Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Licenciatura en Matemática

El Problema de la Medida: Un acercamiento via álgebras Booleanas.

Tesina Licenciatura en Matemática

NICANOR CARRASCO VARGAS
2018

Profesor Guía: Carlos Martínez Ranero
Departamento de Matemática,
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Índice general

1 Introducción

En este documento hacemos un acercamiento al *problema de la medida*. La cuestión surge de la tesis doctoral de Henri Lebesgue, en la cual él desarrolla una teoría sistemática, ya digerida e internalizada a la matemática. Pese al poder de la teoría que desarrolla, la *medida de Lebesgue* satisface las propiedades requeridas sobre un subconjunto propio de $P(\mathbb{R})$, es decir, no funciona bien para medir todos los subconjuntos de numeros reales. Frente a esto lo natural es intentar arreglarlo, buscar una extensión de tal medida o alguna otra que si se pueda definir sobre todo $P(\mathbb{R})$. Vitali demuestra en 1905 que bajo el axioma de elección no puede definirse una medida invariante bajo traslaciones sobre todos los subconjuntos de numeros reales, aumentando las dudas que ya habían en ese entonces sobre dicho axioma.

Frente a esto, Banach (1930) replantea el problema para algún cardinal cualquiera, reemplazando la invarianza traslacional por una condición mas débil. Este es el clásico *problema de la medida*. En 1930 ven la luz resultados Ulam y Tarski que demuestran que si para algun cardinal existe una medida como la plantea Banach, entonces deben existir cardinales *inaccesibles*, es decir, tan grandes que usando los axiomas de ZFC, no puede existir una demostración de su existencia. Además, se relaciona la posibilidad de una extensión de la medida de Lebesgue con la hipótesis del continuo.

En 1963, Paul Cohen construye un *modelo*, un pequeño mundo que satisface todos los axiomas de ZFC, pero donde fallaba la Hipótesis del Continuo, a saber, la afirmación de que el cardinal infinito inmediatamente después del numerable era el de $\mathbb{R}$ o $P(\mathbb{N})$. Kurt Gödel ya había construido en 1940 un modelo de ZFC que satisfacía la Hipótesis del Continuo, la conclusión es que tal hipótesis es *independiente* de los axiomas de ZFC, es decir, estos axiomas no la demuestran ni refutan. Los temas se conectan vía el siguiente resultado de Ulam:
Si $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, entonces no existe una extensiónde la medida de Lebesgue sobre $P(\mathbb{R})$, ni siquiera abandonando la condición de ser invariante bajo traslaciones (ver 3.2).
Por otro lado, utilizando el metodo de *forcing* que inventó o descubrió Cohen en su demostración, Solovay construyó en 1970 (ver [6]) un modelo de la teoría de conjuntos en el cual todos los subconjuntos de los numeros reales son Lebesgue medibles. Como vemos, el problema de la medida ha sido un creador importante de preguntas en teoría de conjuntos y lógica.

En este documento, en 3.1 seguimos bien de cerca los resultadaos de Ulam y Tarski (1930) para visualizar un posible acercamiento al problema mediante álgebras booleanas. En

3.2 realizamos este acercamiento, desarrollando en paralelo los resultados de álgebras booleanas necesarios.

2 Preliminares

Este capítulo, además de fijar algunas notaciones, contiene la mayoría de los preliminares necesarios del documento, para hacerlo relativamente autocontenido. Probablemente un lector con un conocimiento básico de ordinales, cardinales, y algebras booleanas desearía saltarse o atravesarlo de manera superficial.

2.1. Notación

Denotaremos ${}^{\alpha}\beta$ al conjunto de funciones de α en β. Usaremos la exponenciación a la derecha α^{β} para ordinales y cardinales. Usaremos a lo largo de todo el documento la notación $\aleph_{\alpha}$ para cardinales. Cuando tengamos un conjunto indexado por un cardinal, probablemente ocuparemos letras como i, j, l para los subíndices. Denotareoms $P(X)$ al conjunto potencia de X.

Usaremos la abreviación ZFC para los axiomas de Zermelo-Fraenkel, incuído el axioma de elección, y ZF para los axiomas sin elección.

Siguiendo a [2], usaremos $\vee, \wedge$ para las operaciones en el algebra booleana.

2.2. Ordenes y ordinales

2.2.1. Ordenes

Damos las definiciones importantes, se puede encontrar una construcción detallada en [5] o [1].

Definición 2.1. *Una relación binaria $<$ en un conjunto X se dice un orden parcial si satisface:*

- *(irreflexividad) Para cada $x \in X$, $x \not< x$.*
- *(transitividad) Para cada $x, y, z \in X$, si $x < y, y < z$ entonces $x < z$.*

Decimos que $(X, <)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Un orden lineal es un orden *parcial que también es total, es decir, para cada* $x, y \in X$

$$x < y \ o \ x = y \ o \ y < x.$$

Definición 2.2. *Dado un conjunto parcialmente ordenado* $(X, <)$, *decimos que* X *está bien ordenado si cada subconjunto* $Y \subset X$ *no vacío tiene un elemento mínimo para* $<$, *es decir, un* $m \in Y$ *tal que para cada* $y \in Y$, *o bien* $m = y$ *o* $m < y$.

Se muestra que un buen orden es también un orden lineal. Por ejemplo, los ordenes usuales de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ son ordenes lineales. Sólo el orden en $\mathbb{N}$ es un buen orden.

Definición 2.3. *Dados dos conjuntos* $(X_1, <_1)$ $(X_2, <_2)$ *parcialmente ordenados, un morfismo de orden de* $(X_1, <_1)$ *en* $(X_2, <_2)$ *es una función* $f : X_1 \to X_2$ *tal que para cada* $a, b \in X_1$

$$a <_1 b \to f(a) <_2 f(b).$$

Un isomorfismo de orden entre X_1 *y* X_2 *es un morfismo de orden cuya inversa es un morfismo de ordne. En tal caso diremos que* X_1 *y* X_2 *son isomorfos.*

Por supuesto, se muestra que los isomorfismos de orden dan una relación de equivalencia.

Ejemplo 2.1. *Dados dos conjuntos* $(X_1, <_1)$, $(X_2, <_2)$ *bien ordenados, podemos definir un orden* $<$ *sobre la unión disjunta* $(X_1 \times \{0\}) \cup (X_2 \times \{1\})$ *por* $(a, i) < (b, j)$ *si ocurre una de las siguientes.*

$$i = 0, j = 1$$

$$i = j = 0, a <_1 b$$

$$i = j = 1, a <_2 b$$

Este es un buen orden sobre $(X_1 \times \{0\}) \cup (X_2 \times \{1\})$, *y lo podemos denotar por* $<_1 + <_2$. *Por ejemplo, tomando* $\mathbb{N}$ *con el orden usual* $<$ *apretando los puntos en la página de y ordenandolos de menor a mayor de izquerda a derecha, se vería algo así*

Si tomamos un singleton $\{a\}$ *(que como conjunto está bien ordenado por la relación vacía* $\varnothing$*) se vería así.*

Entonces el orden suma que construímos sobre $\mathbb{N} \times \{0\}) \cup \{a\} \times \{1\}$ *tendría a* a *como mayor elemento.*

Ejemplo 2.2. *Dados* $(X_1, <_1)$, $(X_2, <_2)$ *buenos ordenes, podemos definir el orden lexicográfico sobre el producto* $X_1 \times X_2$ *por* $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ *cuando*

$$x_1 < x_2$$

$$x_1 = x_2, y_1 < y_2.$$

Este es un buen orden, y lo denotaremos por $<_1 \times <_2$

Sea $(A, <)$ un buen orden. El segmento inicial de $a \in A$ es el conjunto de sus predecesores

$$pred(a) = \{b \in A : b < a\}$$

Proposición 2.1. *Si* $(X, <_x), (Y, <_y)$ *son buenos ordenes, entonces ocurre sólo una de las siguientes.*

- $(X, <_x)$ *es isomorfo a un segmento inicial propio de* $(Y, <_y)$
- $(Y, <_y)$ *es isomorfo a un segmento inicial propio de* $(X, <_x)$
- $(X, <_x)$ *y* $(Y, <_y)$ *son isomorfos.*

Los ordinales serán representantes de cada clase de conjuntos bien ordenados, módulo isomorfismos de orden (para hacer el cociente módulo isomorfismos de orden, tendríamos que cocientar sobre la clase de todos los conjuntos, que no es un conjunto.)

2.2.2. Ordinales

Definición 2.4. *Un conjunto* z *se dice transitivo si para cada* $y \in z$ *se tiene* $y \subset z$*.*

Definición 2.5. *Un ordinal* z *es un conjunto transitivo* z *bien ordenado por* $\in$*.*

La idea de hacer esto es poder tomar un ordinal, cuyos elementos serán ordinales mas pequeños, y el orden entre ellos $<$ será $\in$. El caso natural de esto es la construcción de los naturales de ZF:

- $0 = \{\} = \varnothing$
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, \} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
- $4 = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\} = \dots$

- $5 = 4 \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\} = \dots$
- $6 = 5 \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \dots$

entonces $6 \in$ N satisface por ejemplo 3<6, $3 \in 6$, y de hecho $6 = \{a \in N : a < 6\}$. Denotaremos ω al ordinal que contiene a todos los naturales (de esta construcción), que claro, es el infinito contable. Claramente corresponde a $\mathbb{N}$ pero visto sólo según sus propiedades de orden. Ahora viene la parte un tanto mas técnica.

Proposición 2.2. *Si α es un ordinal entonces*

1. *El menor elemento de α es $\varnothing$ y lo denotamos por 0.*
2. *Cada $\lambda \in \alpha$ es un ordinal, y corresponde a su mismo segmento inicial: $\lambda = \{x \in \alpha : x < \lambda\}$*
3. *$\alpha \notin \alpha$*

Además entre ordinales, los isomorfismos de orden son igualdades, es decir, si α es isomorfo a β, entonces $\alpha = \beta$.

Proposición 2.3.
- *Si α es un ordinal, entonces $\alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal.*
- *Si tenemos un conjunto de ordinales C, entonces su unión*

  $$\bigcup C = \{a : a \in c, c \in C\}$$

  es un ordinal. Además, se muestra que es el menor ordinal mayor a todos ellos, es decir, es el supremo del conjunto respecto al orden entre ordinales.

Por ejemplo, 6 es un ordinal, y $6 \cup \{6\} = 7$ es otro ordinal. Por otro lado, si tomamos el conjunto de ordinales $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, su unión

$$\bigcup \omega = \omega$$

(Notar que a cada uno le desaparece un corchete, y queda el mismo conjunto, algo así como cuando uno deriva la serie de la exponencial) es otro ordinal. Este ordinal no es el sucesor de ningún otro ordinal, es el primer ordinal límite.

Definición 2.6.
- *Un ordinal β es un ordinal sucesor si es el sucesor de otro ordinal, es decir, existe un α tal que*

  $$\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$$

- *Un ordinal β es un ordinal límite si no es un ordinal sucesor. En este caso, lo podemos escribir como la unión de un conjunto de ordinales mas pequeños, usando*

  $$\beta = \{a : a < b\}$$

  .

Nos gustaría decir que el conjunto de ordinales está bien ordenado, pero como es una clase que no es un conjunto. Lo diremos así:

Proposición 2.4. *La clase de ordinales ON está bien ordenada por $\in$, es decir, todo conjunto no vacío de ordinales tiene un mínimo. Luego el orden es lineal, si α, β son ordinales, $a = b$, $a \in b$, o $b \in a$.*

Como consecuencia de lo anterior, si tenemos un conjunto de ordinales, necesariamente existe un ordinal mínimo en él.

Proposición 2.5. *Cada conjunto bien ordenado $(X, <_x)$ es isomorfo a un (único) ordinal.*

Proposición 2.6. *Cada buen orden $(X, <_x)$ es isomorfo a un ordinal $(\alpha, \in)$ con el orden dado por la pertenencia.*

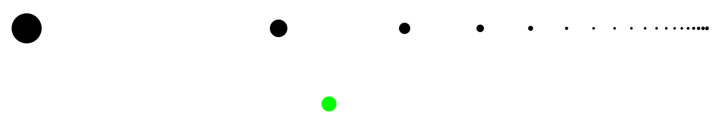
En este caso, llamaremos a $(\alpha, \in)$ α el tipo de orden de $(X, <_x)$, y lo denotaremos por $ord(X, <_x)$

2.2.3. Aritmética ordinal

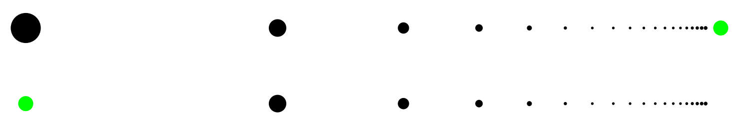
Si tenemos ordinales α, β, definimos

- $\alpha + \beta$ es el tipo de orden de $((\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}), \in + \in)$.
- $\alpha \times \beta$ es el tipo de orden de $(\alpha \times \beta, \in \times \in)$.

Ejemplo 2.3. *Si dibujamos a ω y al ordinal* 1 *como antes:*

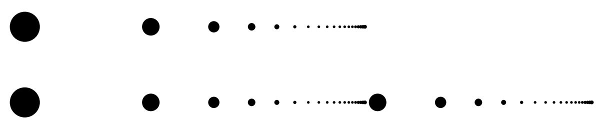


Entonces la suma $\omega + 1$ corresponde a poner, ordenar 1 *después de ω. Por otro lado, $1 + \omega$ corresponde a poner ω después de 1*



Claramente no son ordenes isomorfos, el primero tiene un elemento máximo y el segundo es isomorfo a ω, es decir, la suma de ordinales no es conmutativa. Con la multiplicación la situación es similar, el ordinal 2 se ve así:

Entonces el ordinal producto $2 \times \omega$ corresponde a poner ω veces el ordinal 2 de izquerda a derecha, mientras que $\omega \times 2$ corresponde a poner 2 veces el ordinal ω:



Se muestra que estas operaciones si son asociativas.

Luego podemos extender las definiciones dadas.

Definición 2.7. *Sea λ un ordinal, y $\{\gamma_i\}_{i<\lambda}$ una sucesión de λ ordinales. Sea A el conjunto*

$$\bigcup_{i<\lambda} \gamma_i \times \{i\}.$$

Definimos el buen orden $(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2)$ por

$$\alpha_1 < \alpha_2 \text{ o bien } \alpha_1 = \alpha_2 \text{ y } \beta_1 < \beta_2.$$

Claramente este es el buen orden obtenido al poner cada γ_i atrás del siguiente. Entonces definimos

$$\sum_{i<\lambda} \gamma_i = ord(A).$$

Por ejemplo,

$$\sum_{i<\lambda} 1 = \lambda.$$

Definición 2.8. *Definimos la exponenciación de ordinales por recursión.*

$$\alpha^0 = 1$$

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i \times \alpha$$

$$\alpha^\beta = sup_{\lambda<\beta}\{\alpha^\lambda\} \text{ cuando } \beta \text{ es un ordinal limite}$$

Esta satisface

$$\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$$

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$$

Por ejemplo,

$$2^5 = 32$$

(pero como ordinales).

Como nada nos detiene haciendo operaciones (pues un conjunto de ordinales siempre tiene un supremo, y es un ordinal) podemos, por ejemplo, también tomar

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}} = \sup\{\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \dots\}$$

y este sigue siendo un ordinal.

2.2.4. Inducción transfinita

Como la clase de ordinales está bien ordenada[5, Página 43], para cada fórmula con una variable libre $\psi(\alpha)$, si $\psi(\alpha)$ se satisface para algún ordinal, debe existir un menor ordinal ϵ tal que $\psi(\epsilon)$.

Como consecuencia, si tenemos una fórmula ϕ que depende de un ordinal, tal que

1. Se satisface
$$\phi(\varnothing).$$

2. Para cada ordinal α,
$$\begin{gathered}\phi(i) \text{ para cada } i < \alpha \\ \text{implica } \phi(\alpha).\end{gathered}$$

   Entonces ϕ se satisface para cada ordinal.

Demostración. Si no, podemos tomar el conjunto de ordinales que no satisfacen ϕ, y como es no vacío, tiene un menor elemento. La segunda condición implica que este menor elemento si satisface ϕ. $\square$

2.3. Cardinales y cardinalidad

2.3.1. Definiciones y cardinalidad

Los cardinales son ordinales, módulo su cardinalidad.

Definición 2.9. *Dos conjuntos se dicen equipotentes si hay una biyección entre ellos.*

En analogía a las clases de conjuntos módulo su tipo de orden, los cardinales serían sus clases, módulo equinumerosidad. Como antes, no nos complicamos con lo de las clases tomando un representante natural de cada una, un cardinal .

Definición 2.10. *Un cardinal α es un ordinal tal que no existe un ordinal $\beta < \alpha$ con el que sea equinumeroso.*

Si tenemos un ordinal α, su cardinalidad, denotada por $|\alpha|$ es el menor ordinal equinumeroso a α. (Notar que hace sentido pues los ordinales están bien ordenados).

Por ejemplo, el ordinal ω es un cardinal, pues cualquier ordinal menor es finito y por ende no equinumeroso. Si tomamos $\omega^{666}, 1+\omega, 2\omega$, la cardinalidad de cualquiera de ellos es ω. Un ordinal finito también es un cardinal.

Si tenemos un conjunto cualquiera X, denotamos su cardinalidad por $|X|$, mientras exista. Si tenemos el axioma de elección, la cardinalidad de cualquier conjunto existe. De hecho, la afirmación de que cada conjunto tenga cardinalidad es equivalente al teorema del buen orden.

Proposición 2.7. *Un conjunto X tiene cardinalidad si y sólo si puede bien ordenarse.*

Demostración. Si un conjunto X tiene una cardinalidad, entonces hay una biyección con un cardinal α, que es también un ordinal. Con esta biyección, pasamos el buen orden de α a X. Por otro lado, si tenemos un conjunto X con un buen orden, luego existe un ordinal α con el mismo tipo de orden, es decir, hay un isomorfismo del orden obtenido $(X,<)$ a $(\alpha,\in)$. Entonces el cardinal de X es $|\alpha|$ (el cardinal de un ordinal siempre existe). □

2.3.2. Aritmética cardinal

Definición 2.11. *Definimos la aritmética cardinal:*

- $\alpha+\beta = |\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}|$
- $\alpha\times\beta = |\alpha\times\beta|$
- $\alpha^\beta = |{}^\beta\alpha|$

Aquí, los infinitos grandes absorben a los pequeños, y se demuestra que cuando α,β son infinitos,
$$\alpha\times\beta = \alpha+\beta = \max(\alpha,\beta).$$
Además, para $\alpha\leq\beta$, [5, página 65]
$$\alpha^\beta = 2^\beta.$$

Si α,β son ordinales infinitos, entonces (las operaciones de la izquerda son en la aritmética ordinal)
$$|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$$

$$|\alpha \times \beta| = |\alpha| \times |\beta|$$
$$|\alpha^\beta| = \max(|\alpha|, |\beta|) \neq |\alpha|^{|\beta|}.$$

La notación es claramente ambigua, pero en la práctica no se producen confusiones así que no definimos otra.

Denotamos a $\omega = \aleph_0$ como el primer cardinal infinito, el 0-ésimo. Como los cardinales son ordinales, también están bien ordenados. Luego, podemos tomar mínimos de conjuntos. Por ejemplo, si tenemos el cardinal $\aleph_0$, debe existir el menor elemento de

$$\{\alpha \in ON : |\alpha| > \aleph_0\}.$$

Este es el menor cardinal mayor a $\aleph_0$, o su cardinal sucesor, que podemos denotar por $\aleph_0^+$. La afirmación (para la exponenciación de cardinales)

$$\aleph_0^+ = 2^{\aleph_0}.$$

es la hipótesis del continuo, planteada por Cantor en 1878. Kurt Gödel demostró que es consistente con ZFC, y Paul Cohen que su negación también es consistente con ZFC. Es decir, no se puede probar ni refutar de los axiomas de ZFC.

Pese a eso, este tiene un sucesor $\aleph_0^+ = \aleph_1$, el mínimo del conjunto anterior, el 1-ésimo cardinal infinito, y así sucesivamente.

Definición 2.12. *Definimos*

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{i+1} = \aleph_i^+ = \min\{\alpha \in ON : |\alpha| > \aleph_i\}$, *para* $i+1$ *un ordinal sucesor.*
- $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_i : i < \lambda\}$, *para* λ *un ordinal límite.*[1]

Esta construcción es válida usando el axioma de elección. Sin él, todo funciona, pero demostrar que cada cardinal tiene un sucesor se vuelve bastante mas técnico (este resultado es de Hartogs, puede mirarse en [5, página 54]). En fin, para cada ordinal α, tenemos $\aleph_\alpha$, el α-ésimo cardinal.

2.3.3. Cofinalidad, regularidad, singularidad

Definición 2.13. *Una sucesión creciente* $\{\gamma_i\}_{i<\lambda}$ *de elementos de un cardinal* κ *se dice cofinal si es no acotada, es decir, para cada* $\alpha \in \kappa$ *existe un* $\gamma_i > \alpha$.

[1] Notar que a priori, este supremo sobre un conjunto de cardinales es un ordinal, y no sabemos si es un cardinal, pero se prueba sin dificultad.

Es inmediato que ([1, página 88]):

Lema 2.1. *La sucesión* $\{\gamma_i\}_{i<\lambda}$ *es cofinal en* κ *si y solo si*

$$\bigcup_{i<\lambda}\{\gamma_i\} = k.$$

La cofinalidad de k, $cof(\kappa)$, es el menor cardinal que indexa una sucesión no acotada en κ. Un cardinal k se dice regular si $\mathrm{cof}(k) = k$, en otro caso se dice singular. Por ejemplo, $\aleph_0$ es un cardinal regular, se prueba también que cada cardinal sucesor es un cardinal regular. Por otro lado, se prueba que para cada cardinal límite

$$cof(\aleph_\alpha) = \alpha.$$

Es decir, un cardinal límite regular debe ser enorme, pues lo anterior significa que en tal caso

$$cof(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha = \alpha.$$

Definición 2.14. *Un cardinal debilmente inaccesible es un cardinal* k *no numerable, regular, y tal que para cada* $\lambda < k$, $\lambda^+ < k$. *Un cardinal fuertemente inaccesible (o inaccesible) es un cardinal* k *no numerable, regular, y tal que para cada* $\lambda < k$, $2^\lambda < k$.

Claramente, un cardinal fuertemente inaccesible es debilmente inaccesible.

2.3.4. Inaccesibilidad

Los cardinales inaccesibles se llaman así porque en ZFC no se puede demostrar que existen. Si se pudiera, produciriamos un modelo ZFC dentro de ZFC, y eso significaría que ZFC demuestra su consistencia. Mas formalmente, se define la *jerarquía de Zermelo* por recursión transfinita:

$$R(0) = \varnothing$$

$$R(\alpha+1) = P(R(\alpha))$$

$$R(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} R(\alpha) \text{ para } \gamma \text{ límite}$$

Como decíamos, si γ es un cardinal inaccesible, $R(\gamma)$ satisface todos los axiomas de ZFC, es un pequeño ZFC dentro de ZFC, algo como un subuniverso. Quiza podemos imaginar esto como un fractal:

Claramente nada nos dice que esto no ocurra, sólo que los axiomas de ZFC no pueden probar que hay tales cosas.

2.4. Algebras Booleanas

Presentamos aquí las definiciones y resultados básicos sobre algebras booleanas que necesitaremos. Seguiremos principalmente a [2], aunque tomaremos algunas definiciones de [3].

2.4.1. Definiciones

Definición 2.15. *Un algebra booleana* $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ *es un conjunto* B *con dos operaciones binarias* $\vee, \wedge$ *que llamaremos suma y producto, una operacion unaria* $-$ *que llamaremos complementación, y dos elementos* $0, 1 \in B$*, que llamaremos cero, uno, y que satisfacen para cada* $a, b, c \in B$

1. $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$
2. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
3. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
4. $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$
5. $a \vee (-a) = 1$, $a \wedge (-a) = 0$

Cuando sea necesario, explicitaremos la notación a $(B, \vee_B, \wedge_B, -_B, 0_B, 1_B)$, y cuando no haya peligro de confusión la relajaremos.

De los axiomas se desprenden identidades bien conocidas que se demuestran usando los axiomas, tales como $a \vee a = a, a \wedge a = a, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = 1$, etc. Por ejemplo:

$$a = a \vee 0 = a \vee (a \wedge -a) = (a \vee a) \wedge (a \vee -a) = (a \vee a) \wedge 1 = a \vee a.$$

Se demuestran sin dificultad las leyes de De Morgan:

$$-(a \vee b) = -a \wedge -b$$
$$-(a \wedge b) = -a \vee -b.$$

Llamaremos a dos elementos a, b disjuntos cuando $a \wedge b = 0$. Las operaciones de un algebra booleana inducen un orden parcial:

Definición 2.16. *En un algebra booleana* $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$, *definimos el orden* $a \leq b$ *por*

$$a \vee b = b.$$

Notamos que este efectivamente es un orden parcial, $a \leq a$ pues $a \vee a = a$; $a \leq b$ y $b \leq c$ llevan a $a \vee c{=}a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$; y claramente $a = a \vee b$, $a \vee b = b$ llevan a $a = b$. Teniendo un orden parcial, este deviene supremos e infimos, y se demuestra que $\sup\{a, b\} = a \vee b$, $\inf\{a, b\} = a \wedge b$.

Ejemplo 2.4. *Un ejemplo natural de álgebra booleana es el conjunto de partes de un conjunto con las operaciones usuales* $(P(X), \cup, \cap, ^c, \varnothing, X)$[2]. *Aquí, el orden dado por las operaciones corresponde a la inclusión* $\subseteq$.

Definición 2.17. *Denotaremos*

$$a - b = a \wedge (-b)$$

Conviene pensar en la diferencia de conjuntos. Debemos tener cuidado, pues esta operación ya no conmuta con las otras.
Con esta notación, se muestra que $a \leq b$ *si y solo si* $a - b = 0$.

Definición 2.18. *Sean* $\mathcal{B}_i = (B_i, \vee_i, \wedge_i, -_i, 0_i, 1_i)$ *álgebras booleanas indexadas por* $i < \lambda$, λ *un ordinal. Definimos el álgebra producto* $\prod_{i<\lambda} \mathcal{B}_i = (\prod_{i<\lambda} B_i, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ *como el álgebra cuyos elementos viven en el producto* $\prod_{i<\lambda} B_i$, *las operaciones están definidas componente a componente, el cero es el vector de ceros, y el uno es el vector de unos:*

$$1 = \Pi_{i<\lambda} 1_i$$
$$0 = \Pi_{i<\lambda} 0_i$$
$$\Pi_{i<\lambda} a_i \vee \Pi_{i<\lambda} b_i = \Pi_{i<\lambda} (a_i \vee b_i)$$
$$\Pi_{i<\lambda} a_i \wedge \Pi_{i<\lambda} b_i = \Pi_{i<\lambda} a_i \wedge_i b_i$$
$$-\Pi_{i<\lambda} a_i = \Pi_{i<\lambda} - a_i.$$

Esta construcción se detalla en [2, página 232].

Cuando hagamos el producto de un álgebra consigo misma, usaremos la notación exponencial:

Ejemplo 2.5. *Por ejemplo, para cada cardinal* λ, *al tomar el algebra producto* $\{0, 1\}^\lambda$, *esta es isomorfa a* $P(\lambda)$.

[2]Claramente nos referimos al complemento en X: $A^c = X - A$.

2.4.2. Morfismos

Definición 2.19. *Sean* $(A, \vee_A, \wedge_A, -_A, 0_a, 1_a), (B, \vee_B, \wedge_B, -_B, 0_B, 1_B)$ *algebras booleanas. Un morfismo de algebras booleanas es una función* $f : A \to B$ *que respeta las operaciones y constantes, es decir:*

$$\begin{aligned} f(1_A) &= 1_{\mathbf{B}} \\ f(0_A) &= 0_{\mathbf{B}} \\ f(a \vee_A b) &= f(a) \vee_{\mathbf{B}} f(b) \\ f(a \wedge_A b) &= f(a) \wedge_{\mathbf{B}} f(b) \\ f(-_A a) = -_B f(a). \end{aligned}$$

Un isomorfismo de algebras booleanas es un morfismo biyectivo.

Proposición 2.8. *Sea* $f : A \to B$ *una función de* A *en* B*. Entonces la función* $f^{-1} : P(B) \to P(A)$*, definida por*

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}, Y \subseteq B$$

es un morfismo entre las algebras booleanas de subconjuntos $(P(A), \cup, \cap, ^c, \varnothing, A)$*, y* $(P(B), \cup, \cap, ^c, \varnothing, B)$*.*[3] *En particular, cuando* f *es biyectiva,* f *(y* f^{-1}*) induce un isomorfismo de algebras booleanas.*

Demostración. Sea $f : A \to B$. Sabemos que la preimagen de conjuntos respeta las operaciones de cojuntos, así que es inmediato:

- $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
- $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
- $f^{-1}(B - X) = A - f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(B) = A$ (el 1 de cada algebra booleana)
- $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

□

2.4.3. Ideales, filtros, cocientes

En un algebra booleana, tenemos dos conceptos duales: filtros e ideales. Podemos imaginar un filtro como un conjunto de conjuntos grandes, y un ideal como un conjunto de conjuntos pequeños.

[3] En otras palabras, hay un funtor contravariante de la categoría de conjuntos y funciones a la categoría de algebras booleanas de partes y morfismos de álgebras booleanas.

Definición 2.20. *Un filtro es un subconjunto F de un algebra booleana B tal que*

- $0 \notin F, 1 \in F$
- *Si* $A \in F, B \in F$, *entonces* $A \wedge B \in F$
- *Si* $A \in F, A \subseteq B$, *entonces* $B \in F$

Un ideal es un subconjunto I de un algebra booleana B tal que

- $0 \in I, 1 \notin I$
- *Si* $A \in F, B \in F$, *entonces* $A \vee B \in F$
- *Si* $B \in I, A \subseteq B$, *entonces* $A \in I$

Si tenemos un ideal I, este induce su filtro dual como $\{1 - a : a \in I\}$, y si tenemos un filtro F, este induce su ideal dual como $\{1 - a : a \in F\}$. Cuando tengamos un conjunto X, cometiendo un abuso de lenguaje llamaremos un filtro(ideal) en X a un filtro(ideal) con la definición anterior, en el algebra booleana $P(X)$.

Los ideales determinan el algebra cociente, cuya construcción se detalla en [2, Capitulo 17].

Para un ideal I de un algebra $\mathbf{B}$, definimos la relación de equivalencia $a \sim b$ cuando existe $x \in I$ tal que

$$a \wedge -x = b \wedge -x,$$

o equivalentemente

$$(a - b) \vee (b - a) \in I.$$

Entonces definimos el algebra cociente $\mathbf{B}/I$ como el conjunto de clases

$$[a] = \{b \in \mathbf{B} : a \sim b\}$$

con las operaciones

$$[a] \vee_{B/I} [b] = [a \vee_{\mathbf{B}} b]$$
$$[a] \wedge_{B/I} [b] = [a \wedge_{\mathbf{B}} b]$$
$$-_{B/I}[a] = [-_{\mathbf{B}} a]$$

y constantes

$$0_{B/I} = [0_B]$$
$$1_{B/I} = [1_B].$$

Como es de esperar, para cada ideal de $\mathbf{B}$ tenemos un morfismo natural sobreyectivo entre el álgebra $\mathbf{B}$ y su álgebra cociente $\mathbf{B}/I$, dado por

$$\pi : B \to \mathbf{B}/I, \pi(a) = [a].$$

Ejemplo 2.6. *Consideremos el algebra de subconjuntos* $P(X)$*, y un singleton* $\{a\}$*,* $a \in X$*. Entonces el conjunto*

$$I = \{x \subseteq X : a \notin x\}$$

es un ideal, al cual llamaremos el ideal trivial[4]*, o principal inducido por* $\{a\}$*. Sea ahora el morfismo de algebras booleanas* $f : P(X) \to \{0,1\}$ *dado por*

$$f(x) = 1 \text{ si } a \in x,$$

$$f(x) = 0 \text{ si } a \notin x.$$

Llamaremos a este el morfismo trivial inducido por $\{a\}$*. Es claro que el kernel de este morfismo es el ideal I. Análogamente, si hacemos el cociente de álgebras booleanas* $P(X)/I$ *obtenemos* $\{0/I, 1/I\}$*, isomorfa a* $\{0,1\}$*. Es fácil ver que si un singleton no está en un ideal, entonces necesariamente este es el ideal trivial generado por ese singleton. Análogamente para morfismos. Un ideal* I *es no trivial, cuando cada singleton* $\{a\}$ *está en el. Un morfismo* f *es no trivial, cuando su kernel es no trivial, es decir, para cada singleton* $\{a\}, f(\{a\}) = 0$*.*

2.4.4. Completos

Llamaremos a un algebra $\mathbf{B}$ κ-completa cuando para cualquier subconjunto $S \subseteq B$ de cardinalidad $\gamma < \kappa$, el supremo[5] y el ínfimo

$$\sup(S)$$

$$\inf(S)$$

existan, y en este caso denotaremos

$$\bigvee S = sup(S)$$

$$\bigwedge S = inf(S).$$

Cuando S sea una familia indexada $\{x_i\}_{i<\gamma}$ adoptamos las notaciones usuales

$$\bigvee_{i<\gamma} x_i = \bigvee S = sup(S)$$

$$\bigwedge_{i<\gamma} x_i = \Pi S = inf(S).$$

Decimos que un álgebra es completa cuando es k-completa para cualquier κ. Gracias a las leyes de De Morgan, para ver que un álgebra es k-completa basta verificarlo para la suma, o para el producto.

[4] Notar que la función que manda todo a 0 no es un morfismo pues por definición debe mandar alguien a 1. El que manda los subconjuntos propios a 0 y 1_B a 1 tampoco es un morfismo.

[5] por supuesto, respecto al orden parcial que inducen las operaciones del álgebra

Ejemplo 2.7. *El álgebra de subconjuntos $P(X)$ siempre es completa.*

Decimos que un ideal I de un algebra B κ-completa es κ-completo cuando para cualquier conjunto $\{x_i\}_{i<\gamma}$ de elementos en el ideal de cardinal $\gamma < \kappa$, se tenga

$$\bigvee_{i<\gamma} x_i \in I.$$

Un ideal se dice completo cuando es κ-completo para cada cardinal κ.

Ejemplo 2.8. *Un ideal trivial es completo. Cualquier ideal es $\aleph_0$-completo.*

En un algebra k-completa, son validas las leyes de De Morgan para $< \kappa$ elementos. [2, Lema 1, Capitulo 8]. Si tomamos $\lambda < \kappa$ elementos $\{a_i\}_{i<\lambda}$ en $\mathbf{B}$, entonces

$$-\bigvee_{i<\lambda} a_i = \bigwedge_{i<\lambda} -a_i$$

$$-\bigwedge_{i<\lambda} a_i = \bigvee_{i<\lambda} -a_i.$$

También se satisface

$$b \wedge \bigvee_{i<\lambda} a_i = \bigvee_{i<\lambda} b \wedge a_i$$

$$b \vee \bigwedge_{i<\lambda} a_i = \bigvee_{i<\lambda} b \vee a_i.$$

Definición 2.21. *Sea $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morfismo de algebras, con A, B, k-completas. Diremos que f es k-completo*[6] *si, al tomar $\{a_i\}_{i<\gamma}$ $\gamma < k$, elementos del algebra, f respeta el supremo de ellos, es decir*

$$f(\bigvee_{i<\gamma} a_i) = \bigvee_{i<\gamma} f(a_i).$$

Por las leyes de De Morgan, esto es equivalente a pedir que f respete el producto de γ elementos.

Ejemplo 2.9. *Un morfismo trivial es completo. Cualquier morfismo es $\aleph_0$-completo.*

2.4.5. Átomos

Definición 2.22. *Un átomo en un algebra $\mathbf{B}$ es un elemento $a \in B$ no nulo tal que no hay nada mas pequeño que él además del cero, es decir, $x \leq a$ implica $x = a$ o $x = 0$.*

[6] En la literatura se suele definir completo, sin definir antes κ-completo. Veremos que esta diferencia será necesaria en el problema que nos interesa.

Los átomos se comportan como los singletons en el algebra de partes. De hecho, en $P(X)$ el conjunto de átomos es exactamente el conjunto de singletons.

Definición 2.23. *Un subconjunto D de un algebra booleana se dice denso si para cada a en B, existe $d \in D$ tal que $d \leq a$.*

Por ejemplo, en un algebra de partes $P(X)$, el conjunto de átomos es denso. Diremos que un álgebra es *atómica* si el conjunto de atomos es denso en ella.
En general, un algebra siempre es isomorfa a un subalgebra (que no hemos definido) de un algebra de partes, este es el teorema de representación de Stone, ver [2, Teorema 17, capitulo 22]. Cuando tengamos suficientes átomos, el álgebra si será isomorfa a un algebra de partes.

Proposición 2.9. *Un álgebra booleana completa es atómica con conjunto de átomos D si y solo si es isomorfa al algebra de partes $P(D)$. [2, capítulo 7, página 123, corolario 3]*

Ejemplo 2.10. *Un álgebra finita con áotmos $a_1, \ldots, a_n$ es isomorfa a $P(\{a_1, \ldots, a_n\})$. Luego, las algebras finitas de misma cardinalidad son isomorfas.*

2.4.6. Saturación

Definición 2.24. [7] *Una anticadena de largo γ es un conjunto de γ elementos $\{x_i\}_{i<\gamma}$ tal que*

$$x_j \wedge x_i = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Un algebra B se dice γ-saturada si no existen anticadenas de largo γ. Un álgebra B se dice de saturación γ si γ es el menor cardinal para el cual B es γ-saturada.[8]

Definición 2.25. *Sea γ un cardinal. Un ideal I en un álgebra se dice γ-saturado si no existen γ elementos que no están en el ideal, disjuntos dos a dos, y se dice de saturación γ si γ es el menor cardinal para el cual I es γ-saturado.*

Si el ideal es lo suficientemente completo, las dos definiciones coinciden.

Proposición 2.10. *Un ideal κ-completo I de un algebra $\mathbf{B}$ es γ-saturado, para $\gamma \leq k$ si y sólo si el algebra cociente B/I es γ-saturada, y es de saturación γ cuando el algebra B/I tiene saturación γ.*

[7] Tomada de [3, página 84]

[8] Esta definición tiene sentido gracias a que los cardinales están bien ordenados. Estamos tomando el menor cardinal de los que satisfacen cierta condición. Adaptamos esta definición de [3], que define sólo saturación infinita, pero nos interesan los casos finitos.

Demostración. Basta probar que hay una correspondencia entre anticadenas de largo γ en el algebra $\mathbf{B}/I$, y familias de γ elementos disjuntos que no están en el ideal $\mathbf{B}$. Sea $\pi : B \to B/I$ la proyección al cociente.

- Sean $a_i \notin I$, con $i < \gamma$, disjuntos dos a dos. Entonces $\pi(a_i) \neq 0$ pues si no a_i estaría en I. Además, $\pi(a_i) \wedge \pi(a_j) = \pi(a_i \wedge a_j) = \pi(0) = 0/I$.

- Sean a_i/I, con $i < \gamma$ elementos del cociente, una anticadena de B/I. [9] Entonces cada $a_i \neq 0$ pues si no $a_i/I = 0/I$. A priori, los a_i no tienen que ser disjuntos, pero lo arreglamos definiendo para cada ordinal $j < \gamma$

$$b_0 = a_0$$
$$b_j = a_i - \bigvee_{i<j} b_i.$$

  - Estos son claramente disjuntos. Para $\beta < \alpha$ ordinales, $b_\alpha \leq a_\alpha - b_\beta$. Luego

$$b_\alpha \wedge b_\beta \leq (a_\alpha - b_\beta) \wedge b_\beta = 0.$$

  - Para ver que cada $b_i \notin I$, hacemos la siguiente observación:. $a_i/I \wedge b_i/I = 0/I$ es equivalente a $a_i \wedge a_j \in I$. Además, notar que $\bigvee_{i<j} a_i = \bigvee_{i<j} b_i$. Ahora por contradicción, si un b_j está en I, entonces también $a_j \wedge b_j$:

$$a_j \wedge b_j = a_j \wedge (a_j - \bigvee_{i<j} a_i) = a_j \wedge a_j - \bigvee_{i<j} a_j \wedge a_i \in I$$

    Por otro lado, como el ideal es k completo, y cada $a_i \wedge a_j \in I, i < j$, la suma

$$\bigvee_{i<j} a_j \wedge a_i$$

    debe estar en el ideal. Sumando ambos terminos obtenemos

$$a_j \wedge (a_j - \bigvee_{i<j} a_i) = a_j \wedge a_j - \bigvee_{i<j} a_j \wedge a_i \vee \bigvee_{i<j} a_j \wedge a_i = a_j \vee \bigvee_{i<j} a_j \wedge a_i \in I$$

    Como el último termino es $\geq a_j$, eso implica $a_j \in I$, y ahí la contradicción.

□

Pese a que una anticadena no necesariamente es un conjunto de átomos, para álgebras finitas tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.11. *Si un algebra booleana B es de saturación finita $n+1$, entonces es un álgebra atómica. De hecho, es isomorfa al álgebra booleana de subconjuntos de un conjunto de n elementos $P(\{a_1, \ldots, a_n\})$.* [10]

[9] Notar que ya elegimos un a_i de cada clase, usamos elección.

[10] Caso simpático: el álgebra de saturación 2 es isomorfa al álgebra de partes de un singleton: el conjunto que lo tiene y el que no.

Lema 2.2. *Si en un álgebra booleana $B, a \in B$ no es un átomo, entonces existen b, c tales que $b \wedge c = 0$ y $b \vee c = a$*

Demostración. Si a no es un átomo, existe $b \in B$ tal que $0 < b < a$. Definimos $c = a \wedge -b$. Entonces $b \vee c = 1 \wedge b \vee a \wedge -b = (a \vee 1) \wedge (b \vee -b) = a \wedge 1 = a$, y $b \wedge c = b \wedge (a \wedge -b) \leq b \wedge -b = 0$. □

Demostración de la proposición. Basta probar que tiene n átomos y son densos en el conjunto. Si es de saturación $n+1$, tiene una n-anticadena $c_1, \ldots, c_n$.

- Todos son átomos, si por ejemplo c_1 no lo es, entonces $c_1 = a \vee b$, con $a \wedge b = 0$. Entonces $a, b, c_2, \ldots, c_n$ es una n+1-anticadena. Basta ver que $a \wedge c_i = 0, i \neq 1$, y para b es análogo. Como $a \leq c_1$, y $c_1 \wedge c_i, i \neq 1$, concluimos.

- El conjunto de atomos $c_1, \ldots, c_n$ es denso. Si no lo fuese, habría un a que no es un átomo ni tiene un átomo $\leq a$ (habría una n+1- anticadena). Entonces este a produciría una anticadena, podríamos partirlo en 2 todas las veces que queramos:

$$a = a_1 \vee b_1$$

$$a_1 = a_2 \vee b_2$$

$$a_2 = a_3 \vee b_3$$

$$\cdots$$

  Nos aseguramos que efectivamente son disjuntos: Si tomamos b_i, b_j con $i < j$, entonces por construcción $b_j \leq a_i$, y $a_i \vee b_i = 0$ también por construcción. Esto basta Al tomar los primeros $n+1$ b_i, obtenemos una anticadena, y esto es una contradicción.

  Para notar que es completa, simplemente observamos que es finita. El supremo de todos los átomos $\bigvee_{i<n} c_i$ debe ser 1. Si no, su complemento no nulo debe ser un átomo o ser $\geq$ un átomo, pero los tomamos todos. Lueg, como son átomos, cada $b \in B$ se debe escribir como una combinación de ellos:

$$b = b \wedge 1 = b \wedge \bigvee_{i<n} c_i = \bigvee_{i<n} b \wedge c_i$$

  Por ser átomos, cada $b \wedge c_i$ es o bien c_i o 0, así que hay finitas posibilidades, 2^n de hecho.

□

3 Medida

3.1. Los resultados clásicos

3.1.1. El problema de la medida

El problema de la medida se remonta a la tesis doctoral de Henri Lebesgue (1902). Aquí, desarrolla su *teoría de la medida* que a estas alturas forma parte del currículo estandar en matemática. Su objetivo es averiguar si existe una función $m : P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que

1. m no es idénticamente nula
2. m es invariante por traslaciones, es decir, para $A \subseteq R$, y $r \in \mathbb{R}$, $m(A) = m(\{a + r : a \in A\})$
3. m respeta la unión disjunta de numerables conjuntos, es decir si $A_i, i < \aleph_0$ son disjuntos, entonces $m(\bigcup_i A_i) = \sum_i m(A_i)$.

Lebesgue construye una medida que funciona bastante bien, la *medida de Lebesgue*, pero el conjunto sobre el cual satisface (1)-(3) es un subconjunto propio de $P(\mathbb{R})$. En efecto, Vitali demuestra (1905) que bajo el axioma de elección, ninguna medida que satisfaga esas condiciones puede definirse sobre $P(\mathbb{R})$.

Frente a esto, una opción es desconfiar el axioma de elección (que por ese entonces estaba completamente bajo la lupa), o al menos debilitarlo. En esa linea Solovay (1970) mostró que la existencia de una medida sobre todo $P(\mathbb{R})$ es consistente con ZF y el axioma de elección numerable[1].

El otro camino posible es debilitar las condiciones que definen una medida. Podemos quitar la condición (2), y en este caso hay soluciones triviales. Por ejemplo, para un singleton $\{a\}$, podemos definir para cada conjunto A,

$$m(A) = 0 \text{ si } a \notin A$$

$$m(A) = 1 \text{ si } a \in A.$$

[1]Solovay tuvo que suponer la existencia de un cardinal inaccesible, pero después resultó que se podía demostrar sin esa hipótesis

Aquí entra Banach, quien reemplazó invariancia bajo traslaciones por la condición $m(\{a\}) = 0$, que precisamente evita las soluciones triviales. Además se normaliza el problema al reemplazar $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ por $[0,1]$, y se toma un conjunto arbitrario S en vez de $\mathbb{R}$. La pregunta queda: habrá una función $m : P(S) \to [0,1]$ que cumpla:

1. $(\varnothing) = 0, m(S) = 1$
2. $m(\{a\}) = 0$
3. si $A_i, i < \aleph_0$ son disjuntos, entonces $m(\bigcup_i A_i) = \sum_i m(A_i)$.

Tal función es lo que Banach llama una *medida* en S. Como dijimos, teniendo el axioma de elección, no puede haber una extensión de la medida de Lebesgue (u otra) que siga siendo invariante bajo traslaciones. Quitando la invarianza traslacional, nos preguntamos entonces si existe para $P(\mathbb{R})$ o conjunto de otra cardinalidad. Como las álgebras de partes de dos conjuntos del mismo cardinal son isomorfas, la cuestión es si para *algún* cardinal κ puede existir una medida. Notar por ejemplo, que la pregunta tiene sentido sólo para un cardinal $k \geq \aleph_1$. En el caso $\aleph_0$, el conjunto entero $\aleph_0$ debería tener medida 1, pese a que se escribe como unión numerable de singletons, necesariamente disjuntos, y de medida nula. En esta dirección están los resultados de Stanislaw Ulam y Alfred Tarski sobre cardinales inaccesibles, que revisamos a continuación.

3.1.2. Medidas real valuadas

La definición moderna que seguiremos[2] es

Definición 3.1. *Una medida real valuada, o medida no trivial $\aleph_1$-aditiva[3] probabilística sobre un cardinal κ es una función $\mu : P(\kappa) \to [0,1]$ que satisface*

1. $\mu(\varnothing) = 0, \mu(X) = 1$
2. $\mu(\{a\}) = 0$
3. *si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$,*
4. *si $A_i, i < \aleph_0$ son disjuntos, entonces $\mu(\bigcup_{i<\aleph_0} A_i) = \sum_{i<\aleph_0} \mu(A_i)$.*

Diremos que una medida real valuada sobre κ es γ-aditiva si además para cada $\lambda < \gamma$, respeta la unión de λ conjuntos disjuntos:

- *si $A_i, i < \lambda$, son disjuntos, entonces $\mu(\bigcup_{i<\lambda} A_i) = \sum_{i<\lambda} \mu(A_i)$.*

[2] Obtenida de [3]

[3] Esto es lo mismo que σ-aditiva, pero lo escribimos así por ser mas sugerente.

Por supuesto, para esto necesitamos definir una suma sobre un conjunto arbitrario de indices, y es análogo a definir una serie numerable:

$$\sum_{i<\lambda} x_i = sup\{\sum_{i\in I} x_i : I \text{ subconjunto finito de } \lambda\}.$$

La definición de medida real valuada es equivalente a la de Banach, podemos ver que μ respeta inclusión escribiendo la unión disjunta $B = A \cup (B \setminus A)$.

Como se ve en el siguiente resultado, el hecho que podamos tener a lo más $\aleph_0$ conjuntos disjuntos de medida no nula queda capturado por el concepto de saturación.

Proposición 3.1. *Sea μ una medida real valuada sobre un caridnal κ. Entonces el conjunto de los subconjuntos de κ de medida nula*

$$I = \{A \in P(\kappa) : \mu(A) = 0\}$$

es un ideal no trivial, $\aleph_1$-completo, $\aleph_1$-saturado. Además, para $\gamma > \aleph_0$, I es γ-completo si y solo si μ es γ-aditiva.

Demostración.

- Vemos que es un ideal:

$$\mu(\varnothing) = 0, \mu(\kappa) = 1$$

$$\mu(B) = 0 \text{ implica que para } A \subset B, \mu(A) \leq 0 = 0.$$

  Si A,B tienen medida 0, por inclusión $\mu(A - B) = 0$, y como tenemos una unión disjunta $\mu(A \cup B) = \mu((A \setminus B) \cup B) = \mu(A) + \mu(A - B) = 0 + 0 = 0$.

  El ideal es no trivial pues $\mu(a) = 0$.

- Para ver que es $\aleph_1$-completo, tomamos $\{X_i\}_{i<\omega}$ conjuntos en el ideal, es decir, de medida nula, y los convertimos en conjuntos disjuntos dos a dos definiendo:

$$Y_0 = X_0$$

$$Y_i = X_i - \bigcup_{j<i} X_j$$

  de modo que unen lo mismo, $\bigcup_{i<\omega} Y_i = \bigcup_{x<\omega} X_i$, pero son disjuntos. Es claro que para cada X_i, $Y_i \subseteq X_i$, así que la inclusión $\bigcup_{i<\omega} Y_i \subseteq \bigcup_{x<\omega} X_i$ es inmediata. Para la otra, tomamos $x \in \bigcup_{x<\omega} X_i$. Tomamos l como el primer índice tal que $x \in X_l$. Como x no está en los anteriores, es claro que

$$x \in X_l \setminus \bigcup_{j<l} X_j.$$

  Son disjuntos pues para $i < j$, Y_j se obtiene sacandole a un conjunto una unión que contiene a X_i, el cual contiene a Y_i. Por inclusión, $\mu(X_i) = 0$ implica $\mu(Y_i) = 0$, y luego $\mu(\bigcup_{i<\omega} X_i) = \mu(\bigcup_{i<\omega} Y_i) = \sum_{i<\omega} \mu(Y_i) = \sum_{i<\omega} 0 = 0$, así que la unión de los X_i está en el ideal.

- Para notar que el ideal es $\aleph_1$-saturado, tomamos W una familia de conjuntos disjuntos de medida no nula, y tomemos para n fijo , $W_n \subset W$ la familia de conjuntos en W de medida $\geq 1/n$. Deben ser finitos, pues la suma de sus medidas debe ser ≤ 1. Luego,
$$W = \bigcup_{i<\omega} W_i,$$
y siendo unión numerable de conjuntos finitos, W es a lo más numerable.

- Mostremos ahora que si el ideal I de conjuntos de medida nula para μ es γ-completo, entonces μ es γ-aditiva. Tomemos $\lambda < \gamma$ y sean A_i, $i < \lambda$ conjuntos disjuntos. Por el resultado recién probado sobre saturación, hay a lo más numerables de ellos de medida no nula. Suponemos que son los primeros, es decir, para $i \geq \aleph_0$, $\mu(A_i) = 0$. Entonces podemos separar la unión de λ conjuntos entre los de medida no nula y de medida nula (usamos que μ respeta la unión de 2 conjuntos disjuntos)
$$\mu(\bigcup_{i<\lambda} A_i) = \mu(\bigcup_{i<\aleph_0} A_i) + \mu(\bigcup_{\aleph_0 \leq i<\lambda} A_i).$$
Entonces el primer sumando es la medida de la unión de $\aleph_0$ disjuntos, y el segundo es la medida de un conjunto que está en el ideal ($\lambda < \gamma$), es decir, es 0. Como la suma de un conjunto arbitrario de ceros es cero, tenemos
$$\mu(\bigcup_{i<\lambda} A_i) = \sum_{i<\aleph_0} \mu(A_i) + \sum_{\aleph_0 \leq i<\lambda} \mu(A_i) = \sum_{i<\lambda} \mu(A_i).$$

  Para ver que si μ es γ-aditiva, entonces el ideal I es γ-completo, la demostración es exactamente la misma, reemplazando $\aleph_0$ por un cardinal $\lambda < \gamma$.

  Solo falta ver que si la medida es γ-aditiva, el ideal será γ-completo. Siendo honestos, la demostración es la misma que acabamos de hacer para ver que es $\aleph_1$-completo, pero reemplazando $\aleph_0$ por un $\lambda < \gamma$. Como decir eso sin escribirla puede ser riesgoso, lo hacemos.

  Tomamos $\{X_i\}_{i<\lambda}$ conjuntos en el ideal, es decir, de medida nula, y los convertimos en disjuntos definiendo:
$$Y_0 = X_0$$
$$Y_i = X_i \setminus \bigcup_{j<i} X_j$$ [4]
de modo que unen lo mismo, $\bigcup_{i<\lambda} Y_i = \bigcup_{i<\lambda} X_i$, pero son disjuntos. Es claro que para cada X_i, $Y_i \subseteq X_i$, así que la inclusión $\bigcup_{i<\lambda} Y_i \subseteq \bigcup_{x<\lambda} X_i$ es inmediata. Para la otra, tomamos $x \in \bigcup_{x<\lambda} X_i$. Tomamos l como el menor ordinal tal que $x \in X_l$.

[4] Observar que ahora j además de un ordinal sucesor, podría ser un ordinal límite, en cuyo caso todo funciona de la misma forma.

Como x no está en los anteriores, es claro que

$$x \in X_l \setminus \bigcup_{j<l} X_j.$$

Son disjuntos pues para $i < j$, Y_j se obtiene sacandole a un conjunto una unión que contiene a X_i, que contiene a Y_i. Por inclusión, $\mu(X_i) = 0$ implica $\mu(Y_i) = 0$, y luego $\mu(\bigcup_{i<\lambda} X_i) = \mu(\bigcup_{i<\lambda} Y_i) = \sum_{i<\lambda} \mu(Y_i) = \sum_{i<w\lambda} 0 = 0$, así que la unión de los $\{X_i\}$ está en el ideal.

□

Si existen cardinales con una medida real valuada, podemos tomar el menor de ellos. Vemos que una medida sobre tal κ tiene que ser no sólo $\aleph_1$-aditiva, si no que κ-aditiva.

Proposición 3.2. *Sea κ el menor cardinal con una medida real valuada. Sea μ cualquier medida definida sobre κ. Entonces I_μ es κ-completo y luego μ es κ-aditiva.*

Demostración. Si el ideal I_μ de conjuntos de medida nula no es κ-completo, entonces existen $\{X_i\}_{i<\gamma}$, $\gamma < k$ conjuntos de medida nula cuya unión

$$X = \bigcup_{i<\gamma} X_i$$

tiene medida no nula. Con la misma construcción hecha en 3.1.2, podemos suponer que estos conjuntos son disjuntos. Sea $f : X \to \gamma$, la función definida por

$$f(x) = i \text{ cuando } x \in X_i.$$

Entonces la medida $\mu : P(k) \to [0, 1]$ induce otra medida

$$\nu : P(\gamma) \to [0, 1]$$

definida para $A \subseteq \gamma$ por

$$\nu(A) = \frac{1}{\mu(X)} \cdot \mu(f^{-1}(A)).$$

La idea es mostrar que ν es una medida real valuada sobre γ, y esto contradice que κ es el menor cardinal con una medida real valuada. Verificamos que es una medida:

1. $$\nu(\varnothing) = \frac{1}{\mu(X)} \mu(\varnothing) = 0$$
   $$\nu(\gamma) = \frac{1}{\mu(X)} \cdot \mu(f^{-1}(\gamma)) = \frac{1}{\mu(X)} \cdot \mu(X) = 1$$

2. Respeta la inclusión pues μ y f^{-1} respetan la inclusión,

3. Es $\aleph_1$ aditiva pues μ lo es y la preimagen por una función respeta la unión disjunta de $\aleph_0$ conjuntos,

4. Finalmente es no trivial: $\nu(\{i\}) = \frac{1}{\mu(X)}\mu(X_i) = \frac{1}{\mu(X)} \cdot 0 = 0$.

$\square$

Como el menor cardinal κ con una medida real valuada tiene propiedades extra, llamaremos real-valuado medibles a los que las satisfacen.

Definición 3.2. *Un cardinal κ se llama real valuado medible si admite una medida real valuada κ-aditiva.*

Es decir, con esta definición, el menor cardinal que admite una medida real valuada es un cardinal real-valuado medible.

Como hemos visto, las propiedades de una medida real valuada se corresponden con las del ideal de conjuntos de medida nula. Utilizando lo que tenemos sobre el ideal, demostramos ahora que cualquier cardinal real valuado medible es debilmente inaccesible.

Lema 3.1. *Sea κ un cardinal con I un ideal no trivial de κ, κ-completo. Si κ tien un subconjunto $A \subseteq k$ de cardinalidad $< \kappa$, entonces $A \in I$. Además, κ es regular.*

Demostración. La primera afirmación es inmediata: A es unión de $< k$ singletons, que están en el ideal. La utilizamos para probar que κ es regular. Si no es regular, existen $\lambda < k$ y ordinales $\alpha_i, i < \lambda$, tales que

$$k = \bigcup_{i<\lambda} \alpha_i.$$

Cada α_i está en el ideal por tener cardinalidad $< k$. Como el ideal es κ-completo, la unión está en el ideal, pero el ideal no puede contener a κ. $\square$

Para demostrar que un cardinal con tal ideal es límite, necesitamos el siguiente artilugio, claramente introducido por Ulam.

Definición 3.3. *Una matriz de Ulam de tamaño (κ, γ), con $\gamma^+ = k$ es un conjunto de subconjuntos de κ.*

$$\{A_{ij} : i < \kappa,\ y\ j < \gamma\},$$

tales que

- *Los conjuntos en una columna son disjuntos: para $i, j < k, i \neq j$, $A_{iv} \cap B_{jv} = \varnothing$, para cada $v < \gamma$.*

- *Al unir los conjuntos en una fila, obtenemos gran parte de κ: para cada $i < k$, el conjunto*
$$k \setminus \bigcup_{l<\gamma} A_{iv}$$
tiene cardinalidad a lo más γ.

Lema 3.2. *Existe una matriz de ulam de tamaño (λ^+, λ).*

Demostración. Para cada $e < \kappa$, sea f_e cualquier función en $\gamma = \kappa^+$ tal que $e \subseteq ran(f_e)$. Definimos para $v \leq \kappa$
$$A_{iv} = \{e < \lambda : f_e(v) = i\}.$$
Verificamos:

- Para $e < \gamma$, el único $i < k$ tal que $e \in A_{ie}$ es $a = f_e(v)$, y luego desde este i en adelante son disjuntos, es decir, para cada $i, j < k, i \neq j$, $A_{iv} \cap B_{jv} = \varnothing$, para cualquier $v < \gamma$.
- Como $e \subseteq ran(f_e)$, para cualquier $i < e$, existe $v < \gamma$ tal que $f_e(v) = i$, y luego
$$\lambda + 1 \setminus \bigcup_{l<\gamma} A_{iv} \subseteq i + 1.$$
Como $i + 1 \leq \gamma$, esto implica que la cardinalidad de $k \setminus \bigcup_{v<\gamma} A_{iv}$ es a lo más γ.

□

Proposición 3.3. *Si un cardinal κ admite un ideal no trivial κ-completo y $\aleph_1$-saturado, entonces es un cardinal límite.*

Demostración. Por contradicción, si k es un cardinal sucesor γ^+ tomamos una matriz de Ulam de tamaño (γ^+, γ).

Para cada $i < k$, como la cardinalidad de $k \setminus \bigcup_{v<\gamma} A_{iv}$ es a lo más $\gamma < k$, esto está en el ideal. Luego, no pueden estar todos los $\{A_{iv}\}_{v<\lambda}$ en el ideal, pues podríamos unirlos a $k \setminus \bigcup_{v<\gamma} A_{iv}$ y esto implicaría $k \in I$. Entonces en cada fila debe haber un $A_{iv} \notin I$. Como hay κ filas, deben haber al menos κ de ellos no en el ideal.

Como hay mas filas que columnas, palomar implica que en una columna deben repetirse infinitos de ellos que no están en el ideal, de hecho, κ de ellos. Si en cada columna hubiesen $< \kappa$ de ellos, como son $\lambda < k$ columnas, entonces habrían en toda la matriz, multiplicando, $< \kappa$ de ellos, pero ya sabemos que son al menos κ. Fijandonos en esta columna obtenemos κ conjuntos que además son disjuntos y no están en el ideal. Esto contradice que el ideal sea $\aleph_1$-saturado.

□

Todo lo anterior se resume en el siguiente resultado. Conviene recordar que bajo la hipótesis generalizada del continuo, debilmente inaccesible es lo mismo que fuertemente inaccesible.

Teorema 3.1. *Sea κ un cardinal con un ideal I κ-completo, no trivial, $\aleph_1$-saturado. Entonces κ es debilmente inaccesible.*

Corolario 3.1. *Si κ es un cardinal real valuado medible, entonces κ es debilmente inaccesible.*

Demostración. Si un cardinal κ es real valuado medible, entonces κ admite un ideal no trivial κ-completo y $\aleph_1$-saturado, a saber, el ideal de subconjuntos de medida nula. □

La consecuencia mas inmediata es la siguiente:

Corolario 3.2. *Suponiendo la hipótesis del continuo, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, no existe una medida real valuada (ni una extensión de la medida de lebesgue) sobre todo $P(\mathbb{R})$, $P([0,1])$, o $P(\aleph_1)$.*

Demostración. Si la hubiera, habría un cardinal límite entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$, pero $\aleph_1$ es el sucesor inmediato de $\aleph_0$ por definición. □

Al contrario, si existe un cardinal real-valuado medible, para una medida sin átomos (que definiremos) Ulam(1930) probó que existe una extensión de la medida de Lebesgue (que no será invariante bajo traslaciones).

3.1.3. Medidas 2 valuadas

Ahora nos enfocamos en un caso particular de una medida real valuada, un caso *extremo* con consecuencias también *extremas.*

Definición 3.4. *Una medida 2 valuada en un cardinal κ es una medida real valuada*

$$\mu : P(k) \to [0,1]$$

cuyos valores son o bien 0 o 1.

Lo extremo de este caso es que el ideal de conjuntos de medida nula que produce es maximal (o análogamente si nos enfocamos en el filtro de conjuntos de medida 1, este es un ultrafiltro). Obtenemos resultados análogos a los anteriores, pero para cardinales inaccesiblesfuertement e.

Proposición 3.4. *Si un cardinal κ admite una medida 2 valuada, entonces el ideal de conjuntos de medida nula es de saturación 2, no trivial, y $\aleph_1$-completo.*[5]

Demostración. Solo hay que notar que es de saturación 2. Sean A, B conjuntos disjuntos no en el ideal, es decir, de medida 1. Esto es imposibe, pues por unión disjunta $\mu(A) = 1$ implica $\mu(k - A) = 0$:

$$1 = \mu(k) = \mu(A \cup k \setminus A) = \mu(A) + \mu(k \setminus A) = 1 + \mu(k \setminus A).$$

Luego $B \subseteq k \setminus A$ implica $\mu(B) = 0$. □

A diferencia de las medidas real-valuadas, aquí hay una correspondencia bastante natural entre cada medida e ideal: dado un ideal de saturación 2, podemos definir la medida de un conjunto como 0 si está en el ideal, y 1 si su complemento es el que está.

Lema 3.3. *Que un cardinal admita una medida 2-valuada λ-aditiva es equivalente a que admita un ideal de saturación 2, no trivial, λ-completo. Dicho de otra forma, una medida 2-valuada λ-aditiva induce un ideal de saturación 2, no trivial, λ-completo, y vice versa.*

Una consecuencia inmediata de esto es

Corolario 3.3. *Un cardinal κ es medible si y solo si admite un ideal κ completo no trivial de saturación 2.*[6]

Demostración. Tenemos:
El caso $(\leftarrow)$ Es lo que acabamos de probar. Probemos $(\rightarrow)$. Supongamos que κ admite un ideal de saturación 2, no trivial, κ-completo. Naturalmente, este induce una medida $\mu : P(k) \to \{0, 1\}$, dada por

$$\mu(A) = 0 \text{ si } A \in I,$$

$$\mu(A) = 1 \text{ si } A \notin I$$

Claramente μ tiene a I como kernel. Verificar que efectivamente es una medida es rutinario. Verificamos que es una medida λ-aditiva. Sea $\gamma < \lambda$, y sean $\{A_i\}_{i<\gamma}$ conjuntos disjuntos. Si todos están en el ideal, la condición se cumple inmediatamente, pues su unión está en el ideal.

$$\mu(\bigcup_{i<\gamma} A_i) = 0 = \sum_{i<\lambda} 0.$$

[5] De saturación 2 es equivalentemente a maximal, ideal dual de un ultrafiltro. Usaremos esta terminología porque sugiere generalizaciones.

[6] En la literatura se enuncia o aún se define que un cardinal es medible si y solo si tiene un ultrafiltro (es decir, el filtro dual de un ideal de saturación 2) κ-completo no trivial. Preferimos esta caracterización dado que con el ideal haremos cocientes.

Por otro lado, como el ideal es de saturación 2, puede haber a lo más uno que no está en el ideal, es decir, de medida 1. En este caso, la unión no está en el ideal, y la suma de las medidas de cada uno es un 1 y el resto 0:

$$\mu(\bigcup_{i<\gamma} A_i) = 1 = 1 + \sum_{i<\lambda \text{ omitiendo uno}} 0 = \sum_{i<\lambda} \mu(A_i).$$

$\square$

En analogía al caso de medidas real-valuadas, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.5. *Sea κ el menor cardinal que admite una medida 2 valuada. Sea μ tal medida. Entonces μ es κ-aditiva.*

Demostración. La demostración es idéntica al caso de una medida real valuada. Por el lema anterior, si la medida no es κ aditiva, el ideal no es κ-completo, es decir hay $\lambda < k$ conjuntos en el ideal cuya unión no está en el ideal. Estos inducen una medida 2 valuada en λ. Lo único que hay que notar es que para μ 2 valuada, la misma función f, la medida inducida

$$\nu(A) = \frac{1}{\mu(X)} \cdot \mu(f^{-1}(A)).$$

es también 2 valuada. $\square$

La observación anterior inspira esta definición.

Definición 3.5. *Un cardinal κ se llama medible si admite una medida 2-valuada κ-aditiva, o equivalentemente (3.3) si admite un ideal κ-completo no trivial de saturación 2.*

Como demostramos, el menor cardinal κ que admite una medida 2 valuada es medible. Ahora probaremos que un cardinal medible es inaccesible. A diferencia del caso real-valuado, esta demostración es bastante directa.

Teorema 3.2. *Sea κ un cardinal medible. Entonces κ es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Ya sabemos que es un cardinal regular, pues admite un ideal κ-completo no trivial (3.1.2).

Probemos que es fuertement inaccesible. Supongamos que no, tomamos $\lambda < k$ tal que $2^\lambda \geq k$. Entonces debe haber un subconjunto S de[7] ${}^\lambda 2$ de cardinalidad κ. Como S tiene

[7] Que recordemos, es el conjunto de funciones de λ en $2 = \{0, 1\}$.

cardinalidad κ, debe admitir un ideal de saturación 2, no trivial, κ-completo. Para cada $i < k$, tenemos dos conjuntos disjuntos

$$\{f \in S : f(i) = 0\}$$

$$\{f \in S : f(i) = 1\}.$$

Como tenemos un ideal 2-saturado, y la unión de ambos es todo el conjunto, uno de ellos está en el ideal. Llamamos X_i al que está, y definimos $f(i) = 0$ o 1 correspondiendo al que elegimos. Como el ideal es κ completo, la unión de $\lambda < k$ cosas del ideal debe estár en el ideal. Por otro lado

$$\bigcup_{i<\lambda} X_i = S - \{f\} \notin I.$$

La unión es demasiado grande para estar en el ideal (si estuviera, como $\{f\}$ está en el ideal, κ estaría en el ideal). Contradicción. $\square$

Definición 3.6. *Para una medida $\mu : P(\kappa) \to [0,1]$, un átomo es un conjunto $A \subseteq \kappa$ tal que para cada $B \subseteq A$, o bien $\mu(B) = 1$ o $\mu(B) = 0$.*

Si I_μ es el ideal nulo de μ, probaremos mas adelante que un átomo A de la medida se corresponde con un átomo en el algebra cociente $P(\kappa)/I$ mediante el morfismo cociente.

Teorema 3.3. *Sea κ un cardinal real valuado medible para una medida μ. Si la medida tiene un átomo, entonces el cardinal es medible. Si la medida no tiene átomos, entonces $k \leq 2^{\aleph_0}$.*

En el caso en que la medida μ tiene un átomo A, Ulam construyó una medida 2 valuada k-aditiva, definiendo

$$\nu(B) = \mu(A \cap B)/\mu(A).$$

En este mismo caso, mas adelante construiremos una medida dos valuada, pero utilizando solamente algebras booleanas. La demostración para una medida sin átomos puede encontrarse en [4]. Este resultado de alguna forma relaciona los cardinales con medidas con átomos y sin átomos, es inmediato que un cardinal no puede tener ambas medidas, pues sería $\leq 2^{\aleph_0}$ y fuertemente inaccesible (esto contradice la definición de inaccesible).

3.1.4. Resultados y preguntas

Tenemos entonces que

- Un cardinal κ con una medida real-valuada κ-aditiva tiene un ideal κ-completo, $\aleph_1$-saturado y no trivial, y esto lo hace debilmente inaccesible.
- Un cardinal κ con una medida dos valuada κ- aditiva tiene un ideal κ-completo, 2-saturado y no trivial, y esto lo hace inaccesible.

Al mirar de cerca a los cardinales medibles y real valuado medibles, observamos la siguiente distinción: en el caso 2-valuado, un ideal con ciertas características en un cardinal κ induce inmediatamente una medida 2-valuada. Por otro lado, en el caso real-valuado, no es muy claro de qué forma un ideal κ-completo, $\aleph_1$-saturado y no trivial puede inducir una medida real-valuada.

Una aparente explicación de este fenómeno es la siguiente: una medida con valores en $\{0,1\}$, caso particular de una medida que toma valores en el intervalo $[0,1]$, es también un caso particular de un morfismo $\aleph_1$-completo del algebra booleana $P(k)$ en el algebra booleana booleana B, en este caso $B = \{0,1\}$. Cuando tenemos morfismos sobreyectivos entre álgebras booleanas, siempre hay una correspondencia entre el morfismo y el ideal que éste induce, precisamente esto dice el teorema de isomorfismo de algebras booleanas.

$$\begin{tikzcd} P(k) \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\pi"'] & B \arrow[d, leftrightarrow] \\ & P(k)/I \end{tikzcd}$$

donde la flecha de la derecha es un isomorfismo de álgebras booleanas. Queremos explorar e intentar explotar esta situación en torno a la medida 2-valuada.

3.2. Medidas y Algebras booleanas

3.2.1. La $\{0,1\}$ medida

Antes que nada, para justificar este enfoque del problema, probamos que efectivamente un cierto morfismo de algebras booleanas es lo mismo que una cierta medida 2 valuada.

Proposición 3.6. *Sea $\mu : P(k) \to \{0,1\}$ una función. Entonces μ es un morfismo de álgebras booleanas κ-completo no trivial sobreyectivo*[8] *si y sólo si es una medida 2 valuada κ-aditiva.*

Demostración.

- $(\to)$ Suponemos que μ es un morfismo de álgebras booleanas κ-completo.
  Probamos que es una medida 2 valuada κ-aditiva.

  Por definición, $\mu(\varnothing) = 0, \mu(\kappa) = 1$. Es claro que $\mu(\{a\}) = 0$: exactamente esto significa un morfismo de álgebras booleanas no trivial. Como un morfismo de

[8] En este caso es obvio que es sobreyectivo, pero luego lo tendremos que explicitar.

algebras booleanas preserva el orden que inducen las operaciones, y el orden en $P(\kappa)$ inducido por unión e intersección es la inclusión, automáticamente si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Notemos primero que necesariamente el ideal de conjuntos de medida nula I_μ será maximal, es decir, de saturación 2. Luego, si $\{A_i\}_{i<\lambda}, \lambda < k$ son disjuntos, entonces o bien sólo uno se va a 1 por μ, o todos se van a 0. En ambos casos es claro que:

$$\mu(\bigcup_{i<\lambda} A_i) = \bigvee_{i<\lambda} \mu(A_i) = \sum_i \mu(A_i),$$

donde el $\vee$ es la operación en el álgebra $\{0,1\}$ y la suma es la suma de números reales.

- ($\leftarrow$) Suponemos que μ es una medida 2-valuada κ-aditiva. Recordemos que ya probamos que su kernel I es un ideal de saturación 2. Denotaremos por $\wedge, \vee$ las operaciones en $\{0,1\}$ como algebra. Entonces claramente $\mu(\varnothing) = 0, \mu(k) = 1$. Si tomamos $A, B \in P(k)$, hay casos:

  - Si $\mu(A) = 0, \mu(B) = 0$, entonces la intersección de ambos está en I, ya que
  $$\mu(A \cap B) = 0 = 0 \cdot 0 = \mu(A) \wedge \mu(B).$$
  - Si $\mu(A) = 0, \mu(B) = 1$, entonces la intersección de ambos está en I, ya que
  $$\mu(A \cap B) = 0 = 0 \cdot 1 = \mu(A) \wedge \mu(B).$$
  - Si $\mu(A) = 1, \mu(B) = 1$, y ninguno de ellos está en I, necesariamente $\mu(A - B) = 0$, pues si $\mu(A - B) = 1$,
  $$\mu(A) = \mu((A - B) \cup B) = \mu(A - B) + \mu(A) = 1 + 1 = 2, \text{ absurdo.}$$
  Entonces $\mu(A - B) = 0$ implica $\mu(A \cap B) = 1$:
  $$1 = \mu(A) = \mu((A \cap B) \cup (A - B)) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cap B).$$
  Así
  $$\mu(A \cap B) = 1 = 1 \wedge 1 = \mu(A) \wedge \mu(B)$$

  Notar que en el álgebra $\{0,1\}$, la diferencia en el álgebra coincide con $x^c = 1 - x$, donde esa es la resta de numeros enteros. [9] Para ver que $\mu(k - A) = 1 - \mu(A)$, como antes, usamos una unión disjunta:
  $$k = A \cup (k - A).$$

[9] Recordar que la diferencia definida para el álgebra es $a - b = a \wedge (-b)$, y justamente en este caso coinciden.

Como $\mu(k) = 1$, y son disjuntos, para que no sumen 2, tiene que haber exactamente uno de medida 0 y otro de medida 1. Esto implica exactamente $\mu(k - A) = 1 - \mu(A) = -\mu(A)$. Habiendo probado que μ respeta la suma y el complemento en ambas álgebras, el producto viene las leyes de De morgan. Hay que notar que es un morfismo κ-aditivo. Si tenemos A_i conjuntos en $P(\kappa)$, $i < \lambda, \lambda < \kappa$, hay dos casos.

- Si todos los A_i tienen imagen 0 por μ, como sabemos que el ideal es κ-aditivo, tenemos
$$\mu(\bigcup_{i<\lambda} A_i) = 0 = \bigvee_{i<\lambda} 0 = \bigvee_{i<\lambda} \mu(A_i).$$

- Si hay al menos un A_i de imagen 1, como μ es una medida, por inclusión es claro que la unión tiene imagen 1. Luego
$$\mu(\bigvee_{i<\lambda} A_i) = 1 = \bigvee_{i<\lambda} \mu(A_i),$$
donde la segunda igualdad viene de que tenemos una gran disyunción en el álgebra con al menos un 1.

□

Ahora estamos seguros que efectivamente, una medida 2-valuada es un caso particular de un cierto morfismo, así que le ponemos nombre.

Definición 3.7. *Una B-medida en un cardinal κ es un morfismo sobreyectivo de álgebras booleanas $\mu : P(\kappa) \to B$, κ-completo, no trivial.*

Con esta definición, un cardinal medible es lo mismo que un cardinal $\{0, 1\}$-medible. Por otro lado, con un cardinal real valuado medible tenemos un ideal I no principal, κ-completo, $\aleph_0$-saturado. Tomando el cociente tenemos un morfismo no trivial y sobreyectivo a un álgebra booleana κ-completa, $\aleph_0$-saturada. La información anterior, en terminos de álgebras booleanas, se traduce así

- Si κ es $\{0, 1\}$-medible, entonces es fuertemente inaccesible.
- Si κ es B-medible, con B $\aleph_1$-saturada, entonces es debilmente inaccesible.

Notemos que un álgebra 2 saturada es también 3 saturada, 5 saturada, $\aleph_1$-saturada, etc. Si en el caso de un cardinal real valuado medible, ese ideal $\aleph_1$ saturado casualmente es también 2 saturado, había ahí escondida una medida 2-valuada. Cabe entonces preguntarse por la *saturación*[10] de tal B, es decir, el menor cardinal γ para el cual esa álgebra es γ saturada. Viéndolo de esta forma, son razonables las siguientes preguntas sobre tal $\mu : P(\kappa) \to B$.

[10]Definición en 2.4.6.

Pregunta 1. *¿Existe κ B-medible, con B de saturación 3, 4, o en general n>2? En tal caso, ¿κ es fuertemente inaccesible?.*

Pregunta 2. *¿Existe κ B-medible, con B de saturación $\aleph_0$? En tal caso, ¿κ es fuertemente inaccesible?.*

Para responder a estas preguntas, son necesarios algunos resultados sobre álgebras booleanas, que desarrollamos aquí en la medida que lo requiramos.

Mostraremos primero que un hay una correspondencia biunívoca entre morfismos κ-completos e ideales κ-completos, pues por el momento sólo es claro para el caso especial en que el morfismo va en $\{0,1\}$.

3.2.2. Las ideas

Dado que los tecnicismos necesarios se ponen engorrosos, explicamos un poco la idea de lo que haremos. Respecto a la pregunta 1, mostraremos que si existe un cardinal medible, este siempre tiene una medida a un álgebra de saturación n+1, o equivalentemente un ideal κ-completo no trivial de saturación n+1. Hacemos la construcción, por ejemplo, para el caso n+1=6. Si κ es medible, existira un morfismo

$$\mu : P(\kappa) \to \{0,1\}.$$

La idea es tomar el morfismo producto

$$\mu^5 : P(\kappa)^5 \to \{0,1\}^5,$$

del algebra producto $P(\kappa)^5$ en $\{0,1\}^5$ que es de saturación 6[11].

Veremos que el álgebra producto $P(\kappa)$ es isomorfa a $P(\kappa)^5$, particionando κ en 5 conjuntos de cardinalidad κ, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, e identificando cada $x \subseteq \kappa$ con sus intersecciones con cada parte

$$(x \cap k_1, ..., x \cap k_5) \in P(k_1) \times ... \times P(k_5).$$

Usando que conjuntos equinumerosos tienen algebras de partes isomorfas, tenemos ahí un isomorfismo entre $P(\kappa)$ y $P(\kappa)^5$. Componiendo tenemos lo buscado, un morfismo a un algebra de saturación 6, cuyo kernel es un ideal de $P(\kappa)$ no trivial, κ-aditivo, y de saturación 6

$$P(\kappa) \to P(\kappa)^5 \to \{0,1\}^5.$$

Veremos que esta idea funciona reemplazando 6 por cualquier cardinal $\leq \kappa$.

Si un cardinal κ tiene un morfismo a un algebra de saturación 6, equivalentemente tiene un ideal (κ-completo no trivial) de saturación 6, cocientamos para producir una medida.

[11] De hecho, isomorfa a $P(\{a_1, ..., a_5\})$.

Como veremos, un algebra de saturación 6 necesariamente es isomorfa al algebra de subconjuntos de un conjunto de 5 elementos $P(\{a_1, ..., a_5\})$. Para producir un morfismo de $P(\{a_1, ..., a_5\})$ en $\{0, 1\}$, cocientamos por el ideal de los subconjuntos que no contienen a $\{a_1\}$, cuyo cociente claramente produce dos clases de equivalencia: los conjntos que tiene a a_1 y los que no. La compuesta será una medida en κ:

$$P(\kappa) \to P(\{a_1, ..., a_5\}) \xrightarrow{\pi} \{0, 1\}.$$

3.2.3. Correspondencia entre ideales y morfismos

Para establecer la correspondencia entre ideales y morfismos que necesitamos, utilizamos los siguientes resultados. Esta es una adaptación de la demostración de correspondencia entre ideales completos y morfismos completos de [2, capítulo 24].

Lema 3.4. *Sean A, B, algebras κ-completas, κ infinito. Un morfismo $f : A \to B$ es κ-completo si y solo si para cada $a_i, i < \lambda, \lambda < \kappa$ tales que $\bigvee_{i<\gamma} a_i = 1_A$, se satisface $\bigvee_{i<\gamma} f(a_i) = 1_B$.*

Demostración. Si f es κ-completo, claramente

$$\bigvee_{i<\gamma} f(a_i) = f(\bigvee_{i<\gamma} (a_i)) = f(1_A) = 1_B.$$

Por otro lado, supongamos la condición dada y probemos que implica que el morfismo f es κ-completo. Sean $b_i, i < \gamma, \gamma < \kappa$. Como A es un algebra κ-completa, existe $\bigvee_{i<\gamma} b_i$. Definimos $b = \bigvee_{i<\gamma} b_i$. Como κ es infinito, el conjunto $\{b_i\}_{i<\gamma} \cup \{-b\}$ también tiene γ elementos, y además satisface que su suma es 1:

$$\bigvee_{i<\gamma} b_i \vee (-b) = 1.$$

Por hipótesis entonces,

$$\bigvee_{i<\gamma} f(b_i) + f(-b) = 1,$$

y manipulando un poco encontramos

$$\bigvee_{i<\gamma} f(b_i) = 1 - f(-b) = f(b) = f(\bigvee_{i<\gamma} b_i).$$

□

Lema 3.5. *Sea κ un cardinal infinito[12]. Sean B un álgebra booleana $\kappa - completa$, I un ideal en B. Entonces B/I es κ-completa. Además el ideal I es κ-completo si y sólo si el morfismo proyección $\pi : B \to B/I$ es κ-completo.*

[12] Nombramos esta hipótesis por enfatizar, cualquier morfismo es $\aleph_0$-completo pues respeta sumas y productos finitos.

Demostración. Si π es κ-completo, es inmediato que I es κ-completo. Si $\gamma < \kappa$, $\{a_i\}_{i<\gamma}$ son conjuntos en I, entonces el supremo

$$\bigvee_{i<\gamma} a_i$$

existe por ser B κ-completa. Luego, para π k-completo,

$$\pi(\bigvee_{i<\gamma} a_i) = \bigvee_{i<\gamma} \pi(a_i) = \bigvee_{i<\gamma} 0/I = 0/I.$$

Por otro lado, si el ideal I es κ-completo,mostramos que π también es κ-completo con el lema anterior. Sean $a_i, i < \gamma, \gamma < \kappa$ elementos de A, tales que

$$\bigvee_{i<\gamma} a_i = 1_B.$$

Queremos mostrar que $\bigvee_{i<\gamma} f(a_i) = 1/I$, es decir, que el supremo del conjunto de los $f(a_i) = a_i/I$ del algebra cociente es $1/I$. Claramente, $1/I$ es una cota superior de esa familia (es maximo). Sea ahora q/I cualquier otra cota superior. Como cada $a_i/I \leq q/I$, es claro que

$$(a_i - q)/I = (a_i/I) \cdot (-q/I) = 0,$$

es decir, $a_i - q = a_i \cdot -q \in I$. Ahora usamos que los a_i suman 1:

$$-q = 1 \cdot -q = (\bigvee_{i<\gamma} a_i) \cdot -q = \bigvee_{i<\gamma} a_i \cdot -q.$$

La última igualdad muestra que $-q$ es suma de γ elementos que están en el ideal, y como es κ completo, $-q$ debe estar en el ideal. Luego,

$$-q/I = 0/I$$

implica

$$q/I = 1/I$$

que es lo que buscabamos. □

Resumimos lo anterior en el siguiente resultado. Notar que este es exactamente el resultado que ya teníamos para $B = \{0, 1\}$.

Proposición 3.7. *Si tenemos un morfismo $P(\kappa) \to B$ κ-completo, no trivial, sobreyectivo, este induce un ideal I, su ideal nulo, κ-completo, no trivial. Si tenemos un ideal I en $P(\kappa)$ κ-completo, no trivial, el morfismo proyección al cociente es un morfismo sobreyectivo κ-completo, no trivial.*

3.2.4. Átomos, y saturación finita

Lema 3.6. [13]*Sea B un algebra con un átomo a. Entonces el conjunto*

$$I = \{b \in B : a \not\leq b\}$$

es un ideal completo, el llamado ideal trivial o principal inducido por a, y el cociente que induce tiene dos clases de equivalencia, es decir,

$$\pi : B \to B/I = \{0/I, 1/I\}.$$

Este es el llamado el morfismo trivial inducido por el átomo a.

Demostración. Verificamos que es un ideal. Notar primero que $a \leq b$ si y solo si $a \cdot -b = 0$. Entonces $b \in I$ si y solo si $a \cdot -b \neq 0$. Como a es un átomo y $a \cdot -b \leq a$, se tiene que $a \cdot -b \neq 0$ es equivalente a $a \cdot -b = a$. Es decir,

$$a \not\leq b \Leftrightarrow a \cdot -b = a.$$

- Claramente $\varnothing \in I$, $1 \notin I$.
- Si $b \in I$, $b' \leq b$, $a < b'$ implica $a < b$, pero $b \in I$. Luego b' también está en I.
- Si $b \in I$, $b' \in I$, entonces $b + b' \in I$. Como $a \cdot -b = a, a \cdot -b' = a$ entonces $a \cdot -(b + b') = a \cdot (-b \cdot -b') = (a \cdot -b) \cdot -b' = a \cdot -b' = a$.

Para ver que es completo, sean $\{b_i\}_{i<\gamma}$ en I, es decir, cada uno satisface

$$a \cdot -b_i = a.$$

Entonces

$$a \cdot -(\bigvee_{i<\gamma} b_i) = a \cdot \bigwedge_{i<\gamma} -b_i = \Pi_{i<\gamma} a \cdot -b_i = \Pi_{i<\gamma} a = a.$$

Ahora que I es un ideal, podemos hacer el cociente. Sea $\pi : B \to B/I$ la proyección al cociente. Mostremos que B/I es isomorfa a $\{0, 1\}$.

- Claramente, cada $b \in I$ está en la clase $0/I$.
- Probamos ahora que para cada par $b, b' \notin I$, estos están en la misma clase de equivalencia. Para esto, probamos primero que si a es un átomo, $a < b + b'$, entonces $a < b$ o $a < b'$. Ahora por cor contrarecípro si $a \not\leq b, a \not\leq b'$, entonces $a \cdot -b = a, a \cdot -b' = a$. En este caso, $a \cdot -(b + b') = a \cdot (-b \cdot -b') = a \cdot -b \cdot -b' = a$. es decir, $a \not\leq b + b'$.

[13]Este es el caso general de la caso observado en un álgebra de partes y un singleton.

Habiendo sólo dos clases de equivalencia, el algebra cociente es isomorfa a $\{0,1\}$. El morfismo inducido claramente es

$$\pi : B \to \{0,1\},$$

$$\pi(b) = 0 \text{ si } a \not\leq b$$

$$\pi(b) = 1 \text{ si } a \leq b.$$

□

Corolario 3.4. *Si B es un álgebra booleana con un átomo, entonces existe I un ideal en B tal que B/I es isomorfa al álgebra booleana $\{0,1\}$, con un morfismo completo.*

3.2.5. Construcción de B-medibles a partir de $\{0,1\}$-medibles.

Proposición 3.8. *Si tenemos morfismos $f_i : A_i \to B_i$ de álgebras booleanas κ-completas A_i, B_i, e $i < \lambda$ es un cardinal, este induce un morfismo producto $F = \Pi_{i<\lambda} f_i$,*

$$F : \Pi_{i<\lambda} A_i \to \Pi_{i<\lambda} B_i,$$

dado por

$$\Pi_{i<\lambda} X_i \to F(\Pi_{i<\lambda} X_i) = \Pi_{i<\lambda} f_i(X_i).$$

Si todos los f_i son sobreyectivos (biyectivos), el morfismo producto F es sobreyectivo (biyectivo). Si cada f_i es κ-completo, este morfismo también es κ-completo.

Demostración. Verificar que el morfismo producto es efectivamente un morfismo es rutinario.

- $F(0) = \prod_{i<\lambda} f_i(0) = \prod_{i<\lambda} 0 = 0$
- $F(\prod_{i<\lambda} 1_i) = \prod_{i<\lambda} f_i(1_i) = \prod_{i<\lambda} 1_i$
- $F((\prod_{i<\lambda} X_i) \vee (\prod_{i<\lambda} Y_i)) = F(\prod_{i<\lambda} X_i \vee Y_i) = \prod_{i<\lambda} f_i(X_i \vee B_i) = \prod_{i<\lambda} f_i(X_i) \vee f_i(Y_i) = \Pi_{i<\lambda} f_i(X_i) \vee \Pi_{i<\lambda} f_i(Y_i) = F(\Pi_{i<\lambda} X_i) \vee F(\Pi_{i<\lambda} Y_i)$
- $F(-(\Pi_{i<\lambda} X_i)) = F(\Pi_{i<\lambda} - X_i) = \Pi_{i<\lambda} f_i(-X_i) = \prod_{i<\lambda} -f_i(X_i) = -\prod_{i<\lambda} f_i(X_i) = -F(\prod_{i<\lambda} X_i)$
- La intersección viene gratis por leyes de De Morgan, teniendo la unión y diferencia.

Si todos los f_i eran sobreyectivos (biyectivos), el morfismo producto F es sobreyectivo (biyectivo) inmediatamente, pues el producto de funciones sobreyectivas es una funcion sobreyectiva y el producto de funciones inyectivas es una funcion inyectiva.

Verificamos que si cada f_i es κ-completo, F lo es. Notar que por las leyes de morgan, basta verificarlo para la unión. Sea $\gamma < k$, y tomemos γ conjuntos en el algebra producto, $\{X^j\}_{j<\gamma}$, con cada $X^j = \Pi_{i<\lambda} X_{ij}$. Entonces

$$F(\bigvee_{j<\gamma} X^j) = F(\bigvee_{j<\gamma} \Pi_{i<\lambda} X_{ij})$$

Notar que aquí no hay ninguna distributividad, solo estamos operando *coordenada a coordenada* en el algebra producto,

$$= F(\Pi_{i<\lambda} \bigvee_{j<\gamma} X_{ij})$$

Ahora por definición de F

$$= \Pi_{i<\lambda} f_i(\bigvee_{j<\gamma} X_{ij})$$

y usamos que cada f_i es κ-completa,

$$= \Pi_{i<\lambda} \bigvee_{j<\gamma} f_i(X_{ij})$$

de nuevo *coordenada a coordenada*,

$$= \bigvee_{j<\gamma} \Pi_{i<\lambda} f_i(X_{ij}).$$

Así, por definición de F

$$= \bigvee_{j<\gamma} F(\Pi_{i<\lambda}(X_{ij})) = \bigvee_{j<\gamma} F(X^j).$$

$\square$

Proposición 3.9. *Para $\lambda \leq \kappa$ un cardinal, hay un isomorfismo de álgebras booleanas $\varphi : P(\kappa) \to P(\kappa)^\lambda$, donde esta última es el algebra producto de λ veces $P(\kappa)$. Este isomorfismo lleva un singleton $\{a\}$ en elemento del algebra producto que tiene a $\{a\}$ en una coordenada y $\varnothing$ en el resto.*

Demostración. Si $\lambda \leq \kappa$ un cardinal, como κ es infinito, existen λ subconjuntos de κ disjuntos de cardinalidad κ, [14] digamos, $\{A_i\}_{i<\lambda}$. Cada A_i induce una proyección

$$\pi_i : P(k) \to A_i, \pi_i(X) = A_i \cap X,$$

Que es de hecho un morfismo completo sobreyectivo. Entonces definimos

$$\phi : P(\kappa) \to \Pi_{i<\gamma} A_i, \phi(X) = \pi_i(X)$$

Verificar que es un morfismo de álgebras booleanas es verificar operaciones de conjuntos.

[14] Por ejemplo, podemos notar que para κ infinito, hay 2 subconjuntos distintos de cardinalidad κ, y luego hacer inducción transfinita.

- $\phi(\varnothing) = \varnothing^\lambda = \varnothing$, $\phi(\kappa) = \Pi_{i<\gamma}\pi_i(A_i)$
- $\phi(A \cap B) = \Pi_{i<\gamma}\pi_i(A \cap B) = \Pi_{i<\gamma}A_i \cap (A \cap B) = \Pi_{i<\gamma}(A_i \cap A) \cap (A_i \cap B) = \Pi_{i<\gamma}(A_i \cap A) \cap \Pi_{i<\gamma}(A_i \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$
- $\phi(\kappa - A) = \Pi_{i<\gamma}\pi_i(\kappa - A) = \Pi_{i<\gamma}A_i \cap (\kappa - A) = \Pi_{i<\gamma}(A_i \cap \kappa) - (A_i \cap A) = \Pi_{i<\gamma}A_i - \Pi_{i<\gamma}(A_i \cap A) = \Pi_{i<\gamma}A_i - \Pi_{i<\gamma}\pi_i(A) = \Pi_{i<\gamma}A_i - \phi(A)$
- como tenemos intersección y complemento, la unión es gratis.

Por otro lado, para cada $i < \gamma$ tenemos un isomorfismo $f_i : P(A_i) \to P(\kappa)$, pues A_i, κ tienen misma cardinalidad. Definiendo $\psi = \Pi_{i<\gamma}f_i$, tenemos un isomorfismo de $\Pi_{i<\gamma}P(A_i)$ en $\Pi_{i<\gamma}P(\kappa)$. Entonces la compuesta $\varphi = \psi \circ \phi$ es el morfismo buscado. Para ver que es en efecto un isomorfismo, probamos que es biyectivo. Como ϕ es biyectivo, basta ver que ψ es biyectivo.

- Veamos que es sobreyectiva. Sea $\Pi_{i<\gamma}a_i \in \Pi_{i<\gamma}A_i$, es decir, $a_i \subseteq A_i$. Luego,
$$\psi(\bigcup_{i<\gamma} a_i) = \Pi_{i<\gamma}a_i.$$
- Veamos que es inyectiva. Si $\psi(X) = \psi(Y)$, entonces para cada i, $f_i(X) = f_i(Y)$, es decir, $X \cap A_i = Y \cap A_i$. Luego, como los A_i cubren a κ,
$$X = \bigcup_{i<\gamma} X \cap A_i = \bigcup_{i<\gamma} Y \cap A_i = Y.$$

Además, si hay un singleton $\{a\} \in P(\kappa)$, este está en sólo uno de los A_i (gracias a que son una partición). Entonces $f_i(\{a\}) = \{a\}$, y para $j \neq i$, $f_i(\{a\}) = \varnothing$. Es claro que el isomorfismo $f_i : A_i \to \kappa$ lleva $\{a\}$ en otro singleton $\{b\} \in P(\kappa)$. El resto de los f_j se evaluan en $\varnothing$, y queda $\varnothing$. Entonces, la imagen de $\{a\}$ por $\psi \circ \phi$ es un producto que en una coordenada tendrá a $\{b\}$, y en el resto a $\varnothing$. □

Teorema 3.4. *Sea κ un cardinal, con una $\{0,1\}$-medida $\mu : P(k) \to \{0,1\}$. Entonces para cada cardinal $\lambda \leq k$, existe una $p(\lambda)$-medida en k, $\nu : P(k) \to P(\lambda)$*

Demostración. Tomamos $\phi : P(\kappa) \to P(\kappa)^\lambda$ un isomorfismo de algebras booleanas, y $\mu^\lambda : P(\kappa)^\lambda \to \{0,1\}^\lambda$ el producto del morfismo μ que es κ-completo. Notemos que el algebra $\{0,1\}^\lambda$ es isomorfa a $P(\lambda)$, así que tomamos f un isomorfismo entre ellas. Entonces $\nu = f \circ \mu^\kappa \circ \phi : P(\kappa) \to P(\lambda)$ sirve.

- Siendo f un isomorfismo (y por ende completo), μ^κ un morfismo κ-completo, y μ^κ κ-completo, la composición $f \circ \mu^\kappa \circ \phi$ debe ser κ-completo.

- Es no trivial pues ϕ es no trivial. Como $\phi(\{a\})$ es un elemento del algebra producto de la forma
$$\Pi_{i<\kappa}A_i$$
con $A_j = \{b\}$ un singleton, y para $i \neq j$, $A_i = \varnothing$. Entonces es claro que
$$\mu^\kappa(\Pi_{i<\kappa}A_i) = \Pi_{i<\kappa}\mu(A_i) = \Pi_{i<\kappa}\varnothing = \varnothing.$$
Luego
$$f(\mu^\kappa(\phi(\{a\}))) = f(\mu^\kappa(\Pi_{i<\kappa}A_i)) = f(\varnothing) = \varnothing$$
- La compuesta $\mu^\kappa \circ \phi$ es sobreyectiva: μ sobreyectivo implica μ^κ sobreyectivo, y ϕ es biyectivo.

□

Corolario 3.5. *Sea κ_0 un cardinal real-valuado medible para una medida sin átomos. Si $\kappa > \kappa_0$ es un cardinal medible, entonces κ tiene una medida real-valuada κ_0-aditiva sin átomos.*

Demostración. Como $\kappa_0 < \kappa$, existe una $P(\kappa_0)-$medida en κ,
$$\mu : P(\kappa) \to P(\kappa_0).$$
Si κ_0 es real-valuado medible para una medida sin átomos , existe una medida
$$\nu : p(\kappa_0) \to [0, 1].$$
real-valuada y sin átomos κ_0. Sólo tomamos la compuesta
$$\nu \circ \mu : p(\kappa) \to [0, 1],$$
y verificamos que efectivamente es una medida.

- $\nu \circ \mu(\varnothing) = \nu(\mu(\varnothing)) = nu(\varnothing = \varnothing$, $\nu(\mu(\kappa)) = \nu(\kappa_0) = 1$
- $\nu(\mu\{a\})) = \nu(\varnothing) = 0$
- Ambas respetan la inclusión: si $A \subseteq B$, como mu la respeta $\mu(A) \subseteq \mu(B)$, y luego como ν la respeta $\nu(\mu(A)) \subseteq$.
- Mostramos que la compuesta es κ_0-aditiva. Sean $A_i, i < \gamma, \gamma < \kappa_0$ disjuntos en κ. Notemos primero que para $i \neq j$, los $\mu(A_i), \mu(A_j)$ son disjuntos en $P(\kappa_0)$:
$$\mu(A_i) \cap \mu(A_j) = \mu(A_i \cap A_j) = \mu(\varnothing) = \varnothing.$$
Como los $\{\mu(A_i)\}_{i<\gamma}$ son disjuntos en $P(\kappa_0)$ y ν es una medida κ_0-aditiva,
$$\mu(\nu(\bigcup_{i<\gamma} A_i)) = (\nu(\bigcup_{i<\gamma} \mu(A_i)) = \sum_{i<g} \nu(\mu(A_i)).$$

Probamos que la compuesta es sin átomos por contrarecíproco: si $\nu \circ \mu$ tiene un átomo A, entonces $\mu(A)$ es un átomo para ν. Supongamos que hay $\mu(B) \subseteq \mu(A)$ (μ sobreyectiva), tal que $\nu(\mu(A) - \mu(B)) \neq 0$. Para ver que $\mu(A)$ es un átomo para ν, basta probar que $\nu(\mu(B)) = 0$. Entonces, $B \subseteq A$, y $\nu(\mu(A \setminus B)) = \nu(\mu(A) - \mu(B)) \neq 0$. Como A es un átomo para la compuesta $\nu \circ \mu$, esto implica $\nu(\mu(B) = 0$. □

3.2.6. Átomos e inaccesibilidad

Aquí utilizamos los resultados sobre átomos de 3.2.4 para demostrar la inaccesibilidad de un cardinal κ en terminos de álgebras booleanas. Este claramente implica la parte que refiere a una medida con un átomo en 3.3.

Teorema 3.5. *Un cardinal κ es B-medible, para B con un átomo si y solo si κ es medible.*

Demostración. Primero probamos $(\rightarrow)$. Tomamos μ la B-medida, es decir, un morfismo κ-completo, no trivial, sobreyectivo, y $\nu : B \to \{0, 1\}$ el morfismo completo producido en el lema. Entonces la compuesta $\nu \circ \mu$:

$$\mu : P(\kappa) \to B, \nu : B \to \{0, 1\}.$$

es una $\{0, 1\}$-medida para $P(\kappa)$. Notar que μ κ-completo y ν completo hacen que la composición sea κ-completo. Ambos sobreyectivos hace de la composición sobreyectiva. La compuesta es no trivial: $\nu \circ \mu(\{a\}) = \nu(\mu(\{a\})) = \nu(0) = 0$. Para ver $(\leftarrow)$, observamos que si κ es medible, por 3.6 tal medida es una $\{0, 1\}$-medida como algebra booleana. □

Corolario 3.6. *Si un cardinal κ es B-medible, con B de saturación finita, entonces κ es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Si es de saturación finita, ya probamos que es un $P(\{a_1, ..., a_n\})$, y tiene átomos (cada singleton $\{a_i\}$). □

Este resultado responde positivamente la mitad de la pregunta 1. Efectivamente si un cardinal κ tiene un ideal no trivial κ-completo de cualquier saturación finita, este es inaccesible.

3.2.7. La segunda pregunta

La respuesta a la pregunta 3.2.1, que parecía natural, es negativa y es bastante sencilla.

Proposición 3.10. *No existen álgebras booleanas de saturación $\aleph_0$.*

Demostración. Supongamos que existe un álgebra **B** de saturación $\aleph_0$. Existe entonces una anticadena de largo n menor que $\aleph_0$, es decir finita. En tal caso, su saturación debería ser $n+1$ $\square$

Bibliografía

[1] Keith Devlin. *The Joy of Sets*. Springer-Verlag, 1993.

[2] Paul Halmos y Steven Givant. *Introduction to Boolean Algebras*. Springer, 1993.

[3] Thomas Jech. *Set Theory*. Fourth edition. Springer, 2002.

[4] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite*. Second edition. Springer, 2003.

[5] Kenneth Kunen. *The Foundations of Mathematics*. Second edition. College Publications, 2009.

[6] Robert M. Solovay. "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable". En: *The annals of Mathematics* (1970).