u(e_k), e_i\,\mu_i^{-3}\right\rangle_\omega\right| = \lim_{k\to\infty} |\alpha_{ik}|\;|\omega_k|^{-1/2}$$

□

Observación 4.7. *Si consideramos un funcional de Riesz $f(\cdot) = \langle y, \cdot\rangle_\omega$, con $y = (y_n) \in E_\omega$, $y \neq 0$, podemos definir el operador lineal continuo u como*

$$u = \begin{pmatrix} y_1\omega_1 & y_2\omega_2 & y_3\omega_3 & y_4\omega_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Notar que $N(u) = N(f)$ y que su adjunta es

$$u^* = \begin{pmatrix} \omega_1^{-1}\,(y_1\,\omega_1)\,\omega_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \omega_2^{-1}\,(y_2\,\omega_2)\,\omega_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \omega_3^{-1}\,(y_3\,\omega_3)\,\omega_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \omega_4^{-1}\,(y_4\,\omega_4)\,\omega_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \omega_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ y_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ y_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ y_4 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Con lo anterior podemos mostrar el siguiente resultado

Proposición 4.5. *Si u y u^* están definidos como en la observación anterior, entonces*

$$P = \frac{1}{\omega_1\ \langle y, y\rangle_\omega}\, u^* \circ u$$

es una proyección normal.

Demostración. Notemos que la matriz asociada a P está dada por

$$P = \frac{1}{\langle y, y\rangle_\omega} \begin{pmatrix} y_1^2\omega_1 & y_2y_1\omega_2 & y_3y_1\omega_3 & y_4y_1\omega_4 & \cdots \\ y_1y_2\omega_1 & y_2^2\omega_2 & y_2y_3\omega_3 & y_4y_2\omega_4 & \cdots \\ y_1y_3\omega_1 & y_2y_3\omega_2 & y_3^2\omega_3 & y_4y_3\omega_4 & \cdots \\ y_1y_4\omega_1 & y_2y_4\omega_2 & y_3y_4\omega_3 & y_4^2\omega_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Luego, para probar que P es proyección normal, gracias a la observación 4.5, basta motrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}\,\alpha_{kj} = \alpha_{ij}\ , \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$$

y

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{ik}^2 = \alpha_{kk}\ , \quad k \in \mathbb{N}$$

donde

$$\alpha_{ij} = \frac{y_iy_j\omega_j}{\langle y, y\rangle_\omega}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 1} \alpha_{ik}\alpha_{kj} &= \sum_{k\geq 1} \frac{y_iy_k\omega_k}{\langle y, y\rangle_\omega}\,\frac{y_ky_j\omega_j}{\langle y, y\rangle_\omega} \\ &= \frac{y_iy_j\omega_j}{\langle y, y\rangle_\omega^2} \sum_{k\geq 1} y_k^2\omega_k \\ &= \frac{y_iy_j\omega_j}{\langle y, y\rangle_\omega^2}\ \langle y, y\rangle_\omega \\ &= \frac{y_iy_j\omega_j}{\langle y, y\rangle_\omega} \\ &= \alpha_{ij}\ ,\ \ i, j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1} \alpha_{ik}^2 \omega_i &= \sum_{i\geq 1} \frac{y_i^2 y_k^2 \omega_k^2 \omega_i}{\langle y, y\rangle_\omega^2} \\
&= \frac{y_k^2 \omega_k^2}{\langle y, y\rangle_\omega^2} \sum_{i\geq 1} y_i^2 \omega_i \\
&= \frac{y_k^2 \omega_k^2}{\langle y, y\rangle_\omega^2} \langle y, y\rangle_\omega \\
&= \frac{y_k^2 \omega_k^2}{\langle y, y\rangle_\omega} \\
&= \frac{y_k y_k \omega_k \omega_k}{\langle y, y\rangle_\omega} \\
&= \alpha_{kk}\, \omega_k\ , \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

□

El siguiente teorema generaliza la proposición anterior:

Teorema 4.4. *Si $P : E_\omega \to E_\omega$ es una proyección normal con $R(P) = cl[\{y_1, y_2, \ldots\}]$, donde $\{y_1, y_2, \ldots\}$ es un subconjunto ortonormal finito o una sucesión ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue sobre E_ω. Entonces,*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, y^i\rangle_\omega}{\langle y^i, y^i\rangle_\omega}\, y^i$$

Demostración. Supongamos que $P : E_\omega \to E_\omega$ es una proyección normal con $R(P) = \overline{[\{y^1, y^2, \ldots\}]}$. Entonces, dado $x \in E_\omega$, se tiene que $P(x) \in R(P)$. Luego, existen $\alpha_i \in E'_\omega$, $i \in \mathbb{N}$, tales que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)\, y^i$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
\langle x, y^j\rangle_\omega &= \langle x, Py^j\rangle_\omega = \langle Px, y^j\rangle_\omega = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) y^i, y^j \right\rangle_\omega \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) \langle y^i, y^j\rangle_\omega = \alpha_j(x) \langle y^j, y^j\rangle_\omega
\end{aligned}$$

Así,

$$\alpha_j(x) = \frac{\langle x, y^j\rangle_\omega}{\langle y^j, y^j\rangle_\omega}$$

Ahora, definamos

$$P_i(x) = \frac{\langle x, y^i\rangle_\omega}{\langle y^i, y^i\rangle_\omega}\, y^i$$

y notemos que, como $\{y^1, y^2, \ldots\}$ una sucesión ortonormal con la Propiedad de Riemann-Lebesgue, se tiene

$$\lim_{i\to\infty} P_i(x) = \lim_{\to\infty} \frac{\langle x, y^i\rangle_\omega}{\langle y^i, y^i\rangle_\omega}\, y^i = 0$$

por lo que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, y^i\rangle_\omega}{\langle y^i, y^i\rangle_\omega}\, y^i\,.$$

$\square$

Bibliografía

[1] Aguayo J. y Nova M., *Non-Archimedean Hilbert like Spaces*,

[2] Aguayo J. y Nova M., *Characterization of Compact and self-adjoint Operator on spaces whit non-arhimedean inner product*, (pre-print).

[3] A. C. M. Van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis*, Marcel Dekker, Inc., 1978.

[4] G. Bachman, *Introduction to p-adic numbers and valuation theory*, Academic Press, New York (1964).

[5] C. Perez-Garcia y W.H. Schikhof, *Locally Convex Spaces over Non-Archimedean Valued Fields*, Cambridge University Press, 2010.

[6] shamseddine, K., *New Elements of Analysis on the Levi-Civita Field*, PhD Dissertation, Departamen of Mathematics and Departament of Physics and Astronomy, Michigan State, Diciembre 1999.

[7] Narici, L. y Beckenstein, E., *A non-Archimedean Inner Product*, Contemporary Mathematics, vol. 384 (2005), 187-202.

[8] Diarra B., *Geometry of the p-adic Hilbert Spaces*, (pre-print).

[9] Oortwijn S. *On Definition of a Compactoid*, Annales Mathématiques Blais Pascal, tomo 2, nº1 (2005), p. 201-215.

[10] H. Keller, *Ein nicht-klassischer Hilbertscher Raum*, Math. Z. 172 (1980), 41-49.

[11] M. P. Solér, *Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces*, Communications in Algebra, 23 (1995), 182-189.