UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UNA INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

Tesina Licenciatura en Matemática

ROMINA TOLEDO ASTUDILLO

Docente guía:
Jacqueline Ojeda

Abril 2020

i stand
on the sacrifices
of a million women before me
thinking
what can i do
to make this mountain taller
so the women after me
can see farther

legacy - rupi kaur

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Desde principios del siglo XX, e incluso antes, el área que dominó los avances en el Análisis Funcional fue la teoría de espacios normados. Esto, tras años de estudio acerca del dual de un espacio y la continuidad de aplicaciones lineales. La idea de una norma definida sobre un espacio hizo posible trabajar con conceptos conocidos del cálculo al otorgar una idea de "cercanía" y "distancia" entre los vectores de un espacio vectorial o, en particular, entre los elementos de un espacio de funciones, como deseaban los matemáticos de la época.

Entre otras ventajas de los espacios normados estaba la adaptación de conceptos topológicos al Análisis Funcional, sin embargo, permanecía la sensación de que no se les lograba sacar el provecho suficiente, por lo que, con el pasar del tiempo se fueron debilitando algunas propiedades, de manera que se obtenían nuevas generalizaciones de los espacios normados que continuaban permitiendo ampliar el estudio de los espacios de funciones aplicándoles propiedades topológicas. Fue en esa época que aparecieron los conceptos de espacio perfecto, espacios de topología fuerte y espacios de Fréchet. Todos ellos casos particulares de lo que, en 1935 John Von Neumann bautizó como "espacios convexos" y actualmente reconocemos como un tipo particular de un concepto aún más amplio: los "espacios vectoriales topológicos", materia central de estudio del presente documento.

Maurice Fréchet fue, sin duda, uno de los matemáticos que más aportó en esta nueva teoría desde sus inicios, presentando en su tesis doctoral unos primeros ejemplos de este tipo de espacios y, más tarde, demostró la continuidad de las funciones suma y multiplicación por escalar. Sin embargo, puso mayor énfasis en la posibilidad de definir normas en ellos y esta fue la tónica que siguieron los demás matemáticos en los años siguientes. Tiempo más tarde, fue Stefan Banach quién volvió a trabajar con este concepto, designando a tales espacios como *espacios de tipo (F)*, y fue capaz de demostrar que algunos resultados importantes de la teoría de espacios normados podían adaptarse a los espacios vectoriales topológicos.

Fue en 1933 que Stanislaw Mazur fue capaz de adaptar el teorema de Hahn-Banach en su versión geométrica a aquellos espacios cuya topología coincide con su estructura lineal (es por ello que es posible hallar literatura que tal versión es nombrada como *teorema de Mazur*). Tal teorema es considerado uno de los resultados centrales en el Análisis Funcional y en conjunto con los espacios localmente convexos continúan siendo una parte importante en el desarrollo de la teoría de espacios vectoriales topológicos, por lo que ambos forman parte fundamental de este texto.

La presente tesina se divide de la siguiente manera:

En el **Capítulo 1**, se presentan conceptos de teoría de conjuntos y relaciones de orden, topología y álgebra lineal que serán utilizados a lo largo del documento, son de especial relevancia aquellos que pertenecen a la subsección Filtros y a la sección Álgebra Lineal, puesto que los conceptos *filtro de vecindades, conjunto absorvente y conjunto balanceado* serán utilizados frecuentemente en la obtención de resultados de la teoría de espacios vectoriales topológicos. Las demás subsecciones en la sección 2.2 cumplen con el objetivo de otorgar una pincelada general al uso de filtros y cómo conceptos que han sido estudiados anteriormente en el estudio de la Topología general pueden ser adaptados a ellos.

En el **Capítulo 2** se presentan propiedades generales de los espacios vectoriales topológicos, la adapación de conceptos provenientes de la Topología General y una caracterización de este tipo de espacios que será utilizada frecuentemente durante el resto del documento, además de ejemplos que faciliten la comprensión de los conceptos.

En el **Capítulo 3** se profundiza en un tipo especial de espacios vectoriales topológicos: los espacios localmente convexos, los que corresponden a una generalización de los espacios normados. Debido a esta relación es, sin duda, la sección de mayor importancia aquella que trata la relación de este tipo de espacios con el uso de seminormas, función que se distingue de una norma en el hecho que no es necesario que un elemento sea nulo para que su norma lo sea.

Para concluir, en el **Capítulo 4** se presentan las versiones geométrica y analítica del teorema de Hahn-Banach, resultado que fue anteriormente estudiado en el curso de Análisis Funcional y trata la posiblidad de extener un funcional lineal definido sobre un subespacio lineal al espacio en su totalidad, evidenciando aún más la conexión entre espacios vectoriales topológicos localmente convexos y espacios normados, puesto que la versión anteriormente estudiada estaba expresada en términos de los segundos.

Capítulo 2

Preliminares

Se presentan los conceptos básicos que serán utilizados durante el texto, incluyendo resultados y ejemplos relevantes para el desarrollo de capítulos posteriores. Se categorizan en tres secciones: Conjuntos y Orden, Topología (en la que se presentan los conceptos de filtro y espacio uniforme, además de definiciones de convergencia acorde a ellos) y Álgebra Lineal.

2.1. Conjuntos y Orden

En esta sección consideramos $(X, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío.

Definición 2.1.1 *Se dice que un conjunto $(X, \leq)$ es un conjunto dirigido, si $\leq$ es una relación sobre X tal que, para $x, y, z \in X$*

(i) *Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$;*

(ii) *Cualquiera sea $x \in X$, $x \leq x$;*

(iii) *Para cualesquiera x, y, existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$.*

En otras palabras, un conjunto dirigido es un conjunto ordenado con una relación reflexiva, transitiva y donde cada par de elementos es acotado superiormente.

Definición 2.1.2 *Sea $x_0 \in X$, el conjunto $\{x \in X : x_0 \leq x\}$ es llamado* ***sección de X*** *o, más precisamente, sección de X generada por x_0.*

Definición 2.1.3 *Se dice que $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ es una* ***familia dirigida*** *si A es un conjunto dirigido. Las secciones de una familia dirigida son las correspondientes subfamilias $\{y_\alpha : \alpha_0 \leq \alpha\}$ para $\alpha_0 \in A$.*

En el desarrollo de la teoría de espacios vectoriales topológicos será de utilidad hacer uso de un resultado equivalente al axioma de elección: el Axioma del Máximo. Para ello es necesario presentar la definición de *cadena*:

Definición 2.1.4 *Sea X un conjunto cualquiera. Una colección $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X es llamada **cadena** si, considerando dos elementos de $\mathscr{C}$, uno está contenido en el otro.*

Axioma del Máximo: Sea $\mathscr{S}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X y $\mathscr{C}$ una cadena contenida en $\mathscr{S}$, existe una cadena maximal $\mathscr{M}$ tal que $\mathscr{C} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{S}$.

2.2. Topología

2.2.1. Filtros

Definición 2.2.1 *Sea X un conjunto. Una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X es llamado un **filtro sobre** X si cumple las siguientes condiciones:*

F1 *X es una colección no vacía y el conjunto vacío $\emptyset$ no pertenece a $\mathscr{F}$.*

F2 *La intersección de dos elementos cualesquiera pertenecientes a la familia también pertenece a la familia.*

F3 *Cualquier conjunto que contenga a un conjunto de $\mathscr{F}$ también pertenece a $\mathscr{F}$.*

Ejemplos de filtro:

1. Sea X un conjunto infinito. La colección de todos los complementos de subconjuntos finitos de X son elementos de un filtro. En el caso que $X = \mathbb{N}$ se llama *filtro de Frechet.*

2. La colección de todos los conjuntos que contienen a un subconjunto A no vacío de un conjunto X es un filtro sobre X.

3. Sea X un espacio topológico. Recordemos que, para $x \in X$, un subconjunto U de X se llama *vecindad de x* si $x \in \mathring{U}$.
   Luego, el conjunto de todas las vecindades de x es un filtro sobre X llamado ***filtro de vecindades de x***, denotado por $\mathscr{F}(x)$.

Este último ejemplo será importante para el desarrollo de la teoría de espacios vectoriales topológicos, ya que por propiedades que serán probadas más adelante, siempre será posible realizar el estudio del comportamiento de un EVT a partir del comportamiento en un punto particular, el que se realizará mediante sus vecindades.

Teorema 2.2.1 *Dado un espacio topológico X y un punto $x \in X$, el filtro $\mathscr{F}(x)$ satisface las siguientes propiedades :*

N1 *$\forall A \in \mathscr{F}(x), x \in A$;*

N2 *$\forall A \in \mathscr{F}(x), \exists B \in \mathscr{F}(x) \colon \forall y \in B, A \in \mathscr{F}(y)$.*

Demostración:

N1 *Inmediato por definición de filtro de vecindades.*

N2 *Sea τ la topología sobre X. Sea $A \in \mathscr{F}(x)$. Se tiene que $x \in \mathring{A}$, es decir, existe una vecindad abierta $B \in \tau$ tal que $x \in B$, luego $B \in \mathscr{F}(x)$, y $B \subset A$. Sea un elemento cualquiera $y \in B$, $y \in A$. Por tanto, $y \in \mathscr{F}(y)$.*

$\square$

Definición 2.2.2 *Una familia $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X define una **base de filtro** si cumple:*

BF1 *$\mathscr{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathscr{B}$;*

BF2 *Si $B_1 \in \mathscr{B}$ y $B_2 \in \mathscr{B}$, existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Cada base de filtro genera un único filtro $\mathscr{F}$ sobre X tal que $F \in \mathscr{F}$ si, y sólo si,existe un $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset F$. En este contexto, $\mathscr{B}$ es llamada ***base del filtro*** $\mathscr{F}$.

Ejemplo de base filtro

Sea X un conjunto no vacío. Consideramos una sucesión infinita $S = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se define el *filtro $\mathscr{F}$ asociado a S* como a la familia de subconjuntos de X tales que cada subconjunto contiene a todos los elementos $x_1, x_2, ...$ excepto una cantidad finita de ellos.
Se definen los subconjuntos de X, $S_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión de subconjuntos $S = S_1 \supset S_2 \supset ...S_n \supset ...$ es una base del filtro asociado a S.
En efecto, sea $F \in \mathscr{F}$ y x_j el mayor término de la sucesión que no pertenece a F, entonces $S_{j+1} \subset F$.

Definición 2.2.3 *Sean $\mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$ dos filtros sobre un mismo conjunto, se dice que $\mathscr{F}_1$ es **más fino que** $\mathscr{F}_2$ si $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1$.*

Un concepto de interés en el estudio de los filtros es el de *ultrafiltro*, sin embargo, este concepto no será estudiado en profundidad en este documento. A continuación se presentará únicamente su definición.

Definición 2.2.4 *Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre un conjunto X. $\mathscr{F}$ es un **ultrafiltro** si no existe un filtro $\mathscr{G}$ de X tal que $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G}$.*

Por el lema de Zorn se puede asegurar la existencia de tal filtro sobre cualquier conjunto X.

Definición 2.2.5 *Si $\{x_\alpha\colon \alpha \in A\}$ es una familia dirigida en X, las imágenes x_α de las secciones de A forman una base de filtro sobre X. El filtro correspondiente recibe el nombre de **sección filtro** de la familia.*

2.2.2. Continuidad y Convergencia

De manera similar a como se pudieron definir las ideas de continuidad y convergencia a partir de la base de una topología, estos conceptos pueden ser adaptados al uso de filtros de vecindades.
Para presentar tales conceptos, en esta sección, consideramos a f como una función de X a Y, donde ambos conjuntos son espacios topológicos.

Definición 2.2.6 *Sea $\mathscr{U}$ el filtro de vecindades de $x \in X$ y $\mathscr{B}$ el filtro de vecindades de $f(x)$, f es una* ***función continua en*** *$x \in X$ si el filtro sobre Y generado por la base $f(\mathscr{U})$ es más fino que $\mathscr{B}$.*

Definición 2.2.7 *Un filtro $\mathscr{F}$ sobre X* ***converge a*** *$x \in X$ si $\mathscr{F}$ es más fino que el filtro de vecindades de x.*

Definición 2.2.8 *Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre X, se dice que f* ***converge a*** *$y \in Y$* ***mediante*** *$\mathscr{F}$ si el filtro generado por $f(\mathscr{F})$ converge a y.*

Definición 2.2.9 *Dado un filtro $\mathscr{F}$ sobre X y $x \in X$, x* ***es un punto adherente de*** *$\mathscr{F}$ si $x \in \bar{F}$ para cada $F \in \mathscr{F}$.*

2.2.3. Espacios Uniformes

Sea X un conjunto no vacío y V, W subconjuntos arbitrarios de $X \times X$, se introduce la siguiente notación:

$$
\begin{aligned}
W^{-1} &= \{(y,x) : (x,y) \in W\} \\
V \circ W &= \{(x,z) : \exists y \in X/(x,y) \in W \wedge (y,z) \in V\} \\
\Delta &= \{(x,x) : x \in X\}
\end{aligned}
$$

Definición 2.2.10 *Una* ***uniformidad*** *sobre un conjunto X dado es un filtro $\mathscr{U}$ sobre $X \times X$ tal que:*

U1 $\Delta \subset W, \quad \forall W \in \mathscr{U}$*;*

U2 *$D \in \mathscr{U}$ implica $D^{-1} \in \mathscr{U}$;*

U3 *para cada $W \in \mathscr{U}$, existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $V \circ V \subset W$.*

Cada elemento de la uniformidad es llamado **vecindad** de la uniformidad.

Se llama ***espacio uniforme*** al par $(X, \mathscr{U})$. Además, a partir de tal uniformidad puede ser derivada una topología sobre el espacio.

En efecto, definimos para cada $x \in X$ el conjunto $W(x) := \{y\colon (x,y) \in W\}$ con $W \in \mathscr{U}$, esta familia forma una base de vecindades de x.

Se define $\mathscr{G} := \{G \subset X : (x \in G \Rightarrow \exists W \in \mathscr{U} \quad /W(x) \subset G)\}$, la que resulta ser una colección invariante bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias.

En efecto,

- Para la intersección finita, basta con probar que la intersección de dos elementos está contenida en $\mathscr{G}$.
  Sean $G_1, G_2 \in \mathscr{G}$.
  Sin pérdida de generalidad, suponemos $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} x \in G_1 \cap G_2 &\Rightarrow x \in G_1 \wedge x \in G_2 \\ &\Rightarrow \exists W_1, W_2 \in \mathscr{U} : W_1(x) \subset G_1 \wedge W_2(x) \subset G_2 \end{aligned}$$

  Luego, considerando $W(x) = W_1(x) \cap W_2(x)$, se tiene que $W(x) \subset G_1 \cap G_2$.
  Así, $G_1 \cap G_2 \in \mathscr{G}$.

- Sean G_i $(i \in I)$ elementos de $\mathscr{G}$.Se tiene que para, cualquiera sea $i \in I$, sea $x \in G_i$, entonces que existe un $W_i \in \mathscr{G}$ tal que $W_i(x) \subset G_i$.
  Luego, de manera bastante inmediata se puede notar:

  $x \in \bigcup\limits_{i\in I} G_i \Rightarrow x \in G_j$ para algún $j \in I$.
  Luego, existe $W \in \mathscr{G}$ tal que $W(x) \subset G_j$, en particular, $W(x) \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i$.
  Por tanto $\bigcup\limits_{i\in I} G_i \in \mathscr{G}$.

De esta manera, $\mathscr{G}$ define una topología sobre X llamada **topología uniforme**.

Definición 2.2.11 *Una colección $\mathscr{B}$ de subconjuntos de $X \times X$ es una **base de una uniformidad** $\mathscr{U}$ si cumple las siguientes condiciones:*

i $\Delta \subset D \quad \forall D \in \mathscr{B}$;

ii $D \in \mathscr{B} \Rightarrow \exists E \in \mathscr{B}$ *tal que* $E \subset D^{-1}$;

iii $D \in \mathscr{B} \Rightarrow E \circ E \subset D$ *para algún* $E \in \mathscr{B}$.

Se puede estudiar un ejemplo de base de una uniformidad sobre $\mathbb{R}^n$ introduciendo el concepto de *pseudométrica*.
De manera general, sea X un espacio no vacío, y sea $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función que satisface:

a $\rho(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Delta$;

b $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

c $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Esta función genera una uniformidad sobre $\mathbb{R}^n$ al considerar como base a la familia de conjuntos $U_\epsilon = \{(x,y) \colon \rho(x,y) < \epsilon\}$

i La primera propiedad es inmediata por la definición de pseudométrica.

ii Sea U_ϵ un elemento de la familia, ${U_\epsilon}^{-1} = \{(y,x) \colon \rho(y,x) = \rho(x,y) < \epsilon\}$. Luego ${U_\epsilon}^{-1} = U_\epsilon$ y es inmediato que $U_\epsilon \subset {U_\epsilon}^{-1}$.

iii Sea U_α un elemento de nuestra colección. Buscamos un elemento U_β tal que $U_\beta \circ U_\beta \subset U_\alpha$.
Se puede asegurar que, sea $(x,y) \in U_\beta \circ U_\beta$, $(x,y) \in U_\alpha$ si $\rho(x,y) < \frac{\alpha}{2}$.
En efecto, sea $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x,z) \in U_\beta$ y $(z,y) \in U_\beta$, se tiene que

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) < 2\beta$$

Luego, se cumple que $\rho(x,y) < \alpha$ para cualquier $\beta < \frac{\alpha}{2}$.
En particular, escogiendo $\beta = \frac{\alpha}{2}$, se tiene que $U_\beta \circ U_\beta \subset U_\alpha$.

Por tanto la colección de todos los U_ϵ con $\epsilon > 0$ forma una base para una uniformidad en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2.12 *Un espacio topológico se dice que es **uniformizable** si su topología puede ser derivada de una uniformidad sobre X.*

Teorema 2.2.2 *Un espacio topológico Hausdorff es uniformizable si, y sólo si, es completamente regular.*

Demostración en [13].

Definición 2.2.13 *Una uniformidad $\mathscr{U}$ se dice **separada** si se cumple que $\cap\{W : W \in \mathscr{M}\} = \Delta$.*

Ejemplo de esto es cuando la uniformidad es determinada por una pseudométrica ρ. Tal uniformidad es separada si, y sólo si, $\rho^{-1}(0) = \Delta$, es decir, cuando ρ es una métrica.

En el contexto de espacios uniformes también existen funciones que preservan la estructura, las que se definen de la siguiente manera:

Definición 2.2.14 *Sea $f \colon X \to Y$ una función entre espacios uniformes, f es **uniformemente continua** si para cada vecindad V de Y, existe una vecindad U de X tal que $(x,y) \in U$ implica $(f(x), f(y)) \in V$.*

Definición 2.2.15 *Se dice que X e Y son **isomorfos** si existe una aplicación $f\colon X \to Y$ biyectiva tal que f y f^{-1} son uniformemente continuas. Bajo esta condición f se llama **isomorfismo uniforme**.*

Tras la definición de estos conceptos es posible presentar definiciones distintas a las que se han estudiado anteriormente de *sucesiones de Cauchy* y *espacios completos*, las que se presentan a continuación:

Sea X un espacio uniforme.

Definición 2.2.16 *Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre X, este es un **filtro de Cauchy** si para cada vecindad V, existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \times F \subset V$.*

Definición 2.2.17 *Si en X todo filtro de Cauchy converge, se dice que X es **completo**.*

Proposición 2.2.1 *En un espacio uniforme, todo filtro convergente es un filtro de Cauchy.*

Demostración en [1].

Definición 2.2.18 *Una **sucesión de Cauchy** en X es una sucesión cuya sección filtro es un filtro de Cauchy.*

Si toda sucesión de Cauchy en X converge, se dice que X es **semicompleto** o **completo secuencialmente**.

2.3. Álgebra Lineal

Consideramos a L un espacio vectorial sobre K.

Definición 2.3.1 *Sea A un subconjunto de L, $M = \cap\{K\colon K$ subespacio de L y $A \subset K\}$ es la **envoltura (o cápsula) lineal de A**. También recibe el nombre de subespacio de L generado por A.*

Definición 2.3.2 *Sea K un campo. Una función $K \to \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda \mapsto |\lambda|$ es llamada **valor absoluto sobre** K si cumple*

1. $|\lambda| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$;
2. $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$;
3. $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$.

*La función $(\lambda, \mu) \mapsto |\lambda - \mu|$ es una métrica sobre K. Dotada de esta métrica y su correspondiente uniformidad, K es llamado **campo valuado**.*

Tal campo valuado es **no-discreto** si su topología no lo es. *(Recordemos que la topología discreta es aquella que considera como únicos abiertos al conjunto en su totalidad y al conjunto vacío $\emptyset$)* . Este tipo de campo necesariamente es infinito.

Definición 2.3.3 *Un subconjunto U de L se dice **absorvente** si para cualquier $x \in L$ existe $\rho > 0$ tal que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ que cumpla $|\lambda| \leq \rho$, se tiene que $\lambda x \in U$.*

Definición 2.3.4 *Un subconjunto C de L es **balanceado** si $\lambda C \subset C$ cuando $|\lambda| \leq 1$.*

Definición 2.3.5 *Si $A \subset L$, $\cap\{B \subset L\colon A \subset B \wedge B$ es balanceado $\}$ se llama **envoltura (o cápsula) balanceada de** A.*

Un ejemplo simple que facilita la comprensión de estas caracterizaciones es el siguiente:

Los polinomios $\mathbb{R}[x]$ conforman un conjunto balanceado pero no absorvente. En efecto, el múltiplo de cualquier polinomio será un polinomio también, sin embargo, no toda función continua puede ser escrita como el múltiplo de un polinomio.

Por otro lado, en un espacio normado las bolas unitarias centradas en el origen son, a la vez, absorventes y balanceadas.

En efecto, sea X tal espacio y $\overline{B(0,1)} = \{x \in X\colon ||x|| \leq 1\}$.
Sea a un elemento cualquiera de X. Considerando $\lambda_0\colon = \frac{1}{||a||}$, se tiene que $\lambda_0||a|| \in \overline{B(0,1)}$. Luego, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq \lambda_0$, se tiene que $\lambda a \subset \overline{B(0,1)}$ ya que $||\lambda a|| \leq ||\lambda_0 a|| = \lambda_0||a||$. Por tanto, es un conjunto absorvente.
Además, es inmediato notar que $\overline{B(0,1)}$ es balanceado: Cualquiera sea $y \in \overline{B(0,1)}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$, se tiene $||\lambda y|| = |\lambda| \cdot ||y|| \leq 1 \cdot 1 = 1$

$\square$

Sobre este tipo de conjuntos, es posible notar fácilmente tres cosas:

- Cualquier conjunto que contenga a un conjunto absorvente es, a su vez, absorvente.
- Sea $x \in U$, el segmento que une a x con $-x$ estará contenido en U si U es balanceado.
- 0 pertenece a cualquier conjunto absorvente o balanceado.

Por último, se presentan a continuación algunos resultados del álgebra que serán útiles para el desarrollo de la teoría de espacios vectoriales topológicos:

1. La colección de subconjuntos absorventes de L es invariante bajo intersecciones finitas.
2. La colección de subconjuntos balanceados de L es invariante bajo intersecciones arbitrarias.

3. Sea una aplicación $f\colon L_1 \to L_2$ lineal con L_1, L_2 espacios vectoriales sobre un campo valuado no-discreto.

    a) Si $A \subset L_1$ y $B \subset L_2$ son balanceados entonces $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ son balanceados.

    b) Si $B \subset L_2$ es absorvente, su preimagen $f^{-1}(B)$ es absorvente.

    c) Si $A \subset L_1$ es absorvente y f sobreyectiva entonces $f(A)$ es absorvente.

Capítulo 3

Espacios Vectoriales Topológicos

Si bien en los preliminares se presentó el concepto de campo valuado, que corresponde a un concepto más general, desde este capítulo en adelante $\mathbb{K}$ corresponderá al campo de los números reales $\mathbb{R}$ o al campo de los números complejos $\mathbb{C}$.

3.1. Propiedades y Primeros Resultados

Definición 3.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, se dice que el par (X, τ) es un* ***espacio vectorial topológico*** *si X está provisto de tal topología τ compatible con la estructura de espacio vectorial de X, es decir, es tal que ambas operaciones vectoriales son continuas.*

De manera más precisa, se requiere que

LT1 *$(x, y) \to x + y$ sea continua sobre $X \times X$ hacia X.*

LT2 *$(\lambda, x) \to \lambda x$ sea continua sobre $\mathbb{K} \times X$ hacia X*

Donde estamos considerando que $\mathbb{K}$ está provisto de la topología derivada de su valor absoluto y los espacios $\mathbb{K} \times X$ y $X \times X$ denotan los respectivos productos topológicos.

Nota: En el texto se utilizará la abreviación EVT para referirse a este tipo de espacios.

Ejemplos Espacios Vectoriales Topológicos

1. Un ejemplo simple de este tipo de espacios es un espacio vectorial arbitrario sobre $\mathbb{K}$ dotado de la topología trivial.

   Sea L tal espacio.

- Se define la función suma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s\colon L\times L &\to L \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

  Los únicos abiertos en L son L y $\emptyset$. Luego, el único elemento básico es L. Mientras que, en el espacio producto, el único elemento básico es $L\times L$, por el mismo argumento. Por tanto, sea $(x,y)\in L\times L$, al ser s una función bien definida no queda más opción que $s(x,y)\in L$, es decir, $s(L\times L)\subset L$. Así, s es una función continua.

- Se define la función producto por escalar:

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{K}\times L &\to L \\ (\lambda,x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

  Sea $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times L$, cualquiera sea $r>0$, se puede considerar el elemento básico $B_r(\lambda)\times L$, donde $B_r(\lambda)$ es la bola de centro λ y radio r correspondiente a la métrica definida en $\mathbb{K}$. Se tiene que $(\lambda,x)\in B_r(\lambda)\times L$ y $p(B_r(\lambda)\times L)\subset L$. Por tanto, p es continua.

2. Todo espacio vectorial normado dotado con la topología dada por la métrica inducida por la norma es un EVT.

   Sea X tal espacio.

   - Se define la función suma:

$$\begin{aligned} s\colon X\times X &\to X \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

     Cualquiera sea $\epsilon>0$ arbitrario, se puede notar que, por desigualdad triangular:

$$\|x+y-(z+w)\|\le\|x-z\|+\|y-w\|<\epsilon$$

     Por equivalencia de normas, es válido considerar en $X\times X$ la norma $\|(x,y)-(z,w)\|:=\|x-z\|+\|y-w\|$.
     Luego sea $(z,w)\in B_r((x,y))$ la bola de radio r y centro (x,y), se tiene $\|(x,y)-(z,w)\|<r$.
     Eligiendo $r=\epsilon$, se cumple que la función suma es continua.

- Nuevamente, de manera análoga al ejemplo anterior, se define la función producto por escalar:

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{K} \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

  Sea $\epsilon < 0$.
  Sean $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ y $x_0 \in X$ elementos fijos y sea $\delta > 0$ tal que $\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\| = |\lambda - \lambda_0| + \|x - x_0\| < \delta$. De esto, se puede notar que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ y $\|x - x_0\| < \delta$.
  Notar también que $|\lambda| \leq |\lambda - \lambda_0| + |\lambda_0|$.
  Luego, se tiene:

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| = \ & |\lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0\| \leq |\lambda|\|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0|\|x_0\| \\ & < \delta(|\lambda| + \|x_0\|) < \delta(|\lambda - \lambda_0| + |\lambda_0| + \|x\|) < \delta(\delta + |\lambda_0| + \|x\|) \end{aligned}$$

  De esta manera, se elige $\delta \in \mathbb{K}_{>0}$ tal que cumpla $\delta(\delta + |\lambda_0| + \|x\|) < \epsilon$ y se obtiene que la función p es también continua.

De manera análoga al estudio de espacios topológicos se pueden identificar distintos tipos de funciones:

Definición 3.1.2 *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación lineal y X, Y dos EVT sobre $\mathbb{K}$*

1. *f es un **homomorfismo topológico** si es continua y abierta.*
2. *f es un **monomorfismo topológico** si es un homomorfismo topológico inyectivo.*
3. *f es un **isomorfismo topológico** si es un homomorfismo topológico biyectivo.*

Definición 3.1.3 *Sean X_1 y X_2 dos EVT sobre un mismo espacio $\mathbb{K}$ y $u\colon X_1 \to X_2$. Diremos que u es un **isomorfismo entre EVT's** si es un isomorfismo lineal biyectivo.*

Teorema 3.1.1 *Sea X un EVT sobre $\mathbb{K}$, se cumple:*

(i) *Para cada $x_0 \in X$ y cada $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, $\lambda_0 \neq 0$, la aplicación $x \to \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X en X.*

(ii) *Para cualquier subconjunto A de X y cualquier base $\mathscr{U}$ de un filtro de vecindades de 0, $0 \in X$, se tiene que: $\bar{A} = \cap\{A + U : U \in \mathscr{U}\}$.*

(iii) *Si $A, B \subset X$, con A abierto, entonces $A + B$ es abierto.*

(iv) *Si $A, B \subset X$, con B un subconjunto cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.*

(v) *Si A es un subconjunto balanceado de X entonces su clausura $\bar{A}$ también lo es. Ahora, si $0 \in A$ entonces $\mathring{A}$ es balanceado.*

Demostración

(i) *No es difcil notar que la aplicación es, en efecto, inyectiva y sobreyectiva. Además, por los axiomas **LT1** y **LT2** es también continua al ser la composición de un producto por escalar y una suma, siendo su inversa $y \to (y - y_0)\lambda^{-1}$ continua a su vez, por argumento similar. Por tanto, la aplicación es un homeomorfismo.*

(ii) *Sea $B = \cap\{A + U : U \in \mathscr{U}\}$. Por (i), $\{x - U : U \in \mathscr{U}\}$ es una base de vecindades de x para cualquier $x \in X$.*
Sea $x \in B, x \in A + U \ \forall U \in \mathscr{U}$, luego $x - U \cap A \neq \emptyset$, es decir, toda vecindad de x intersecta a A. Luego $x \in \bar{A}$.
Sea $x \in \bar{A}$, por definición de clausura se tiene que $x \in A \cap (A + U) \ \forall U \in \mathscr{U}$. En particular, $x \in A + U \quad \forall U \in \mathscr{U}$. Luego, $x \in B$ y $\bar{A} \subset B$.
Así, $\bar{A} = \cap\{A + U : U \in \mathscr{U}\}$.

(iii) *Notar que $A + B = \bigcup\limits_{b \in B}(A + b)$. Por (**i**), toda traslación es un homeomorfismo, luego $A + b$ es un abierto, cualquiera sea $b \in B$. Por tanto, $A + B$ se puede expresar como una unión de abiertos de la forma $A + b$. Así, $A + B$ es un conjunto abierto.*

(iv) *Supongamos que $A+B$ no es un subconjunto cerrado en X, es decir, $A+B \subsetneq \overline{A + B}$.*
De esto, existe $x_0 \in \overline{A + B} \setminus A + B$.
Por definición, sea $\mathscr{U}$ una familia de vecindades de 0, para todo $U \in \mathscr{U}$ se tiene que $(x_0 - U) \cap (A + B) \neq \emptyset$, esto quiere decir que existe $z_0 \in (x_0 - U) \cap (A + B)$.
Se puede notar que $(x_0 - U) \cap (A + B) \neq \emptyset \Leftrightarrow (x_0 - A) \cap (B + U) \neq \emptyset$. Por tanto, $z_0 \in (x_0 - A)$ y $z_0 \in (B + U)$. luego, por (ii), se tiene que $B + U \subset \overline{B + U} = \cap\{B + U + U : U \in \mathscr{U}\}$.
De esto, $z_0 \in B + U + U, \forall U \in \mathscr{U}$ lo que implica $z_0 \in \bar{B} = B$, esto por el punto (ii) y por ser B un conjunto cerrado.
Luego, $x_0 = x_0 - z_0 + z_0 \in A + B$. Lo que contradice nuestro supuesto.
Por tanto, se cumple que $A + B = \overline{A + B}$.

(v) *Sea $|\lambda| \leq 1$. Al ser A balanceado se tiene que $\lambda A \subset A$ y, por la continuidad del producto por escalar, $\lambda\bar{A} \subset \bar{A}$.*

Sea $\lambda \neq 0$, por (i) $\lambda\mathring{A} = \overbrace{\lambda A}^{\circ}$, luego $\lambda\mathring{A} \subset \mathring{A}$. Si, además, consideramos que $0 \in A$, se tiene que, para $\lambda = 0$, $\lambda A = \{0\} \subset A$. Cumpliéndose así la contención para todo $|\lambda| \leq 1$, incluido $\lambda = 0$.

$\square$

El siguiente resultado nos asegura que la topología de un EVT está completamente determinada por el filtro de vecindades de cualquiera de sus puntos.

Corolario 3.1.1 *El filtro $\mathscr{F}(x)$ de vecindades de $x \in X$ coincide con la familia de los conjuntos $O + x$, $\forall O \in \mathscr{F}(0)$.*

Demostración:

Primero que todo, es evidente que, cualquiera sea $0 \in \mathscr{F}(0)$, $x \in O+x$ ya que $x = 0+x$ y $0 \in O$.
Resta probar que la familia de estos elementos es, efectivamente, $\mathscr{F}(x)$.

1. *Al ser $\mathscr{F}(0)$ un filtro, existe al menos un elemento 0 contenido en el conjunto. Luego, $x + O \in \mathscr{F}(x)$, lo que quiere decir que $\mathscr{F}(x) \neq \emptyset$.*
2. *Sean O_1, O_2 vecindades de 0, se tiene que $(x + O_1) \cap (x + O_2) = x + (O_1 \cap O_2)$, la que corresponde a una vecindad de x.*
3. *Sean $O_1 \in \mathscr{F}(0)$ y O un elemento cualquiera de $\mathscr{F}(0)$ tal que $O_1 \subset O$. Luego, se tiene que $x + O_1 \subset x + O$ y $x + O$ es vecindad de x, por tanto, $x + O \in \mathscr{F}(x)$.*

□

Definición 3.1.4 *Una topología τ sobre un espacio vectorial X es llamada* ***invariante por traslación*** *si todas las traslaciones $x \mapsto x + x_0$ son homeomorfismos.*

De Teorema 3.1.1 - *(i)* se puede asegurar que la topología de un EVT siempre es invariante por traslación.

Teorema 3.1.2 ***Caracterización de EVT***
Un filtro $\mathscr{F}$ sobre un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ será el filtro de vecindades del origen en una topología compatible con la estructura de espacio vectorial de L si, y sólo si cumple las siguientes propiedades:

1. *Cualquier sea $U \in \mathscr{F}$, $0 \in U$.*
2. *Para todo $U \in \mathscr{F}$, existe $V \in \mathscr{F}$ tal que $V + V \subset U$.*
3. *Para todo $U \in \mathscr{F}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, con $\lambda \neq 0$ se tiene $\lambda U \in \mathscr{F}$.*
4. *Todo $U \in \mathscr{F}$ es absorvente.*
5. *Todo $U \in \mathscr{F}$ contiene a un $V \in \mathscr{F}$ balanceado.*

Demostración necesidad:

1. *Es inmediato por hipótesis.*

2. *Sabemos que la función suma* $s(x,y) = x+y$ *es continua, por tanto, sea* U *un abierto de* X, $s^{-1}(U)$ *es un abierto de* $X \times X$ *y vecindad de* $(0,0)$. *Luego, contiene un elemento del tipo* $W_1 \times W_2$, *donde* $W_1, W_2 \in \mathscr{F}$. *Tomando* $V = W_1 \cap W_2$ *se cumple que* $V + V \subset U$.

3. *Por teorema anterior, se tiene que para* $\lambda \in \mathbb{K}$ *fijo no nulo, la aplicación*

$$\begin{aligned} f_\lambda \colon X &\to X \\ x &\mapsto f_\lambda(x) = \lambda^{-1}x \end{aligned}$$

   es continua. Por tanto, sea $U \in \mathscr{F}$, *su preimagen es una vecindad del origen también. Así,* $f_\lambda^{-1}(U) = \lambda U \in \mathscr{F}$.

4. *Supongamos que* $U \in \mathscr{F}$ *no es absorvente, por tanto, existe* $y \in X$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $\frac{1}{n}y \notin U$. *Sin embargo,* $\frac{1}{n}y \mapsto 0$. *Lo que resulta ser una contradicción ya que infinitos puntos de tal sucesión están en* U *puesto que es vecindad de* 0.

5. *Al trabajar en un EVT, sabemos que la función producto* $(\lambda, x) \to p(\lambda, x) = \lambda x$ *es continua, esto quiere decir que, para* $U \in \mathscr{F}$, $p^{-1}(U)$ *es una vecindad de* $(0, \theta) \in \mathbb{K} \times X$. *Por tanto,* $N \times W \subset p^{-1}(U)$, *donde* N *es una vecindad de* 0 *y* $W \in \mathscr{F}$. *Además, existe* $\rho > 0$ *tal que* $B_\rho(0) := \{\lambda \in \mathbb{K} \colon |\lambda| \leq \rho\} \subset N$.
   De esta manera, $B_\rho(0) \times W \subset p^{-1}(U)$, *es decir,* $\lambda W \subset U$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ *que cumpla* $|\lambda| \leq \rho$.
   De lo anterior, definiendo $V := \bigcup\limits_{|\lambda| \leq \rho} \lambda W \subset U$ *se tiene que, por 3., como para cada* $\lambda \neq 0$, $\lambda W \in \mathscr{F}$ *y luego se cumple también que* $V \in \mathscr{F}$.
   Finalmente, como $\forall x \in V, \exists \lambda \in \mathbb{K}$ *con* $|\lambda| \leq \rho$ *tal que* $x \in \lambda W$, *luego, para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *que cumpla* $|\alpha| \leq 1$ *se obtiene* $\alpha x \in \alpha\lambda W \subset V$, *esto ya que* $|\alpha\lambda| \leq \rho$. *esto quiere decir que, efectivamente,* V *es balanceado.*

Demostración suficiencia:

Suponemos que las propiedades 1., 2., 3., 4. y 5. se cumplen para un filtro $\mathscr{F}$ *del espacio vectorial* X.
Sea $x \in X$ *un elemento cualquiera, se puede definir el filtro* $\mathscr{F}(x) = \{U + x : U \in \mathscr{F}\}$, *el que es un filtro de vecindades de* x. *De esto, se cumple:*

- $\forall U \in \mathscr{F}$, *por 1. se tiene que* $0 \in U$. *Luego,* $\forall U \in \mathscr{F}$, $x = 0 + x \in U + x$, *es decir,* $\forall A \in \mathscr{F}(x)$, $x \in A$.

- *Sea* $A \in \mathscr{F}(x)$, *luego* $A = U + x$ *para algún* $U \in \mathscr{F}$. *Por 2., existe* $V \in \mathscr{F}$ *tal que* $V + V \subset U$. *Sea* $B := V + x \in \mathscr{F}(x)$ *e* $y \in B$, $V + y \subset V + B = V + V + x \subset U + x = A$. *Como* $V + y \in \mathscr{F}(y)$, *luego* $A \in \mathscr{F}(y)$.

Por teorema del Capítulo 1, existe una única topología τ sobre X tal que $\mathscr{F}(x)$ es el filtro de vecindades de cada punto $x \in X$ y para el cual, en particular, $\mathscr{F}$ es el filtro de vecindades del origen.

Con esto, resta demostrar la continuidad con respecto a τ de las funciones suma y multiplicación por escalar.

- *Se define la función suma:*

$$\begin{aligned} s\colon X \times X &\to X \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

  Sea $(x_0, y_0) \in X \times X$ y W una vecindad de su imagen $s(x_0, y_0) = x_0 + y_0$. Luego, $W = U + x_0 + y_0$ para algún $U \in \mathscr{F}$.
  Por 2., existe $V \in \mathscr{F}$ tal que $V+V \subset U$ y luego $(V+x_0)+(V+y_0) \subset U+x_0+y_0 = W$. De esto, $(V + x_0) \times (V + y_0) \subset s^{-1}(W)$, donde $(V + x_0) \times (V + y_0)$ es vecindad de (x_0, y_0).

- *Sea $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times X$ y $\widetilde{U}$ una vecindad de $\lambda_0 x_0$. Se cumple que $\widetilde{U} = U + \lambda_0 x_0$ para algún $U \in \mathscr{F}$. Por las propiedades 2. y 5., se obtiene que existe un elemento $W \in \mathscr{F}$ balanceado tal que $W + W + W \subset U$. Además, es absorvente por 4., esto quiere decir, que existe $\rho > 0$ tal que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ que cumpla $|\lambda| \leq \rho$ se tiene $\lambda x_0 \in W$. Consideramos dos casos distintos:*

  - *Supongamos $\lambda_0 = 0$. En este caso, se tiene que $\widetilde{U} = U$.*
    Notar que $Im(B_\rho(0) \times (W + x_0)) = \{\lambda w + \lambda x_0 \colon \lambda \in B_\rho(0) \wedge w \in W\}$ y como $\lambda \in B_\rho(0)$ y W es absorvente, $\lambda x_0 \in W$.
    Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $\rho \leq 1$. Luego, como $|\lambda| \leq \rho \leq 1$ para todo $\lambda \in B_\rho(0)$ y, al ser W balanceado, $\lambda W \subset W$.
    De esto, $Im(B_\rho(0) \times (W + x_0)) \subset W + W \subset W + W + W \subset U$.
    De esta manera, se cumple que la vecindad de $(0, x_0)$, $(B_\rho(0) \times (W + x_0)$ está contenida en $p^{-1}(U)$.
  - *Supongamos $\lambda_0 \neq 0$ y sea $\sigma = \min\{\rho, \lambda_0\}$. Luego, $Im((B_\sigma(0) + \lambda_0) \times (|\lambda_0|^{-1} W + x_0)) = \{\lambda |\lambda_0|^{-1} w + \lambda x_0 + \lambda_0 |\lambda_0|^{-1} w + \lambda_0 x_0 \colon \lambda \in B_\sigma(0) \wedge w \in W\}$.*
    Como $\lambda \in B_\sigma(0)$, $\sigma \leq \rho$ y W es absorvente, $\lambda x_0 \in W$. Además, como para todo $\lambda \in B_\lambda(0)$, $|\lambda |\lambda_0|^{-1}| \leq 1$ y $|\lambda_0 |\lambda_0|^{-1}| = 1$ y al ser W balanceado, $\lambda |\lambda_0|^{-1} W, \lambda_0 |\lambda_0|^{-1} W \subset W$.
    Por lo tanto, $Im((B_\sigma(0) + \lambda_0) \times (|\lambda_0|^{-1} W + x_0) \subset W + W + W + \lambda_0 x_0 \subset U + \lambda_0 x_0$, demostrándose así que la vecindad de (λ_0, x_0), $(B_\sigma(0) + \lambda_0) \times (|\lambda_0|^{-1} W + x_0)$ está contenida en $p^{-1}(U + \lambda_0 x_0)$.

$\square$

Ejemplo: Aplicación Teorema

Sea X un espacio topológico no vacío. $\mathbb{R}^X$ corresponde a la colección de todas las aplicaciones de X a $\mathbb{R}$.
Sea $L \in \mathbb{R}^X$ y $x \in X$, se denotará por L_x a su imagen en $\mathbb{R}$, $x \mapsto L_x$.

Sean $f, g \in \mathbb{R}^X$. Se definen la operación adición como $f + g \colon = (f_x + g_x)_{x\in X}$ y la multiplicación por escalar por $\lambda f \colon = (\lambda f_x)_{x\in X}$.

En particular, consideramos al subconjunto $\{f \colon X \to \mathbb{R} \quad / \quad \sup_{t\in X}|f(t)| < \infty\} \subset \mathbb{R}^X$. Este conjunto es un espacio vectorial $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(X)$ bajo las operaciones de adición y multiplicación por escalar heredadas inducidas por el espacio vectorial $\mathbb{R}^X$.
Los conjuntos $U_r = \{f \colon \sup_{t\in X}|f(t)| \leq r\}$ con $r \in \mathbb{R}_{>0}$ forman un filtro $\mathscr{F}$ de vecindades del origen sobre X tal que hace de X un EVT.

En efecto,

- $\mathscr{F}$ es un filtro sobre X

  1. Cualquiera sea $r \in \mathbb{R}$, $f \equiv r \in U_r$, luego ningún elemento U_r es vacío y, como esto se cumple para cualquier r, por más pequeño que sea, $\mathscr{F} \neq \emptyset$.
  2. Sea $U_r \in \mathscr{F}$ y $G \subset U_r$, por lema de Zorn, cualquiera sea $g \in G$ existe una cota real para los elementos g_x y luego, un supremo para todas las cotas. Sea tal supremo r', se tiene que $G = U_{r'}$. Así, $G \in \mathscr{F}$.
  3. Sean $U_{r_1}, U_{r_2} \in \mathscr{F}$, se tiene $U_{r_1} \cap U_{r_2} = U_r$ donde $r = \min\{r_1, r_2\}$. Es evidente que tal elemento pertenece a $\mathscr{F}$.

- El filtro cumple con las propiedades *(i),(ii),(iii),(iv)(v)* de Teorema 3.1.2

  1. De manera inmediata se puede notar que cualquiera sea $r \in \mathbb{R}$, se tiene que $f \equiv 0 \in U_r$.
  2. Cualquiera sea $U_r \in \mathscr{F}$ y $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned}\lambda U_r &= \{\lambda f \colon \sup_{t\in X}|f(t)| \leq r\} = \{g \colon \sup_{t\in X}\left|\frac{g}{\lambda}(t)\right| \leq r\}\\ &= \{g \colon \sup_{t\in X}|g(t)| \leq |\lambda| r\} = U_{|\lambda|r} \in \mathscr{F}.\end{aligned}$$

  3. Sea $U_r \in \mathscr{F}$, escogiendo $r' \leq \frac{r}{2}$, se cumple que $U_{r'} + U_{r'} \subset U_r$.
  4. Sea f un elemento cualquiera de $\{f \colon X \to \mathbb{R} \quad / \quad \sup_{t\in X}|f(t)| < \infty\}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\sup_{t\in X}|f(t)| < \alpha$.

Sea $\rho = \frac{r}{\alpha}$ y $|\lambda| < \rho$, se tiene que $\sup_{t \in X} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in X} |f(t)| \leq \rho \cdot \alpha = r$. Es decir, $\lambda f \in U_r$.

Así, cualquiera sea $U_r \in \mathscr{F}$, es un conjunto absorvente.

5. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Por 2. se tiene que $\lambda U_r = U_{|\lambda| r}$, como $|\lambda| r \leq r$, se tiene que $\lambda U_r \subset U_r$, es decir, U_r es balanceado.

De esta manera, podemos notar que al momento de trabajar en un EVT, es posible simplificar el análisis de su comportamiento al de las vecindades del origen, las que cumplen con propiedades bastante convenientes para la obtención de futuros resultados.

Teorema 3.1.3 *Sean X un EVT y $x \in X$, cada vecindad de x contiene una vecindad cerrada de x. En particular, la familia de todas las vecindades cerradas de 0 forman una base de vecindades en 0.*

Demostración:

Sea U una vecindad de 0, existe otra vecindad de 0, V, tal que $V + V \subset U$. Como $y \in \bar{V}$ si, y sólo si, $(y - V) \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $\bar{V} \subset V + V$. Así, $x + \bar{V} \subset x + U$.

□

De este resultado se puede inferir que cualquier EVT Hausdorff es un espacio topológico regular.

Definición 3.1.5 *Se llama* ***uniformidad invariante por traslación*** *a aquella uniformidad sobre un espacio vectorial X que tiene una base $\mathcal{N}$ tal que, cualquiera sea $N \in \mathcal{N}$, se tiene:*

$$(x, y) \in N \iff (x + z, y + z) \in N \quad \forall z \in X.$$

Teorema 3.1.4 *La topología de cualquier EVT puede ser derivada de una única uniformidad invariante por traslación $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{B}$ es una base de vecindades de 0, la familia $N_V = \{(x, y) \colon x - y \in V\}$ con $V \in \mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{N}$.*

Demostración existencia:
Sea (X, τ) un EVT con $\mathcal{B}$ una base de vecindades de 0. Los conjuntos N_V forman una base filtro sobre $X \times X$, que a su vez es base de una uniformidad $\mathcal{N}$ invariante por traslación generadora de la topología τ sobre X.

Demostración unicidad:
Si $\mathcal{N}_1$ es otra uniformidad con las propiedades mencionadas antes, existe una base $\mathcal{M}$ de $\mathcal{N}_1$ que consiste en conjuntos invariantes por traslación y tales que los conjuntos $U_M = \{x - y \colon (x, y) \in M\}$, cualquiera sea $M \in \mathcal{M}$ forman una base de 0 para τ.

Ahora, si $U_M \subset V$, esto implica que $M \subset N_V$, entonces el recíproco también se cumple. Es decir, ambas bases son iguales y, como cada base genera una única uniformidad, se concluye que $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}_1$ son iguales.

$\square$

Definición 3.1.6 *Sea X un EVT, un* ***subespacio de*** X *es un subespacio vectorial M dotado de la topología inducida por X.*

Nota: Recordar que un subconjunto $M \neq \emptyset$ de X es un subespacio vectorial si $M + M \subset M$ y $\lambda M \subset M$, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposición 3.1.1

1. *La clausura $\bar{H}$ de un subespacio H de un EVT X es también un subespacio lineal de X.*
2. *Sean X, Y dos EVT y $f\colon X \to Y$ una aplicación lineal. f es continua si, y sólo si, f es continua en el origen 0.*

Demostración:

1. - *Sean $x_0, y_0 \in \bar{H}$ y $U \in \mathscr{F}(0)$. Por Teorema 3.1.2, existe $V \in \mathscr{F}(0)$ tal que $V + V \subset U$. Luego, por definición de puntos de clausura, se tiene que $(x_0+V) \cap H \neq \emptyset$ y $(y_0 + V) \cap H \neq \emptyset$, esto quiere decir que existen $x, y \in H$ tal que $x \in x_0 + V$ e $y \in y_0 + V$. Como H es un subespacio lineal $x + y \in H$. En consecuencia, $x + y \in (x_0 + V) + (y_0 + V) \subset x_0 + y_0 + U$. Así, $x + y \in H \cap (x_0 + y_0 + V)$, es decir, $H \cap (x_0 + y_0 + V) \neq \emptyset$ implica que $x_0 + y_0 \in \bar{H}$.*
   - *De manera similar, sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x_0 \in \bar{H}$. Del hecho que $(x_0 + U) \cap H \neq \emptyset$ tenemos que existe $x \in (x_0 + U) \cap H$. Y como H es subespacio linea de X, $\lambda x \in H$. Luego, $\lambda x \in \lambda x_0 + \lambda U$, con $\lambda U \in \mathscr{F}(0)$, nuevamente por Teorema 3.1.2. Por tanto, $H \cap (\lambda x_0 + \lambda U) \neq 0$, lo que implica que $\lambda x_0 \in \bar{H}$.*
2. *Sean f una aplicación lineal continua en 0 y $x \neq 0$ un elemento fijo de X. Sea U una vecindad cualquiera de $f(x) \in Y$. Por Corolario 3.1.1, $U = f(x) + V$ para algún $V \in \mathscr{F}(0)$, con $0 \in Y$. Luego, al ser f lineal se tiene*

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(f(x) + V) = f^{-1}(f(x)) + f^{-1}(V) \supset x + f^{-1}(V)$$

Por la continuidad de f en 0, se tiene que $f^{-1} \in \mathscr{F}(0)$ y, así, $x + f^{-1}(V)$ es vecindad de $x \in X$.

$\square$

Capítulo 4

Espacios Vectoriales Topológicos Localmente Convexos

El estudio de los EVT localmente convexos es relevante dentro de los distintos tipos de EVT debido a que son una generalización de los espacios normados. A continuación recordamos la definición de un conjunto convexo y propiedades que se cumplen en un EVT.

4.1. Primeros resultados

Definición 4.1.1 *Un subconjunto A de un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ se dice que es* **convexo** *si, eligiéndose dos puntos cualesquiera del conjunto, la recta que los une está contenida en el conjunto.*

Proposición 4.1.1 *Sean X e Y espacios vectoriales espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ y $f\colon X \to Y$ una aplicación lineal. La imagen y la preimagen de un conjunto convexo mediante f son convexos.*

Esta afirmación se puede probar de manera inmediata por la linealidad de f y f^{-1}.

Proposición 4.1.2 *Sean X un EVT y A, B subconjuntos convexos de X. Luego, $\mathring{A}, \bar{A}, A+B$ y αA, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, son conjuntos convexos.*

Demostración:

Sea A un conjunto convexo de X.

Cualquiera sea $\lambda \in [0,1]$, se define

$$\begin{aligned}\phi_\lambda \colon X \times X &\to X\\ (x,y) &\mapsto \lambda x + (1-\lambda)y\end{aligned}$$

- *$\mathring{A}$ es convexo*

  Sean $x, y \in \mathring{A}$, cualquiera sea $\lambda \in [0,1]$, se desea probar que $z := \phi_\lambda(x,y) \in \mathring{A}$.
  En efecto, como x e y son puntos interiores de A se tiene que existe $U \in \mathscr{F}(0)$ tal que $x + U \subset A$ y $y + U \subset A$ (*). De manera similar se espera que $z + U \subset A$:
  En efecto, para $u \in U$, se tiene:

  $$z + u = \lambda x + (1-\lambda)y + \lambda u + (1-\lambda)u = \lambda(x+u) + (1-\lambda)(y+u)$$

  Luego, por (*), se tiene que $x + u \in A$, $y + u \in A$ y como A es convexo, $z + u \in A$, equivalentemente, $z + U \subset A$.

- *$\bar{A}$ es convexo*
  ϕ_λ es continua al ser una composición de suma y producto por escalar en un EVT.
  Luego, como A es convexo se tiene que $\phi_\lambda(A \times A) \subset A$ y, por tanto, $\overline{\phi_\lambda(A \times A)} \subset \bar{A}$.
  Además, de la continuidad de ϕ_λ, $\phi_\lambda(\overline{A \times A}) \subset \overline{\phi_\lambda(A \times A)}$.
  Así, $\phi_\lambda(\bar{A} \times \bar{A}) \subset \phi_\lambda(\overline{A \times A}) \subset \bar{A}$, lo que quiere decir que $\bar{A}$ es convexo.

- *$A + B$ es convexo*
  Si $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, entonces $a_1 + b_1, a_2 + b_2 \in A + B$, se tiene

  $$\lambda(a_1 + b_1) + (1-\lambda)(a_2 + b_2) = [\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2] + [\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2],$$

  elemento que pertenece a $A + B$ puesto que $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$ y $\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in B$ ya que ambos conjuntos son convexos.

- *αA es convexo*
  Si $a, b \in \alpha A$, entonces $a = \alpha x$ y $b = \alpha y$ para algunos $x, y \in A$. Luego, cualquiera sea $\lambda \in [0,1]$ se tiene que

  $$\lambda a + (1-\lambda)b = \lambda(\alpha x) + (1-\lambda)(\alpha y) = \alpha[\lambda x + (1-\lambda)y].$$

  Si denotamos por $z := \lambda x + (1-\lambda)y \in A$ y del hecho de que A es convexo, $\alpha z \in \alpha A$

$\square$

Proposición 4.1.3 *Sea X un espacio vectorial, se cumplen las siguientes propiedades:*

- *La intersección arbitraria de conjuntos convexos es convexa.*
- *Si C es un conjunto convexo, ρC es un conjunto convexo $\forall \rho > 0$.*

<u>Demostración</u>:

La demostración de ambas propiedades es bastante simple:

- *En el caso que la intersección* $C = \bigcap_{j\in J} C_j$ *sea un único punto, la afimación es inmediata.*
  En el caso contrario, sean $x, y \in \bigcap_{j\in J} C_j$, *la recta que una a* x *e* y *está contenida en todo* C_j, *al ser cada uno de estos conjuntos convexos, por tanto, está contenida en la intersección. Así,* C *es convexo.*

- *Sea* C *un conjunto convexo. Es fácil notar que, sean* $x, y \in C$, *se tiene que* $\rho x, \rho y \in \rho C$, *luego, sea* $\lambda \in (0, 1]$

$$\lambda(\rho x) + (1-\lambda)(\rho y) = \rho(\lambda x + (1-\lambda)y) \in \rho C$$

  ya que C *es convexo.*

$\square$

Lema 4.1.1 *Sea* C *un subconjunto convexo se cumple, para cualquier* $0 < t \leq 1$, *que* $t\mathring{C} + (1-t)\bar{C} \subset \mathring{C} \quad (*)$.

Si $\mathring{C} \neq \emptyset$, *entonces*

1. *El interior de* C *es denso en* $\bar{C}$.

2. *El interior de* $\bar{C}$ *coincide con el interior de* C.

<u>Demostración</u>

Es posible notar que ciertas afirmaciones del enunciado son inmediatas:

- *Para* $t = 1$, $(*)$ *es cierto.*

- *Las contenciones* $\bar{\mathring{C}} \subset \bar{C}$ *y* $\mathring{C} \subset \mathring{\bar{C}}$ *son ciertas ya que* $\mathring{C} \subset C$ *y* $C \subset \bar{C}$.

Por lo que se procede a demostrar los casos restantes:

Sea C *un conjunto convexo,* $x \in \mathring{C}$, $y \in \bar{C}$ *y* $t \in (0, 1)$.
Existe una vecindad U *del origen tal que* $x + U \subset C$.
Como $y - \frac{t}{1-t}U$ *es una vecindad de* y, *existe* $z \in C \cap (y - \frac{t}{1-t}U)$. *De esto, se tiene que* $(1-t)(y-z) \in tU$.
Se define el conjunto $V := t(x + U) + (1-t)z$, *el que está completamente contenido en* C

al ser este un conjunto convexo.
Más aún, se puede notar:

$$tx+(1-t)y = tx+(1-t)(y-z)-(1-t)z \in tx+tU-(1-t)z = t(x+U)+(1-t)z = V \subset C$$

De esta manera se tiene que $tx + (1-t)y \in \mathring{C}$*, probándose* $(*)$*.*
Luego, al hacer tender t *a* 0*, se cumple* $1.$*.*

Para $2.$*, sean* $x_0 \in \mathring{C}$ *y* $x \in \mathring{\bar{C}}$*.*
Sea W *una vecindad del origen tal que* $x + W \subset \bar{C}$*.*
Al ser W *absorvente, existe un* $\epsilon \in (0,1)$ *tal que* $\epsilon(x - x_0) \in W$*. De esta manera,*

$$x + \epsilon(x - x_0) \in \bar{C}.$$

Por $(*)$*. se tiene* $x - \epsilon(x - x_0) = \epsilon x_0 + (1-\epsilon)x \in \mathring{C}$*.*
Y luego, usando $(*)$ *otra vez, se tiene:*

$$x = \frac{1}{2}(x + \epsilon(x - x_0)) + \frac{1}{2}(x - \epsilon(x - x_0)) \in \mathring{C}$$

Así, $\mathring{\bar{C}} \subset \mathring{C}$*, cumpliéndose la igualdad* $\mathring{\bar{C}} = \mathring{C}$*.*

□

Definición 4.1.2 *Sea* B *un conjunto cualquiera de un espacio vectorial* X*. La* ***envoltura (o cápsula) convexa de*** B *es*

$$conv(B) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon x_i \in B, \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\},$$

el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas finitas de elementos de B*.*

Proposición 4.1.4 *Un subonjunto* S *de* X *es convexo si, y sólo si, es igual a su envoltura convexa.*

Demostración

Es inmediato notar que, sea $x \in S$*,* $x = 1 \cdot x \in conv(S)$*.*
En el otro sentido, sea $x \in conv(S)$*,* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in S$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$*.*
Se procede a probar el enunciado usando inducción:

- *Para el caso:* $n = 1$ *se obtiene de manera inmediata.*

- *Caso* $n \geq 2$
  Hipótesis de inducción: Sean $x_i \in X$ *y* $\lambda_i \geq 0$, *con* $1 \leq i \leq k+1$ *y* $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, *se asume que*
  $$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in S.$$
  Sean $\lambda :\ = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ *y, para* $1 \leq i \leq k$, $\mu_i :\ = \frac{\lambda_i}{\lambda}$, *se cumple que* $\mu_i \geq 0$ *y* $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$.
  Luego, se tiene que $\lambda_{k+1} = 1 - \lambda$ *y, sea* $y :\ = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i$,
  $$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ &= \lambda y + (1-\lambda) x_{k+1} \end{aligned}$$
  De esta manera, como $x_{k+1} \in S$ *y* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in S$ *por hipótesis, al ser* S *un conjunto convexo se tiene que* $x \in S$.

Así, $S = conv(S)$.

□

4.2. Conjuntos y Espacios Barrelados

Definición 4.2.1 *Un subconjunto* T *de un EVT se dice* ***barrelado*** *si* T *es absorvente, balanceado, convexo y cerrado.*

Proposición 4.2.1 *Toda vecindad del origen en un EVT está contenida en una vecindad barrelada del origen.*

Demostración

Se define
$$T_U := \overline{conv(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1} \lambda U)}.$$
Se cumple que $U \in T_U$. *Luego,* T_U *es una vecindad del origen y, por Teorema 3.1.2, es absorvente. Además, por construcción,* T_U *es un conjunto cerrado y convexo al ser clausura de un conjunto convexo.*

Como $conv(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq 1}\lambda U)$ *es convexo, sea* z *un elemento perteneciente al conjunto, existen* $x, y \in X$ *tales que, para algún* $t \in [0,1]$,

$$z = tx + (1-t)y$$

en particular, $x \in \lambda U$ *y* $y \in \mu U$ *con* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *tales que* $|\lambda| \leq 1$ *y* $|\mu| \leq 1$.
Luego, sea $\xi \in \mathbb{K}$, $|\xi| \leq 1$, *se tiene que*

$$\xi z = \xi tx + \xi(1-t)y \in conv(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq 1}\lambda U)$$

ya que $|\xi\lambda| \leq 1$ *y* $|\xi\mu| \leq 1$. *De esta manera, se tiene que* $conv(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq 1}\lambda U)$ *es un conjunto balanceado y, por Teorema 3.1.1,* T_U *es balanceado al ser su clausura.*
Así, se tiene que T_U *es la vecindad barrelada que se buscaba.*

□

Definición 4.2.2 *Un EVT X se dice **localmente convexo** si existe una base de vecindades del origen que consiste en conjuntos convexos.*

Por comodidad, estos espacios serán frecuentemente abreviados como *espacios l.c.*.

Ejemplos Espacios Localmente Convexos

1. En $\mathbb{R}^n$ con $\|\cdot\|$ la norma euclideana, se puede considerar la base compuesta por las bolas de centro 0 y radio r, con $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $B_0(r) = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$.

2. El conjunto de todas las funciones continuas a valores reales definidas sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ se vuelve un espacio l.c. bajo la norma $\|x\| = \sup_{a\leq t\leq b} |x(t)|$.
   De manera análoga al ejemplo anterior, basta con considerar las bolas de centro 0 y radio r, $B_0(r) = \{x \in \mathscr{C}[a,b] : \|x\| \leq r\}$.
   No es difícil probar la convexidad de estos elementos. En efecto, sean x, y funciones contenidas en $B_0(r)$ y $t \in (0,1)$.

   $$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| < (t+1-t)r = r$$

   Por tanto, $tx + (1-t)y \in B_0(r)$, lo que quiere decir que tal conjunto es convexo y la colección de todos ellos es la que hace de $\mathscr{C}[a,b]$ un espacio localmente convexo.

Si bien en estos ejemplos se consideran elementos definidos a partir de normas, en la próxima sección este concepto será levemente debilitado y se mostrará que aun así, será posible crear espacios l.c. a partir de él.

Definición 4.2.3 *La topología compatible con la estructura de un espacio vectorial es llamada **topología localmente convexa** si posee una base de vecindades convexas del origen.*

Proposición 4.2.2 *Todo EVT l.c. tiene una base de vecindades del origen que consiste en conjuntos barrelados.*

Demostración:

Sea O una vecindad del origen, por Teorema 3.1.3, existe V vecindad cerrada del origen tal que $V \subset O$ y forma parte de una base de vecindades del origen.
Como X es l.c., existe una vecindad convexa del origen en X tal que $W \subset V$.
Más aún, por Teorema 3.1.2, existe una vecindad balanceada del origen U tal que $U \subset W$.
De esta manera,

$$U \subset W \subset V \subset O.$$

Al ser U una vecindad balanceada, se tiene que

$$U = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1} \lambda U.$$

Luego, al ser W convexo, se tiene:

$$conv\Big(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1} \lambda U\Big) = conv(U) \subset W = conv(W)$$

De esto,

$$T_U \subset \bar{W} \subset \bar{V} = V \subset O.$$

donde consideramos a T_U como en la demostración anterior.
Así, se obtiene que los T_U son los conjuntos barrelados que conforman la base requerida.

$\square$

Teorema 4.2.1 *Toda vecindad convexa de 0 contiene una vecindad convexa balanceada de 0. En particular, en cualquier EVT l.c. existe una base $\mathscr{B}$ de vecindades del origen que consiste en conjuntos absorventes, balanceados y convexos tales que:*

a) $\forall V_1, V_2 \in \mathscr{B}, \exists V_3 \in \mathscr{B} \colon V_3 \subset V_1 \cap V_2$;

b) $\forall V \in \mathscr{B}, \forall \rho > 0, \exists W \in \mathscr{B} \colon W \subset \rho V$

Por otro lado, si $\mathscr{B}$ es una colección de subconjuntos convexos, absorventes y balanceados de un espacio vectorial tal que se cumplen a) y b), entonces existe una única topología compatible con la estructura lineal de X tal que $\mathscr{B}$ es una base de vecindades del origen en X para tal topología.

Demostración:

- *Existencia de $\mathscr{B}$*

  Sea U una vecindad convexa de 0. Por Teorema 3.1.2 existe una vecindad balaceada de 0, W, tal que $W \subset U$. Como consecuencia, para cualquier $s \in \mathbb{K}$ con $|s| = 1$, se tiene $sW \subset W$ y $s^{-1}W \subset W$, luego $s^{-1}W = W = sW$. En particular, $s^{-1}W = W \subset$, de esto, $W \subset sU$.
  Sea $V \colon = \bigcap\limits_{|s|=1} sU$. Luego, $V \subset U$ y $W \subset V$, de esta manera V es una vecindad de 0 contenida en U. Más aún, como cada sU es convexo, también lo es su intersección V.
  Notar que para cualquier $v \in V$ se cumple $v \in sU, \forall |s| = 1$. Luego, cualquiera sea λ con $|\lambda| \leq 1$ se tiene que, para cualquier s tal que $|s| = 1$, $|\lambda| v \in |\lambda| sU$ y $s|\lambda|U \subset sU$, esto al ser U convexo y $0 \in U$.
  Por tanto, $\lambda v \in V$, es decir, V es balanceado.
  Notar que, todo EVT l.c. tiene una base de vecindades convexas en 0 y, por lo anterior, cada uno de ellos contiene una base balanceada y convexa de 0. Esta parte de la demostración finaliza al notar que toda vecindad de 0 es absorvente.

- *Se cumplen las propiedades **a)** y **b)***

  Basta con notar que $V_1 \cap V_2$ y ρV son conjuntos convexos al ser, respectivamente, la intersección y el múltiplo de vecindades convexas de 0. Luego, por primera parte de la demostración, existen V_3 y W vecindades convexas, balanceadas y absorventes de 0 tales que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ y $W \subset \rho V$.

- *Existencia y Unicidad de τ*

  *Sea $\mathscr{B}$ una coleción de conjuntos absorventes, balanceados y convexos que cumplen **a)** y **b)**. Se tiene que $\mathscr{B}$ es una base de filtro. En efecto:*

  - *Supongamos $\emptyset \in \mathscr{B}$. Por defineión de$\mathscr{B}$, $\emptyset$ es un conjunto absorvente, es decir, $0 \in \emptyset$. Es evidente que tal afirmación es falsa. Así, $\mathscr{B}$ no contiene al conjunto vacío*
    Por otro lado, no es difícil notar que $\{0\} \in \mathscr{B}$. Luego $\mathscr{B} \neq \emptyset$.
  - *Es inmediato que, por **a)**, se tiene que, sean $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

  Así, $\mathscr{B}$ genera un único filtro $\mathscr{F} = \{F \subset X \colon B \subset F$ para algún $B \in \mathscr{B}\}$, el que cumple con las condiciones del Teorema 3.1.2:

  - *Es fácil notar que, cualquiera sea $F \in \mathscr{F}$, F es un elemento absorvente y, por tanto, $0 \in F$.*
  - *Por definición de $\mathscr{F}$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset F$. Tal B es balanceado, por definición, y $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$. Así, $B \in \mathscr{F}$.*

- *Sean $F \in \mathscr{F}$ y $\lambda \neq 0$. Por el mismo argumento anterior, existe $B \subset F$ y, por propiedades de los conjuntos absorventes y convexos, se tiene que λB también es absorvente y convexo, por propiedades de estos tipos de conjuntos. Además, como B es balanceado, se tiene que, sea $\mu \in \mathbb{K}$ y $|\mu| \leq 1$, $\mu\lambda B = \lambda(\mu B) \subset \lambda B$. Es decir, λB también es un conjunto balanceado. De esta manera, $\lambda B \in \mathscr{B}$. Y, por tanto, $\lambda F \in \mathscr{F}$.*
- *Por último, notar que, por lo anterior, $\frac{1}{2}B \in \mathscr{F}$, en particular, $\frac{1}{2}B \in \mathscr{B}$ y al ser B convexo, se tiene que $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B \subset B$. Así, $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B \subset F$.*

Por lo tanto, existe una única topología compatible con la estructura lineal de X tal que $\mathscr{B}$ es una base de vecindades del origen en X para tal topología.

$\square$

Definición 4.2.4 *Un **espacio barrelado** es un EVT en el cual la familia de todos los conjuntos barrelados forman una base en 0. Equivalentemente, un EVT X es barrelado si cada conjunto barrelado en X es una vecindad de 0.*

Definición 4.2.5 *Sean X y X_α ($\alpha \in A$) espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Sea $g_\alpha \colon X_\alpha \to X$ una aplicación lineal sobre X_α y τ_α una topología l.c. sobre X_α. La **topología inductiva sobre X con respecto a la familia** $\{(X_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha) \colon \alpha \in A\}$ es la topología localmente convexa más fina para la cual cada aplicación $g_\alpha(\alpha \in A)$ es continua sobre (x_α, τ_α) hacia X.*

Teorema 4.2.2 *Si τ es la topología inductiva sobre X con respecto a una familia de espacios barrelados X_α y sus correspondientes aplicaciones lineales g_α, entonces cada conjunto barrelado sobre X es una vecindad de 0 para τ, es decir, es un espacio barrelado.*

Demostración:

Sea τ la topología inductiva sobre X con respecto a la familia $\{(X_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha) \colon \alpha \in A\}$, donde τ_α ($\alpha \in A$) es una topología localmente convexa barrelada sobre X_α.
Si D es un conjunto barrelado en (X, τ), entonces $g_\alpha^{-1}(D)$ es un conjunto barrelado D_α en (X_α, τ_α) para cada $\alpha \in A$.
En efecto,

- *La linealidad de g_α^{-1} (como inversa de una aplicación lineal) nos asegura que $g_\alpha^{-1}(D)$ es convexo.*
- *Sea $|\lambda| \leq 1$, se tiene que $\lambda D \subset D$. Luego, por continuidad de g_α, $g_\alpha^{-1}(\lambda D) \subset g_\alpha^{-1}(D)$ y, por linealidad de g_α^{-1}, $g_\alpha^{-1}(\lambda D) = \lambda g_\alpha^{-1}(D)$. Es decir, $g_\alpha^{-1}(D)$ es un conjunto balanceado.*
- *La continuidad de g_α implica que $g_\alpha^{-1}(D)$ es cerrado.*

- *Al ser D absorvente, $0 \in D$. Luego por linealidad, $0 \in g_\alpha^{-1}(D)$, por lo que también es un conjunto absorvente.*

Luego, al ser (X_α, τ_α) un espacio barrelado, D_α es una vecindad de 0. De esta manera, D es una vecindad de 0 en (X, τ).

$\square$

4.3. Seminormas y su relación con los EVT l.c.

Definición 4.3.1 *Sea X un espacio vectorial. Una función $p\colon X \to \mathbb{R}$ es llamada **seminorma** si satisface dos propiedades:*

(i) Subaditividad: $\forall x, y \in X$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(ii) Positivamente homogénea: $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

Ejemplo Seminorma

Recordemos la definción de una forma sesquilineal:

Sea X un espacio vectorial complejo. La función $\varphi\colon X \times X \to \mathbb{C}$ es llamada **forma sesquilineal** si es lineal con respecto a la primera variable y semilinear con respecto a la segunda, es decir:

Sean $u, v, u_i, v_i \in X$ con $i \in \{1, 2\}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Se cumple:

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1 + u_2, v) &= \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v) \\
\varphi(u, v_1 + v_2) &= \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2) \\
\varphi(\lambda u, v) &= \lambda \varphi(u, v) \\
\varphi(u, \mu v) &= \bar{\mu} \varphi(u, v)
\end{aligned}$$

Sea X un espacio en el que está definida tal forma sesquilineal φ. Suponemos que φ es hermitiana, es decir, $\varphi(v, u) = \overline{\varphi(u, v)}$. De esto, se tiene que, para cualquier $u \in X$, $\varphi(u, u)$ es un número real y φ es no-negativa si se reduce el dominio de manera que $\varphi(u, u)$ no sea negativo.

Bajo esta condición, se define la función:

$$\begin{aligned}
s_\varphi\colon X &\to \mathbb{R} \\
u &\mapsto s_\varphi(u) = [\varphi(u, u)]^{1/2}
\end{aligned}$$

Al ser φ un producto interno (definido positivo, lineal con respecto a la primera variable y simétrico con respecto al conjugado), se puede hacer uso de la desigualdad de Schwarz, la que nos asegura:

$$\begin{aligned} &|\varphi(u,v)|^2 \leq \varphi(u,u)\varphi(v,v) = [s_\varphi(u)]^2[s_\varphi(v)]^2 \\ \Rightarrow &|\varphi(u,v)| \leq s_\varphi(u)s_\varphi(v) \end{aligned}$$

Hacemos uso de este resultado para notar que φ es subaditiva:

$$\begin{aligned} s_\varphi(u+v) &= [\varphi(u+v,u+v)]^{1/2} \\ \Rightarrow [s_\varphi(u+v)]^2 &= \varphi(u,u) + \varphi(u,v) + \varphi(v,u) + \varphi(v,v) \\ &= [s_\varphi(u)]^2 + [s_\varphi(v)]^2 + \varphi(u,v) + \overline{\varphi(u,v)} = [s_\varphi(u)]^2 + [s_\varphi(v)]^2 + 2Re(\varphi(u,v)) \\ &\leq [s_\varphi(u)]^2 + [s_\varphi(v)]^2 + 2|\varphi(u,v)| \\ &\leq [s_\varphi(u)]^2 + [s_\varphi(v)]^2 + 2s_\varphi(u)s_\varphi(v) = [s_\varphi(u)+s_\varphi(v)]^2 \\ \Rightarrow s_\varphi(u+v) &\leq s_\varphi(u) + s_\varphi(v) \end{aligned}$$

Por último, es fácil demostrar que φ es positivamente homogénea:
Sea $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$s_\varphi(\lambda u) = [\varphi(\lambda u, \lambda u)]^{1/2} = [\lambda \cdot \bar{\lambda}\varphi(u,u)]^{1/2} = [|\lambda|^2\varphi(u,u)]^{1/2} = |\lambda|[\varphi(u,u)]^{1/2} = |\lambda|s_\varphi(u)$$

De esta manera s_φ es una seminorma.

Proposición 4.3.1 *Sea p una seminorma sobre un espacio vectorial X, se cumplen las siguientes propiedades:*

- *p es simétrica;*
- *$p(0) = 0$;*
- *Sean $x, y \in X$, $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$;*
- *Cualquiera sea $x \in X$, $p(x) \geq 0$;*
- *$Ker(p)$ es un subespacio lineal.*

Demostración:

- *Por propiedad (ii), $p(-x) = |-1|p(x) = p(x)$.*
- *Haciendo uso del mismo argumento, se tiene que, cualquiera sea $x \in X$, $p(0) = 0 \cdot p(x) = 0$.*

- *Notar que, por subaditividad de la seminorma se tiene que* $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ *a la vez que* $p(y) = p(y - x + x) \leq p(y - x) + p(x)$*. Por tanto, se cumple que* $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$*.*
- *Sea* $x \in X$*, se puede notar que* $2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(x + (-x)) = p(0) = 0$*.*
- *Sean* $x, y \in Ker(p)$*, se tiene:* $p(x+\alpha y) = p(x)+|\alpha|p(y) = 0$*. Luego,* $x+\alpha y \in Ker(p)$*. Así,* $Ker(p)$ *es un subespacio lineal.*

$\square$

Para facilitar la notación, al trabajar con una seminorma p definida sobre un espacio vectorial X, la **bola unitaria cerrada** se denotará por $U_p \colon = \{x \in X \colon p(x) \leq 1\}$ y, de manera similar, la **bola unitaria abierta** se denotará por $\mathring{U}_p \colon = \{x \in X \colon p(x) < 1\}$.

Proposición 4.3.2 *Sea* X *un espacio vectorial y* p *una seminorma sobre* X*. Cualquiera sea* $x \in X$ *se cumple* $x + \mathring{U}_p = \{z \in X \colon p(z - x) < 1\}$

Demostración:

Por definición de $\mathring{U}_p$*, se tiene:*

$$x + \mathring{U}_p = \{x + y \in X \colon y \in \mathring{U}_p\} = \{x + y \in X \colon p(y) < 1\} = \{z \in X \colon p(z - x) < 1\}.$$

esto al considerar la sustitución $z = x + y$*.*

$\square$

Lema 4.3.1 *Sea* X *un espacio vectorial. Si* A *es un subconjunto no vacío de* X *absorvente, balanceado y convexo entonces el funcional de Minkowski asociado* p_A *es una seminorma sobre* X *y* $\mathring{U}_{p_A} \subset A \subset U_{p_A}$*.*
Por otro lado, si q *es una seminorma sobre* X *entonces* $\mathring{U}_q$ *es un conjunto balanceado absorvente y convexo, y* $q = p_{\mathring{U}_q}$*.*

Demostración:

Sea A *un subconjunto no vacío de* X *absorvente, balanceado y convexo, y sea* p_A *su funcional de Minkowski asociado. Se tiene lo siguiente:*

- *el codominio del funcional de Minkowski coincide con el de una seminorma*

  Al ser A *un conjunto absorvente, se tiene que cualquiera sea* $x \in X$*, existe* $\rho_x > 0$ *tal que, cualquiera sea* $\lambda \in \mathbb{K}$ *con* $|\lambda| \leq \rho_x$*, se cumple* $\lambda x \in A$ *y, de esta manera* $\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda A\} \neq \emptyset$*, es decir,* p_A *sólo alcanza valores positivos finitos.*
  Notar también que, como $0 \in A$*, se tiene que* $0 \in \lambda A$ *para cualquier* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y así,* $p_A(0) = \inf\{\lambda > 0 \colon 0 \in \lambda A\} = 0$*.*

- *p_A es positivamente homogéneo*

  Como A es balanceado se tiene que, para todo $x \in X$ y cualesquiera sean $\xi, \lambda \in \mathbb{K}$ con $\xi \neq 0$, $\xi A = |\xi| A$. De esto,se obtiene que $x \in \frac{\lambda}{|\xi|}$ es equivalente a $\xi x \in \lambda \frac{\xi}{|\xi|} A = \lambda A \quad (*)$.
  Usando $(*)$, se tiene que, cualquiera sea $x \in X$ y $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} p_A(\xi x) &= \inf\{\lambda > 0 \colon \xi x \in \lambda A\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \frac{\lambda}{|\xi|} A\} \\ &= \inf\left\{\frac{|\xi|}{|\xi|}\lambda > 0 \colon x \in \frac{\lambda}{|\xi|} A\right\} \\ &= |\xi| \inf\{\mu > 0 \colon \xi x \in \mu A\} \\ &= |\xi| p_A(x) \end{aligned}$$

- *p_A es subaditivo*

  Sean $x, y \in X$, por definición del funcional de Minkowski. Sea $\epsilon > 0$, existen $\delta, \mu > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \delta \leq p_A(x) + \epsilon \wedge x \in \delta A \\ \mu \leq p_A(y) + \epsilon \wedge y \in \mu A \end{aligned}$$

  Luego, al ser A convexo, se tiene que

$$\frac{\delta}{\delta + \mu} A + \frac{\mu}{\delta + \mu} A \subset A$$

  equivalentemente, $\delta A + \mu A \in (\delta + \mu) A$ y, de esto, $x + y \in (\delta + \mu) A$. Así:

$$p_A(x + y) = \inf\{\lambda > 0 \colon x + y \in \lambda A\} \leq \delta + \mu \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\epsilon$$

  Lo que se cumple cualquiera sea $\epsilon > 0$, por tanto, p_A es subaditiva.

Cumpliendo de esta manera con los tres requisitos, se tiene que, efectivamente, p_A es una seminorma.
Más aún, se puede notar que se cumplen las siguientes contenciones:

$$\mathring{U}_{p_A} \subset A \subset U_{p_A}$$

En efecto, si $x \in \mathring{U}_{p_A}$, se tiene que $p_A(x) < 1$. Luego, existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que $x \in \lambda A$. Como A es balanceado, para tal λ se tiene que $\lambda A \subset A$, y de este, $x \in A$.

Luego, si $x \in A$, se tiene que $1 \in \{\lambda > 0 \colon x \in \lambda A\}$, por tanto, $p_A(x) \leq 1$ y, así, $x \in U_{p_A}$.

En el otro sentido, sea $\hat{p}$ una seminorma sobre X, $\mathring{U}_{\hat{p}}$ es absorvente, balanceado y convexo. En efecto,

- *$\mathring{U}_{\hat{p}}$ es absorvente*
  Sea $x \in X$.

  - *Si $\hat{p}(x) = 0$, se obtiene de manera inmediata que $\lambda x \in \mathring{U}_{\hat{p}}$ para todo $|\lambda| < \rho$ cualquiera sea $\rho > 0$.*
  - *Si $\hat{p}(x) > 0$, se tiene*
  $$\hat{p}\left(\frac{x}{\hat{p}(x)}\right) = \frac{1}{\hat{p}(x)}\hat{p}(x)$$

  Luego, basta con $0 < \rho < \frac{1}{\hat{p}(x)}$ para que se cumpla que $\lambda \hat{p}(x) \in A$ cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| < \rho$.

- *$\mathring{U}_{\hat{p}}$ es balanceado*
  Sea $x \in \mathring{U}_{\hat{p}}$ y $|\lambda| \leq 1$. Por propiedad de seminorma se tiene $\hat{p}(\lambda x) = |\lambda|\hat{p}(x) \leq \hat{p}(x) < 1$.
  De esta manera, $\lambda x \in \mathring{U}_{\hat{p}}$.

- *$\mathring{U}_{\hat{p}}$ es convexo*
  Sean $x, y \in \mathring{U}_{\hat{p}}$ y $t \in (0, 1)$.
  Por subaditividad, $\hat{p}(tx + (1-t)y) \leq \hat{p}(tx) + \hat{p}((1-t)y) = |t|\hat{p}(x) + |1-t|\hat{p}(y) < |t| + |1-t| = t + (1-t) = 1$.
  Así, $\mathring{U}_{\hat{p}}$ es convexo.

Más aún, cualquiera sea $x \in X$ y $p_{\mathring{U}_{\hat{p}}}$ el funcional de Minkowski asociado a $\mathring{U}_{\hat{p}}$ se tiene:

$$p_{\mathring{U}_{\hat{p}}}(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda \mathring{U}_{\hat{p}}\} = \text{ínf}\{\lambda > 0 \colon \hat{p}(x) < \lambda\} = \hat{p}(x)$$

$\square$

Definición 4.3.2 *Sea X un espacio vectorial y $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ una familia de seminormas sobre X. La topología $\tau_{\mathscr{P}}$ menos fina sobre X tal que p_i $(i \in I)$ es continua es llamada* ***topología inducida (o generada) por una familia de seminormas $\mathscr{P}$.***

Para la demostración del siguiente teorema se hace uso de un resultado que fue anteriormente estudiado en el curso de Topología General:

Criterio de Hausdorff: Cualquiera sea $x \in X$, sea $\mathscr{B}(x)$ una base de vecindades de x para una topología τ sobre B y $\mathscr{B}'(x)$ una base de vecindades de X para una topología τ' sobre X. Se cumple que τ es menos fina que τ' si, y sólo si, cualesquiera sean $x \in X$ y $U \in \mathscr{B}(x)$, existe un elemento $V \in \mathscr{B}'(x)$ tal que $x \in V$ y $V \subset U$.

Teorema 4.3.1 *Sea X un espacio vectorial y $\mathscr{P} \colon = \{p_i\}_{i \in I}$ una familia de seminormas sobre X. Luego, la topología inducida por la familia $\mathscr{P}$ es la única topología que hace de X un EVT l.c. y que tiene como base de vecindades del origen en X a la colección*

$$\mathscr{B} \colon = \{\{x \in X \colon p_{i_1}(x) < \epsilon, ..., p_{i_n}(x) < \epsilon\} \colon i_1, ..., i_n \in I, n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}\}$$

Por otro lado, la topología de un EVT l.c. arbitrario es siempre inducida por una familia de seminormas generadoras.

Demostración:

- *$\mathscr{B}$ es una base de vecindades del origen*
  Sean $i \in I$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios.
  El conjunto $\epsilon \mathring{U}_{p_i} = \{x \in X \colon p_i(x) < \epsilon\}$ es absorvente, balanceado y convexo (como se demostró en Lema 4.3.1).
  Luego, todo elemento de $\mathscr{B}$ es balanceado, absorvente y convexo al ser intersección de conjuntos con estas características. Más aún, las propiedades del Teorema 4.2.1 se cumplen.
  De esta manera, se garantiza la existencia de única topología τ sobre X tal que (X, τ) es un EVT l.c. y $\mathscr{B}$ es la base de vecindades del origen para τ.

- *$\tau = \tau_{\mathscr{P}}$*
  Sea (X, τ) un EVT l.c. Se tiene que, cualquiera sea $\epsilon > 0$, ${p_i}^{-1}[0, \epsilon)) = \{x \in X \colon |p_i(x)| < \epsilon\} \in \mathscr{B}$, es decir, es una vecindad del origen de (X, τ). Por tanto, p_i es continua para cualquier $i \in I$.
  Luego, por definición, considerando a $\tau_{\mathscr{P}}$ como la topología inducida por $\mathscr{P}$, se tiene $\tau_{\mathscr{P}} \leq \tau$.
  Por otro lado, todo p_i es continua con respecto a $\tau_{\mathscr{P}}$, luego $\mathscr{B} \subset \tau\mathscr{P}$, sin embargo, $\mathscr{B}$ es base para τ, por tanto, $\tau_{\mathscr{P}} \leq \tau$.

- *La topología de un EVT l.c proviene de una familia de seminormas*
  Sea (X, τ) tal espacio. Por Teorema 4.2.1, existe una base $\mathscr{N}$ de vecindades del origen en X que consiste en subconjuntos convexos, absorventes y balanceados y cumple con las propiedades enunciadas.
  Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que son abiertos.
  Sea $\mathscr{S} \colon = \{p_N \in \mathscr{P} \colon N \in \mathscr{N}\}$, por Lema 4.3.1 se cumple que p_N es una seminorma y $\mathring{U}_{p_N} \subset N$.
  Se puede notar además que, al ser cada $N \in \mathscr{N}$ un conjunto abierto y la multiplicación por escalar una función continua, se tiene, cualquiera sea $x \in N$, existe un $t \in (0, 1)$ tal que $x \in tN$ y, así, $p_N(x) \leq t < 1$, es decir, $x \in \mathring{U}_{p_n}$.
  De esta manera se tiene que $N = \mathring{U}_p$.
  Denotamos como $\tau_{\mathscr{S}}$ a la topología inducida por la familia $\mathscr{S}$. Por la primera parte

de la demostración, sabemos que una base de vecindades del origen para $\tau_{\mathscr{S}}$ está dada por

$$\mathscr{B} \colon = \{\cap\{x \in X \colon p_{N_i}(x) < \epsilon\} \colon N_1, ..., N_n \in I, n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}\}$$

Cualquiera sea $N \in \mathscr{N}$, se tiene que $N = \mathring{U}_{p_N} \in \mathscr{B}$. Luego por el criterio de Haurdorff, se tiene $\tau \leq \tau_{\mathscr{S}}$.
Por otro lado, sea $B \in \mathscr{B}$,

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} \epsilon \mathring{U}_{p_{N_i}} = \bigcap_{i=1}^{n} \epsilon N_i$$

para algún $n \in \mathbb{N}, N_1, ..., N_n \in \mathscr{N}$ y $\epsilon > 0$.
Luwgo, por Teorema 4.2.1 se afirma para $\mathscr{N}$ que, para todo $i = 1, ..., n$, existe $V_i \in \mathscr{N}$ tal que $V_i \subset \epsilon N_i$.
Y, por tanto, existe $V \in \mathscr{N}$ tal que $V \subset \epsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset B$.
Así, nuevamente por criterio de Hausdorff, $\tau_{\mathscr{S}} \leq \tau$.
Probándose que ambas topologías son iguales.

$\square$

Proposición 4.3.3 *Sea X un EVT y p una seminorma sobre X. Luego, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a *$\mathring{U}_p$ es un conjunto abierto.*

b *p es continua en el origen.*

c *U_p es una vecindad barrelada del origen.*

d *p es continua en todo punto.*

Demostración:

a $\Rightarrow$ ***b*** *Suponemos $\mathring{U}_p$ es un abierto en la topología de X. Notar:*

$$p^{-1}([0, \epsilon)) = \{x \in X \colon p(x) < \epsilon\} = \epsilon \mathring{U}_p$$

El que resulta ser a su vez, un conjunto abierto en X. De esta manera, al ser $[0, \epsilon)$ una vecindad abierta de 0 en $\mathbb{K}$ y su preimagen una vecindad del origen en X, se obtiene que p es una función continua en el origen.

b $\Rightarrow$ ***c*** *Sea p continua en el origen, se tiene que $p^{-1}([0, 1]) = U_p$ es una vecindad cerrada del origen en X.*
Al cumplirse que $\overline{\mathring{U}_p} = U_p$, basta con demostrar que $\mathring{U}_p$ es convexa, balanceada y absorvente. Sin embargo, esto fue probado en la demostración de Lema 4.3.1 Por tanto, por esto y al

trasmitirse todas todas estas propiedades a la clusura del elemento, se tiene que U_p es una vecindad barrelada del origen.

c $\Rightarrow$ ***d*** *Sea U_p una vecindad barrelada del origen y $x \in X \setminus \{0\}$.*
Cualquiera sea $\epsilon > 0$, se tiene:

$$p^{-1}([-\epsilon + p(x), \epsilon + p(x)]) = \{y \in X : |p(y) - p(x)| \leq \epsilon\} \supset \{y \in X : p(y - x) \leq \epsilon\} = x + \epsilon U_p$$

La cual es una vecindad barrelada y, por tanto, cerrada de X, ya que por hipótesis se tiene que U_p es cerrado en la topología de X.
Por lo tanto, p es continua en todo punto de X.

d $\Rightarrow$ ***a*** *Supongamos que p es una función continua. Es fácil notar que $\mathring{U}_p = p^{-1}([0, 1))$, por tanto al ser preimagen de un conjunto abierto mediante una función continua, se tiene que $\mathring{U}_p$ es un conjunto abierto.*

$\square$

Definición 4.3.3 *La topología más fina que convierte a un espacio vectorial en un EVT localmente convexo es llamada **topología localmente convexa más fina**.*

Proposición 4.3.4 *La colección de todos los conjuntos convexos, balanceados y absorventes de un espacio vectorial X es una base de vecindades del origen para la topología localmente convexa más fina.*

Demostración:

Sea $\mathscr{A}$ la colección de todos los conjuntos convexos, balanceados y absorventes de X, $\tau_{\mathscr{A}}$ es la topología generada por $\mathscr{A}$. Se denotará como $\tau_{\text{máx}}$ a la topología convexa más fina sobre X.

- $\tau_{max} \subset \tau_{\mathscr{A}}$
  Por Proposición 4.2.2 sabemos que todo EVT l.c. posee una base compuesta por conjuntos absorventes, balanceados y convexos.
  Luego, sea $\mathscr{B}_{max}$ la base de vecindades del origen de τ_{max}, se tiene $\mathscr{B}_{\text{máx}} \subset \mathscr{A}$. Por tanto, $\tau_{\text{máx}} \leq \tau_{\mathscr{A}}$.

- $\tau_{\mathscr{A}} \subset \tau_{\text{máx}}$
  Por otro lado, $\mathscr{A}$ cumple con las propiedades del Teorema 4.2.1, es decir, $\tau_{\mathscr{A}}$ hace de X un EVT l.c.
  Así, por definición de topología convexa más fina, $\tau_{\mathscr{A}} \subset \tau_{\text{máx}}$.

$\square$

De esta manera, se puede trabajar con la topología localmente convexa más fina sin hacer uso de seminormas.

Proposición 4.3.5 *Sea X un espacio vectorial. Si $n \in \mathbb{N}$ y $s_1, ..., s_n$ son seminormas sobre X, entonces $s(x) := \max_{i \in \{1,...,n\}} s_i(x)$ para todo $x \in X$ es también una seminorma sobre X y $\mathring{U}_s = \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{U}_{s_i}$.*

Demostración:

Sean $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, por propiedades de seminorma y del máximo;

- *Subaditividad:*

$$\begin{aligned} s(x+y) &= \max_{i \in \{1,...,n\}} s_i(x+y) \leq \max_{i \in \{1,...,n\}} (s_i(x) + s_i(y)) \\ &\leq \left(\max_{i \in \{1,...,n\}} s_i(x) \right) + \left(\max_{i \in \{1,...,n\}} s_i(y) \right) = s(x) + s(y). \end{aligned}$$

- *Postividad homogénea*

$$s(\lambda x) = \max_{i \in \{1,...,n\}} s_i(\lambda x) = \max_{i \in \{1,...,n\}} |\lambda|(s_i(x)) = |\lambda| \max_{i \in \{1,...,n\}} s_i(x) = |\lambda| s(x).$$

Por tanto, s es una seminorma sobre X.

Más aún,

$$\begin{aligned} x \in \mathring{U}_s &\Rightarrow s(x) = \max s_i(x) < 1 \\ &\Rightarrow s_i < 1, \forall i \in \{1, ..., n\} \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{U}_{s_i} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{U}_{s_i} &\Rightarrow x \in \mathring{U}_{s_i}, \forall i \in \{1, ..., n\} \\ &\Rightarrow s_i(x) < 1, \forall i \in \{1, ..., n\} \end{aligned}$$

Y al ser s el máximo, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $s(x) = s_j(x) < 1$. De esta manera, se tiene que $x \in \mathring{U}_s$.

□

Teorema 4.3.2 *(Comparación de Topologías l.c.)*

Sean $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ y $\mathscr{Q} = \{q_i\}_{j\in J}$ dos familias de seminormas sobre el espacio vectorial X que inducen respectivamente las topologías $\tau_{\mathscr{P}}$ y $\tau_{\mathscr{Q}}$, las cuales hacen de X un EVT l.c.. Luego, $\tau_{\mathscr{P}}$ es más fina que $\tau_{\mathscr{Q}}$ si, y sólo si,

$$\forall q \in \mathscr{Q}, \exists n \in \mathbb{N}, i_1, ..., i_n \in I, C > 0 \colon Cq(x) \leq \max_{k=1,\ldots,n} p_{i_k}(x), \forall x \in X \quad (*)$$

<u>*Demostración*</u>*:*

Por Teorema 4.3.1,

$$\mathscr{B}_{\mathscr{P}} \colon = \{\bigcap_{n=1}^{n} \epsilon \mathring{U}_{p_{i_k}} : i_1, ..., i_n \in I, n \in \mathbb{N}, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

y

$$\mathscr{B}_{\mathscr{Q}} \colon = \{\bigcap_{n=1}^{n} \epsilon \mathring{U}_{q_{j_k}} : j_1, ..., j_n \in I, n \in \mathbb{N}, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

son bases de las topologías $\tau_{\mathscr{P}}$ y $\tau_{\mathscr{Q}}$ respectivamente.
Notar que, por Proposición 4.3.5 , se tiene

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathring{U}_{p_{i_k}} = \mathring{U}_{\max p_{i_k}} \subset \mathring{U}_{Cq} = \frac{1}{C}\mathring{U}_q$$
$$\Rightarrow C \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{U}_{p_{i_k}} \subset \mathring{U}_q$$

(La segunda igualdad de la primera línea se debe al hecho que, cualquiera sea $C > 0$,

$$r\mathring{U}_p = \{rx \in X \colon p(x) < 1\} = \{y \in X \colon \frac{1}{r}p(y) < 1\} = \{y \in X \colon p(y) < r\} = \mathring{U}_{\frac{1}{r}p}$$

Así, tomando $r = \frac{1}{C}$, se tiene la igualdad).
Luego, $(*)$ puede ser reescrito como

$$\forall q \in \mathscr{Q}, \exists n \in \mathbb{N}, i_1, ..., i_n \in I, C > 0 \colon C \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{U}_{p_{i_k}} \subset \mathring{U}_p$$

Por tanto, $C \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{U}_{p_{i_k}} \in \mathscr{B}_{\mathscr{P}}$. Luego, denotando $B_q \colon = C \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{U}_{p_{i_k}}$, se tiene que $(*)$ puede ser nuevamente reescrito como

$$\forall q \in \mathscr{Q}, \exists B_q \in \mathscr{B}_{\mathscr{P}} \colon B_q \subset \mathring{U}_p$$

Finalmente, esta condición nos asegura que, para cualquier $q \in \mathscr{Q}$, el conjunto $\mathring{U}_q$ es un elemento de $\tau_{\mathscr{P}}$, luego por Proposición 4.3.3, esto quiere decir que q es una seminorma continua con respecto a la topología $\tau_{\mathscr{P}}$.
Así, $\tau_{\mathscr{Q}} \leq \tau_{\mathscr{P}}$.

□

Proposición 4.3.6 *Sea $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ una familia de seminormas sobre un espacio vectorial X y $\mathscr{Q} = \{\max_{i\in B}\{p_i\} \colon \emptyset \neq B \subset I, B$ finito $\}$. Luego, $\mathscr{Q}$ es una familia de seminormas y $\tau_{\mathscr{Q}} = \tau_{\mathscr{P}}$.*

Demostración:

Es bastante inmediato notar que, por Proposición 4.3.5, $\mathscr{Q}$ es una familia de seminormas.

- *Para cualquier $q \in \mathscr{Q}$ y $x \in X$, $q(x) = \max_{i\in B}\{p_i(x)\}$ para algún $B \subset I$ finito.* *Luego, para $n = |B|$ y considerando a $i_1, ..., i_n$ los elementos de B, cualquiera sea $0 < C \leq 1$ se cumple $(*)$ (denotado de esta manera en el teorema anterior). Así, por Teorema 4.3.2, $\tau_{\mathscr{Q}} \leq \tau_{\mathscr{P}}$.*

- *Por otro lado, como $\mathscr{P} \subset \mathscr{Q}$, se tiene que $\tau_{\mathscr{P}} \leq \tau_{\mathscr{Q}}$.*

□

Definición 4.3.4 *Una familia $\mathscr{Q} = \{q_j\}_{j\in J}$ de seminormas sobre un espacio vectorial X es llamada* ***dirigida*** *si para cualesquiera $j_1, j_2 \in J$, existen $j \in J$ y $C > 0$ tales que, para todo $x \in X$*

$$Cq_j(x) \geq \max\{q_{j_1}(x), q_{j_2}(x)\} \quad (\star)$$

Equivalentemente, de manera inductiva, se tiene que, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists j \in J \colon Cq_j(x) \geq \max_{k=1,...,n} q_{j_k}(x)$$

Proposición 4.3.7 *La topología de un EVT l.c. siempre puede ser inducida por una familia dirigida de seminormas.*

Demostración:

Sea (X, τ) un espacio l.c., por Teorema 4.3.1 existe una familia de seminormas $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ tales que $\tau_{\mathscr{P}} = \tau$.
Sea $\mathscr{Q} = \{\max_{i\in B}\{p_i\} \colon \emptyset \neq B \subset I, B$ finito $\}$. Por Proposición 4.3.6, $\mathscr{Q}$ es una familia de seminormas y $\tau_{\mathscr{P}} = \tau_{\mathscr{Q}}$.
Sean $q, q' \in \mathscr{Q}$, existen dos subconjuntos finitos no vacíos de I, B y B' tales que $q \colon = \max_{i\in B}\{p_i\}$ y $q' \colon = \max_{i\in B'}\{p_i\}$.
Definiéndose $\hat{q} \colon = \max_{i\in B\cup B'}\{p_i\}$, se tiene que $\hat{q} \in \mathscr{Q}$.
Luego, para cualquier $x \in X$ y $C \geq 1$, se cumple que

$$C\hat{q}(x) = C \max_{i\in B\cup B'}\{p_i(x)\} = C\{\max_{i\in B}\{p_i(x)\}, \max_{i\in B'}\{p_i(x)\}\} \geq \max\{q(x), q'(x)\}$$

Así, $\mathscr{Q}$ es una familia dirigida.

$\square$

Proposición 4.3.8 *Sea X un espacio vectorial y p, q seminormas sobre X. Se tiene $p \leq q$ si, y sólo si, $\mathring{U}_q \subset \mathring{U}_p$.*

Demostración:

Recordamos que:

$$\mathring{U}_p = \{x \in X : p(x) < 1\},$$
$$\mathring{U}_q = \{x \in X : q(x) < 1\}$$

La necesidad es bastante inmediata: Supongamos $p \leq q$. Sea $x \in \mathring{U}_q$, se tiene que $p(x) \leq q(x) < 1$. Luego, $x \in \mathring{U}_p$.
En el otro sentido, supongamos $\mathring{U}_q \subset \mathring{U}_p$. Sea $x \in X$ arbitrario.
Se pueden considerar dos casos:

- *$q(x) = 0$*
  Suponemos $p(x) > 0$. De esto, se tiene que $q\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 0$. Luego, $\frac{x}{p(x)} \in \mathring{U}_q$. Por hipótesis, esto quiere decir que $\frac{x}{p(x)} \in \mathring{U}_p$, es decir, $p\left(\frac{x}{p(x)}\right) < 1$. Sin embargo, esto es un absurdo.
  Por tanto, $p(x) = 0 = q(x)$.
- *$q(x) > 0$*
  Sea $0 < \epsilon < 1$. Se tiene que $q\left(\frac{\epsilon x}{q(x)}\right) = \epsilon < 1$. De esto, por hipótesis, $\frac{\epsilon x}{q(x)} \in \mathring{U}_p$, es decir, $p\left(\frac{\epsilon x}{q(x)}\right) < 1$. Equivalentemente, se tiene que $\epsilon p(x) < q(x)$ y haciendo tender ϵ hacia 1, se tiene que $p(x) < q(x)$.

$\square$

Con estos resultados y conceptos es posible probar que una base de vecindades del origen para una topología localmente convexa $\tau_{\mathscr{Q}}$ inducida por una familia dirigida de seminormas $\mathscr{Q}$ está dada por $\mathscr{B}_d \colon = \{r\mathring{U}_q \colon q \in Q, r > 0\}$.

En efecto, sea X un EVT localmente convexo, el Teorema 4.3.1 asegura que su topología es inducida por una familia de seminormas $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i \in I}$. Aún más, la colección

$$\mathscr{B} = \{\bigcap_{j=1}^{n} \varepsilon \mathring{U}_{p_{i_k}} : i_1, ..., i_n \in I, k \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

es una base para tal topología.
Luego, sea $\mathscr{Q}\colon = \{\max_{i\in B}\{p_i\}\colon \emptyset \neq B \subset I, B \text{ finito } \}$, por Proposición 4.3.7 la topología generada por $\mathscr{P}$ es igual a la topología generada por $\mathscr{Q}$ y, además, usando Proposición 4.3.5, se tiene que $\bigcap_{j=1}^{n} \mathring{U}_{p_{i_k}} = \mathring{U}_q$, donde $q\colon = \max_{k=1,\dots,n}\{p_{i_k}\}$ y, por definición, $q \in \mathscr{Q}$.
Por tanto, es posible reescribir a $\mathscr{B}$ con respecto a $\mathscr{Q}$ como

$$\mathscr{B}_d = \{\varepsilon\mathring{U}_q\colon q \in \mathscr{Q}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

Así, se tiene que la familia $\mathscr{B}_d$ forma una base de vecindades del origen para una topología locamente convexa.

En el estudio de espacios normados, se presentaron distintas maneras de expresar la continuidad de una aplicación lineal, siendo una de ellas la siguiente:

Teorema 4.3.3 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $f\colon X \to Y$ una aplicación lineal entre ellos. f es continua si, y sólo si, para todo $x \in X$ y algún $\alpha > 0$, se tiene que*

$$\|f(x)\|_Y \leq \alpha\|x\|_X$$

Una definición similar se usa para probar la continuidad de funcionales lineales sobre un EVT:

Definición 4.3.5 *Sea (X, τ) un EVT l.c. con τ la topología generada por $\mathscr{Q}$ familia dirigida de seminormas sobre X. Un funcional lineal $L\colon X \to \mathbb{K}$ se dice que es $q-$continuo si, cualquiera sea $x \in X$*

$$\exists q \in \mathscr{Q}, \exists C > 0\colon |L(x)| \leq Cq(x) \tag{4.1}$$

Proposición 4.3.9 *Sea τ una topología localmente convexa sobre un espacio vectorial X generada por una familia $\mathscr{Q}$ de seminormas sobre X. Se tiene que $L\colon X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal $\tau-$continuo si, y sólo si, existe $q \in \mathscr{Q}$ tal que L es $q-$continuo.*

Demostración:

Notar que, además de X, $\mathbb{K}$ es también un EVT bajo la topología generada por su valor absoluto. Por proposición 3.1.1-2., es suficiente demostrar que L es continuo en 0.
Supongamos que L es continua en el origen de X. Esto quiere decir que $L^{-1}(B_1(0)) = \{x \in X\colon |L(x)| < 1\}$ es una vecindad abierta en X.
Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\mathscr{Q}$ es una familia dirigida. Luego, una base de vecindades del origen está dada por $\mathscr{B}_d = \{r\mathring{U}_q\colon q \in \mathscr{Q}, r > 0\}$, donde $\mathring{U}_q$ es la bola unitaria abierta definida por q.
Por tanto, existe $B \in \mathscr{B}_d$ tal que $B \subset L^{-1}(B_1(0))$, es decir, existe $q \in \mathscr{Q}$ y $r > 0$ tales que $r\mathring{U}_q \subset L^{-1}(B_1(0)) \quad (\diamond)$.

Notar que, por la linealidad de L, $|L|$ es una seminorma sobre X. Luego, por Proposición 4.3.8, se tiene que $(\diamond)$ implica (4.1). En efecto, como $r\mathring{U}_q = \mathring{U}_{\frac{1}{r}q}$, la proposición anterior asegura que $|L(x)| \leq \frac{1}{r}q(x)$.

Por otro lado, supongamos existe $q \in \mathscr{Q}$ tal que L es $q-$continua en X. Luego, al ser τ la topología inducida por $\mathscr{Q}$, τ es más fina que la topología generada únicamente por q. Por tanto, es inmediato que L es $\tau-$continua.

$\square$

Corolario 4.3.1 *Sea τ una topología localmente convexa sonre un espacio vectorial X generada por una familia $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ de seminormas sobre X. Luego, $L\colon X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal $\tau-$continuo si existe $n \in \mathbb{N}$, $i_1, ..., i_n \in I$ tales que L es $\left(\max\limits_{k=1,...,n} p_{i_k}\right)-$continuo.*

Demostración:

Por Proposición 4.3.6, existe una familia dirigida de seminormas $\mathscr{Q}$ tal que $\tau_{\mathscr{P}} = \tau_{\mathscr{Q}}$. Luego, por la forma de los elementos $q \in \mathscr{Q}$, existe $q_j \in \mathscr{Q}$ tal que $q_j = \max\limits_{k=1,...,k} p_{i_k}$. Por proposición anterior, se tiene que L es $q-$continua.

$\square$

Capítulo 5

Teorema de Hahn-Banach

Un resultado de gran relevancia en el análisis funcional que ha sido estudiado durante el transcurso de la licenciatura es el *Teorema de Hahn-Banach*, el que permite asegurar que todo funcional lineal acotado que está definido sobre un subespacio lineal puede ser extendido hacia el espacio en el que está contenido.
La versión clásica, que fue estudiada anteriormente, es la siguiente:

Teorema 5.0.4 *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, Y un subespacio de X y g un funcional lineal sobre Y. Existe un funcional lineal f sobre X tal que $\forall y \in Y, f(y) = g(y)$ y $\|f\| = \|g\|$.*

Antes de presentar las versiones analítica y geométrica adaptadas al contexto de los espacios vectoriales topológicos, se presentarán y recordarán aquellos conceptos y resultados que son importantes para su comprensión.

5.1. Conceptos Previos

5.1.1. Álgebra

Definición 5.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, un subconjunto C de X es llamado* **cono** *si es cerrado bajo suma y producto por escalares positivos.*

Definición 5.1.2 *Sea X un espacio lineal. Todo subespacio propio maximal de X es llamado **hiperespacio**.*

Definición 5.1.3 *En un espacio vectorial X, un subespacio linear M que cumpla* $\dim(X/M) = 1$ *es llamado **hiperplano**.*

5.1.2. Espacio Cociente

En el desarrollo de la demostración de la forma geométrica del teorema se hace uso de la codimensión de un subespacio M ($codim(M) = \dim(X/M)$) puesto que se trabajará con un hiperplano, por tanto, es necesario presentar una definición de *espacio cociente* en el contexto de espacios vectoriales topológicos y algunos resultados relevantes al respecto.

Definición 5.1.4 *Sea (X,τ) un EVT sobre $\mathbb{K}$. Sea M un subespacio de X, se llama* ***aplicación cociente (también llamada natural o canónica) de X hacia*** *X/M a la función ϕ definida de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}\phi\colon X &\to X/M\\ x &\mapsto \hat{x} = x + M\end{aligned}$$

Definición 5.1.5 *La* ***topología cociente*** *$\hat{\tau}$ se define como la topología más fina sobre X/M para la cual ϕ resulta ser continua.*

Proposición 5.1.1 *Sea M un subespacio lineal de un EVT X, la aplicación cociente $\phi\colon X \to X/M$ es abierta cuando X/M está dotado de la topología cociente.*

Demostración:

Sea V un abierto de X. Se tiene

$$\phi^{-1}(\phi(V)) = V = \bigcap_{m\in M}(V+m)$$

Como X es un EVT, su topología es invariante por traslación, es decir, todas las traslaciones son homeomorfismos, se tiene que para todo $m \in M$, $V+m$ es abierto. Además, al ser ϕ continua, $\phi(V)$ es un abierto de X/M.

$\square$

En general, no se cumple que la aplicación cociente sea cerrada.

Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la topología cociente y la hipérbola $H\colon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 1\}$. Si M es uno de los ejes coordenados, luego $\mathbb{R}^2/M$ puede ser identificado con el otro eje coordenado y la aplicación cociente ϕ con la proyección ortogonal sobre él.
La hipérbola H es cerrada en $\mathbb{R}^2$ pero su imagen bajo ϕ es el complemento de 0 en una recta, conjunto que es abierto.

Corolario 5.1.1 *Sea M un subespacio lineal de un EVT X, el espacio X/M dotado de la topología cociente es un EVT.*

Demostración:

- *Adición en X/M es continua*

  Para evitar confusiones en notación, se considerará a $+$ como la suma en X y $\hat{+}$ como la suma heredada en X/M.

Sea W una vecindad de $\hat{0}$ en X/M. El hecho que $\phi\colon X \to X/M$ sea continua implica que $\phi^{-1}(W)$ es una vecindad de 0 en X. Luego, por (3.1.2), existe V vecindad del origen en X tal que $V + V \subset \phi^{-1}(W)$.
Por la linealidad de ϕ se tiene que

$$\phi(V+V) = \hat{+}(\phi(V) \times \phi(V)) \subset W$$

o, equivalentemente,

$$\phi(V) \times \phi(V) \subset \hat{+}^{-1}(W).$$

Como ϕ es abierta, $\phi(V)$ es una vecindad del origen en X/M y así, $\hat{+}^{-1}(W)$ es una vecindad de $(\hat{0}, \hat{0})$ en $X/M \times X/M$. Consecuentemente, $\hat{+}$ es continua.

- *Producto por escalar en X/M es continuo*

  Se procede de manera similar a la anterior; definiéndose, para empezar

$$\begin{aligned} *\colon \mathbb{K} \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda * x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{K} \times X/M &\to X/M \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \hat{\cdot} x \end{aligned}$$

Sea U una vecindad de $\hat{0} \in X/M$, $\phi^{-1}(U)$ es una vecindad de $0 \in X$. Por Teorema 3.1.2, existe una vecindad balanceada V contenida en $\phi^{-1}(U)$, es decir, existe $\rho \in \mathbb{K}$ tal que $V = \bigcup_{|\lambda| \leq \rho} \lambda * V \subset \phi^{-1}(U)$, equivalentemente, $B_0(\rho) * V \subset \phi^{-1}(U)$.
Luego, al ser ϕ lineal

$$\begin{aligned} \phi(B_0(\rho) * V) = B_0(\rho) * \cdot \phi(V) &\subset U \\ \Rightarrow B_0(\rho) \times \phi(V) &\subset \cdot^{-1}(U) \end{aligned}$$

Así, es también una función continua.

Por tanto, X/M es efectivamente un EVT cuando está dotado de la topología cociente.

□

Definición 5.1.6 *El EVT sobre $\mathbb{K}$, $(X/M, \hat{\tau})$ es el* ***espacio cociente de*** *(X, τ)* ***sobre*** *M.*

5.1.3. Análisis

Para los siguiente resultados, recordemos que un **funcional lineal** es una aplicación lineal de un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$.

Proposición 5.1.2 *Todo funcional lineal sobre un espacio vectorial X es continuo con respecto a la topología localmente convexa más fina sobre X.*

Demostración:

Sea $L\colon X \to \mathbb{R}$ un funcional lineal sobre X.
Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, $B_\epsilon(0) = \{k \in \mathbb{K}\colon |k| < \epsilon\}$. Se tiene $L^{-1}(B_\epsilon(0)) = \{x \in X\colon |L(x)| < \epsilon\}$.
Al ser este conjunto convexo, absorvente y balanceado, se tiene que, por (4.3.4), es una vecindad del origen bajo la topología localmente convexa más fina.

□

Teorema 5.1.1 *Sea X un espacio lineal no nulo.*

(a) *Si f un funcional lineal sobre X tal que $f \neq \theta$, entonces $\ker(f)$ es un hiperespacio en X. Además, f es determinado por $\ker(f)$ y el valor de f en cualquier elemento que no esté en $\ker(f)$.*

(b) *Si Z es un hiperespacio en X entonces existe un funcional lineal f sobre X tal que $Z = \ker(f)$.*

Para ver la demostración de este resultado, dirigirse a [7].

Definición 5.1.7 *Sea X un espacio arbitrario, se define una relación de equivalencia $\sim$ sobre X donde $x \sim y$ si existe un subespacio conexo de X que contiene a x y a y. Las clases de equivalencia son llamadas **componentes conexas** de X.*

Tales componentes también pueden ser descritas de la siguiente manera:

Teorema 5.1.2 *Las componentes conexas de X son subespacios conexos disjuntos de X cuya unión es X, y son tales que cada subespacio conexo no vacío intersecta únicamente una de ellas.*

Demostración en [8]

5.2. Versiones Geométrica y Analítica del Teorema de Hahn-Banach

Teorema 5.2.1 ***(Forma Geométrica del Teorema de Hahn-Banach)***
Sea X un EVT sobre $\mathbb{K}$, N un subespacio lineal de X y Ω un subconjunto abierto convexo de X tal que $N \cap \Omega = \emptyset$. Luego, existe un hiperplano cerrado H de X tal que $N \subseteq H$ y $H \cap \Omega = \emptyset$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, consideremos $\Omega \neq \emptyset$. La demostración se dividirá en 3 partes:

(1) *Existencia de un subespacio lineal H de X que es maximal, contiene a N y no intersecta a Ω.*

Sea $\mathscr{F}$ la familia de todos los subespacios L de X tales que

$$N \subseteq L \wedge L \cap \Omega = \emptyset. \tag{5.1}$$

Sea $\mathscr{C}$ una subfamilia totalmente ordenada de $\mathscr{F}$, $\cup\mathscr{C}$ es un subespacio lineal que cumple con 5.1 y es maximal en $\mathscr{C}$. Luego, por axioma del máximo, existe un elemento maximal $H \in \mathscr{F}$ que cumple 5.1.

(2) *H es cerrado en X.*

Del hecho que $H \cap \Omega = \emptyset$ se tiene $H \subset \Omega^c$. Además, al ser Ω abierto, su complemento Ω^c es un conjunto cerrado. Luego, $\bar{H} \subset \overline{\Omega^c} = \Omega^c$.
*Por Proposición 3.1.1, al ser clausura de un subespacio lineal, $\overline{H}$ es también un subespacio lineal de X. Sin embargo, por **(1)** H es maximal, por tanto $H = \bar{H}$.*

(3) *H es un hiperplano.*

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Sea $\phi \colon X \to X/H$ la función canónica. Como ϕ es una aplicación abierta, $\phi(\Omega)$ es un subconjunto abierto convexo de X/H.
Notar que $\phi(\Omega)$ no contiene a $\hat{0} \in X/H$.
En efecto, si suponemos que así sucede, se tiene que existe $x \in X$ tal que $\phi(x) = \hat{0}$ y, por tanto, $x \in H$. Lo que contradice el hecho que $H \cap \Omega = \emptyset$.
Definiendo

$$A = \underset{\lambda > 0}{\cup} \lambda\phi(\Omega)$$

Tenemos que A es un conjunto abierto, convexo y un cono de X/H.
Para hallar la dimensión de X/H, se consideran dos casos:

- *(i)* $\dim(X/H) = 0$
  De ocurrir esto, se tiene que $X/H = \{\hat{0}\}$, es decir, $H = X$. Lo que es una contradicción ya que inicialmente se asumió que $\Omega \neq \emptyset$ y $H \cup \Omega = \emptyset$.
- *(ii)* $\dim(X/H) \geq 2$
  Para demostrar que este caso tampoco es posible se hará uso de dos hechos, los que serán demostrados a continuación:
  - *Hecho 1: Existe al menos un punto $x \neq \hat{0}$ en la frontera ∂A de A.*
    Supongamos $\partial A = \{\hat{0}\}$. En el conjunto $X/H \setminus \{\hat{0}\}$ se tiene que $\partial A = \emptyset$, por tanto A es una componente conexa de $X/H \setminus \{\hat{0}\}$.

Como, además, $\dim(X/H) \geq 2$*, el espacio* $(X/H) \setminus \{\hat{0}\}$ *es arco-conexo y, por tanto, es conexo.*
De esta manera, se tiene que $A = (X/H) \setminus \{\hat{0}\}$*. Lo que contradice el hecho que* A *sea un conjunto conexo ya que* $(X/H) \setminus \{\hat{0}\}$ *no lo es.*
Por tanto, debe existir un elemento no nulo en ∂A*.*

- *Hecho 2*: $-x \notin A$
  Suponemos $-x \in A$*. Esto quiere decir que existe una vecindad* U *tal que* $-x \in U$ *y* $U \subset A$ *(*A *es abierto). Luego,* $-U$ *es vecindad de* x*.*
  Sea V *una vecindad cualquiera de* x*. Como* $x \in \partial A$*, existe* $y \in -V \cap A$*. Sin embargo, esto implica que* $-y \in V \subset A$ *y, al ser* A *un conjunto convexo, el segmento que une a* y *y* $-y$ *está también contenido en* A*, por tanto,* $\hat{0} \in A$*, lo que es una contradicción.*

Con estos resultados, junto al hecho de que A *es un conjunto abierto, se tiene que* $x \notin A$ *ya que* $x \in \partial A$*. A la vez que* $-x \notin A$*, por tanto,* $x, -x \in (X/H) \setminus A$ *implica que el segmento* $\mathcal{L}$*, que une* x *con* $-x$*, está igualmente contenido en* $(X/H) \setminus A$*.*
En efecto, supongamos que existe $y \in A \cap \mathcal{L}$*. Al pertenecer* $y \in \mathcal{L}$*,* x *puede ser escrito como*

$$x = \alpha y \tag{5.2}$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$*.*
Se tienen entonces dos casos:

- $\alpha > 0$: *Como* $y \in A$*, se tiene que* $\alpha y \in A$*, sin embargo, por 5.2, esto es equivalente a asegurar que* $x \in A$*, lo que es una contradicción.*
- $\alpha < 0$: *En este caso:* $-\alpha y \in A$*, sin embargo, tal afimación sería equivalente a asegurar que* $-x \in A$*, lo que también es una contradicción.*

Por tanto, no existe intersección entre A *y* $\mathcal{L}$*. Luego, se cumplen las siguientes propiedades:*

- $\phi^{-1}(\mathcal{L})$ *es subespacio lineal de* X *al ser la preimagen mediante una aplicación lineal de un subespacio lineal.*
- $\phi^{-1}(\mathcal{L}) \cap \Omega = \emptyset$ *ya que* $\mathcal{L} \cap A = \emptyset$*.*
- H *es un subespacio propio de* $\phi^{-1}(\mathcal{L})$ *ya que* $\{\hat{0}\} = \phi(H) \subset \mathcal{L}$ *pero, se debe notar que* $\{\hat{0}\} \neq \mathcal{L}$ *ya que* x *y* $-x$ *pertenecen a* $\mathcal{L}$*.*

Lo que contradice la maximalidad de H *demostrada en* ***(1)****.*

Por tanto, al descartarse los demás casos posibles, sólo puede cumplirse que $\dim(X/H) = 1$*.*

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si bien, en este caso, los escalares son complejos, es posible continuar considerando a X *como un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*. De esta manera su topología continuará siendo*

compatible con su estructura lineal.
Por el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sabemos que existe un hiperplano real H_0 de X tal que $N \subset X$ y $H_0 \cap \Omega = \emptyset$. Además, al ser hiperplano cumple que $\dim_{\mathbb{R}}(X/H) = 1$.
Luego, se puede notar que iN es un subespacio lineal de X: sean $ix, iy \in iN$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene $ix + \alpha(iy) = i(x + \alpha y) \in iN$ puesto que N es, a su vez, un subespacio de X.
Por tanto, se cumple que $iN \subset N$ y $N = (-i) \cdot iN \subset iN$, es decir, $N = iN$.
De esto, es posible definir $H\colon = H_0 \cap iH_0$, el que cumple con $N \subset H$ y $H \cap \Omega = \emptyset$.
Luego, al ser H la intersección de dos hiperplanos, es un espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{R}} = 2$. *Así, su dimensión compleja es* 1.

□

Teorema 5.2.2 ***(Forma Analítica del Teorema de Hahn-Banach)***
Sea p una seminorma sobre un espacio lineal X sobre $\mathbb{K}$, M un subespacio lineal de X y f un funcional lineal sobre M tal que $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in M$.
Entonces existe un funcional lineal $\hat{f}$ sobre X que extiende a f, es decir, $\forall x \in M, \hat{f}(x) = f(x)$ y $|\hat{f}(x)| \leq p(x), \forall x \in X$.

Demostración:

Considerando la hipótesis del teorema, tenemos que f es continua sobre M con respecto a la topología inducida por p sobre X.
Se define el conjunto $N = \{x \in M\colon f(x) = 1\}$. Sea $x_0 \in N$ un elemento cualquiera del conjunto, se cumple que $N - x_0 = \ker(f)$.
En efecto, sea $y \in N$ arbitrario, se tiene que

$$f(y - x_0) = f(y) - f(x_0) = 0$$

Es decir, $y - x_0 \in \ker(f)$. Por otro lado, si $k \in \ker(f)$, entonces $k + x_0 \in \ker(f) + x_0$. Luego,

$$f(k + x_0) = f(k) + f(x_0) = 1$$

Por tanto, $k + x_0 \in N$. Es decir, $\ker(f) \subset N - x_0$. De esto, y por Teorema 5.1.1, se tiene que $\ker(f)$ es un hiperplano de X y, por tanto, es un subespacio lineal de X.
Definiendo $M_0 := N - x_0$, se puede reescribir $M = M_0 \oplus \mathbb{K}x_0$, donde $\mathbb{K}x_0$ es el subespacio lineal de una dimensión a través de x_0 que permite que: para $x \in M$, existen únicos $\lambda \in \mathbb{K}$ y $y \in M_0$ tales que $x = y + \lambda x_0$. Luego,

$$f(x) = f(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda f(x_0) = \lambda$$

es decir que los valores de M mediante f están determinado por los obtenidos en N.
Sea $U := \mathring{U}_p = \{x \in X\colon p(x) < 1\}$ la bola unitaria abierta de p. Luego, U es un conjunto abierto conexo de X dotado de la topología inducida por p. Además notar que $N \cap U = \emptyset$, ya que, de cumplirse el caso contrario, se tendría que existe un elemento $x \in N \cap U$ tal que $p(x) < 1$ a la vez que $f(x) = 1$, lo que contradice la hipótesis sobre f y p.

A continuación, por la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach, se tiene que existe un hiperplano H que contiene a N y que cumple $H \cap U = \emptyset$. Luego, $H - x_0$ es un hiperplano y existe una función $\hat{f} \not\equiv 0$ en X de la que este subespacio es kernel.
Por el mismo argumento usado anteriormente, X puede ser descompuesta de la siguiente manera:

$$X = (H - x_0) \oplus \mathbb{K}x_0$$

y, por tanto, los valores de X mediante $\hat{f}$ están determinados por aquellos de H.
Como $\hat{f} \not\equiv 0$, se tiene que $\hat{f}(x_0) \neq 0$. Luego, sin pérdida de generalidad, se puede considerar $\hat{f}(x_0) = 1$, es decir, $\forall h \in H, \hat{f}(h) = 1$. Luego, para cualquier $x \in M$, existen únicos $\lambda \in \mathbb{K}$ y $y \in N - x_0 \subseteq H - x_0$ tales que $x = y + \lambda x_0$. De esto, se obtiene

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(y + \lambda x_0) = \hat{f}(y) + \lambda \hat{f}(x_0) = 0 + \lambda = \lambda f(x_0) = f(x)$$

lo que quiere decir que, efectivamente, $\hat{f}$ es la extensión de f a todo X.
Más aún, del hecho que $H \cap U = \emptyset$ se tiene que $\hat{f}(x) = 1$ implica que $p(x) = 1$. Luego, cualquiera sea $y \in X$ tal que $\hat{f}(x) \neq 0$, se cumple que

$$\hat{f}\left(\frac{y}{f(y)}\right) = 1 \Rightarrow p\left(\frac{y}{f(y)}\right)$$

Así, $|\hat{f}(y)| \leq p(y)$, cumpliéndose la propiedad requerida para todo $x \in X$.

□

5.3. Consecuencias del Teorema

Teorema 5.3.1 *Sea X un EVT l.c. Si f es un funcional lineal, bien definido y continuo sobre un subespacio M de X, entonces f tiene una extensión lineal continua hacia X.*

Demostración:

No es difícl notar que M es un EVT l.c. En efecto, sea $\mathscr{B}$ base de la topología localmente convexa τ de X. Una base para M es $\mathscr{B}_M := \{B \cap M : B \in \mathscr{B}\}$. Sean $x, y \in B \cap M$, y $0 < \lambda < 1$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M + M$ y $M + M \subset M$ por sus propiedades de subespacio y, a la vez, al ser B convexo, es inmediato que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B$. Por tanto, $B \cap M$ es un conjunto convexo.

De Teorema 4.3.1 y Corolario 4.3.1, existe una seminorma p sobre M tal que, para todo $y \in M$, $|f(y)| \leq p(y)$. Luego, por Teorema 5.2.2, existe una extensión $\hat{f}$ tal que, para todo $x \in X$, $|\hat{f}(x)| \leq p(x)$ y $f(y) = \hat{f}(y)$ para todo $y \in M$.

□

Definición 5.3.1 *Sean A y B dos subespacios disjuntos de X y H un hiperplano cerrado de X. Se dice que A y B son* ***separados por*** *H si, existe algún funcional lineal no nulo $L\colon X \to \mathbb{R}$ tal que existe $a \in \mathbb{R}$ que cumple $H = L^{-1}(\{a\})$ y $L(A) \geq a$ y $L(B) \leq a$.*
Se dice que A y B están ***estrictamente separados por*** *H cuando una de las dos desigualdades es estricta.*

Proposición 5.3.1 *Sea X un EVT sobre $\mathbb{R}$ y A, B dos conjuntos disjuntos convexos de X. Suponemos ambos conjuntos son no-vacíos.*

1. *Si A es abierto, entonces existe un hiperplano H de X que separa a A y B.*
2. *Si, además, se tiene que B es abierto entonces H puede ser elegido de manera que separe estrictamente a A y B.*
3. *Si A es un cono y B es abierto, entonces existe una aplicación lineal $L\colon X \to \mathbb{R}$ no nula tal que $L(A) \geq 0$ y $L(B) < 0$.*

Demostración:

1. *Consideramos al conjunto $A - B$.*
   Se puede notar que $0 \notin A - B$ puesto que, en caso contrario, se tendría que existe $x \in (A \cap B)$, lo que contradice el hecho que A y B sean disjuntos.
   Además, al ser suma de conjuntos convexos (A y $-B$), por Proposición 4.1.2, se tiene que $A - B$ es también un conjunto convexo.
   Luego, considerando $N = \{0\}$ y $\Omega = A - B$, el Teorema 5.2.1 asegura que existe un hiperplano cerrado H de X tal que $\{0\} \subset H$ y $H \cap (A - B) = \emptyset$.
   *Luego, por Teorema 5.1.1-**(b)**, existe un funcional lineal f sobre X no nulo tal que $H = \ker f$. Por lo anterior, se tiene que $f(A - B) \neq 0$.*
   Sea L un funcional lineal definido sobre X tal que, sea $x \in A - B$,

   $$L(x) \colon = \begin{cases} f(x) & si\ f(x) > 0 \\ -f(x) & si\ f(x) < 0 \end{cases}$$

   Se tiene que $L(A - B) > 0$. Luego, cualesquiera sean $a \in A$ y $b \in B$, se tiene que $L(a) > L(b)$.
   Como $B \neq 0$, sea $\hat{a} \colon = \inf\limits_{a \in A}\{L(a)\}$, se tiene que $\hat{a} > -\infty$. Por tanto, $L(B) \leq \hat{a}$ y $L(A) \geq \hat{a}$.

2. *Ahora, sea B abierto al igual que A.*
   Por 1., existen $\hat{a} \in \mathbb{R}$ y una aplicación lineal no nula $L\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $L(A) \geq \hat{a}$ y $L(B) \leq \hat{a}$.
   Suponemos que existe $b \in B$ tal que $L(b) = \hat{a}$.
   Al ser B abierto, se tiene que, cualquiera sea $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $t \in [0, \epsilon]$, $b + tx \in B$.

Por tanto, como $L(B) \leq \hat{a}$, se tiene que, para todo $t \in [0, \epsilon]$, $L(b+tx) \leq \hat{a}$.
Sea $x \in X$ fijo, se define

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) \colon = L(b+tx) \end{aligned}$$

Se puede notar que, por la linealidad de L, $g'(t) = L(x)$ cualquiera sea $t \in [0, \epsilon]$. Luego, el hecho que $L(b+tx) \leq \hat{a}$ implica que $t = 0$ es un máximo local para g. Por tanto, $g'(0) = L(x) = 0$.
Sin embargo, como $x \in X$ fue escogido de manera arbitraria, se tendría que $L \equiv 0$ sobre X, lo que contradice la hipótesis.
Así, $L(B) < \hat{a}$.

3. *Consideramos ahora A un cono convexo no vacío de X y B un abierto convexo de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$.*
   Por 1., existen $\hat{a} \in \mathbb{R}$ y $L \colon X \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal no nula tal que $L(A) \geq \hat{a}$ y $L(B) \leq \hat{a}$.
   Al ser A un cono, cualquiera sea $t > 0$, se tiene que $tA \subset A$ y, por tanto, $tL(A) = L(tA) \geq \hat{a}$, expresado de otra manera se tiene que $L(A) \geq \frac{\hat{a}}{t}$. Lo que implica que

$$L(A) \geq \inf_{t>0} \left\{ \frac{\hat{a}}{t} \right\} = 0.$$

   Más aún, 1. asegura que $L(B) < L(A)$.
   Luego, de manera análoga a lo anterior, cualquiera sea $t > 0$ y $a \in A$, se tiene que $L(B) \leq \inf_{t>0} \{tL(a)\} = 0$ ya que $L(B) < L(tA) = tL(A)$.
   Por último, al ser B un conjunto abierto, por 2., se tiene que $L(B) < 0$.

□

Corolario 5.3.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de la topología localmente convexa más fina φ. Si C es un cono cerrado no-vacío en X y $x_0 \in X \setminus C$, entonces existe un funcional lineal $L \colon X \to \mathbb{R}$ no nulo tal que $L(C) \geq 0$ y $L(x_0) < 0$.*

Demostración:

Como C es cerrado en (X, φ) y $x_0 \in X \setminus C$, $X \setminus C$ es una vecindad abierta de x_0. Luego, la convexidad local de (X, φ) garantiza la existencia de una vecindad abierta V de x_0 tal que $V \subset X \setminus C$, es decir, $V \cap C = \emptyset$.
Por proposición anterior, existe $L \colon X \to \mathbb{R}$ lineal no nula tal que $L(C) \geq 0$ y $L(V) < 0$, en particular, $L(x_0) < 0$.

□

Bibliografía

[1] Bourbaki, Nicolas., *General Topology, Chapters 1-4.* Springer, 1966.

[2] Bourbaki, Nicolas., *Topological Vector Spaces, Chapters 1-5.* Springer, 1987.

[3] Gärtner, Bernd., Hoffman, Michael., *Computational Geometry.* Lecture Notes, ETH Zurich, 2013.

[4] Ghirardato, Paolo., *Quantitative Methods for Economics.* Lecture Notes, Universitá de Torino, 2017.

[5] Infusino, Maria., *Topological Vector Spaces.* Lecture Notes, University of Konstanz, Winter semester 2015-2016.

[6] James, I.M., *Introduction to Uniform Spaces.* Cambridge University Press, 1990.

[7] Limaye, Balmohan., *Functional Analysis.* 2nd edition. New Age, 1996.

[8] Munkres, James., *Topology.* 2nd edition. Prentice Hall, 2000.

[9] Schaefer, H.H., *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, 1971.

[10] Sleziak, Martin., *Topology seminar notes.* Univerzita Komenskho, April 2009.

[11] Treves, Francois., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press, 1970.

[12] Wilde, Ivan., *Topological Vector Spaces.* Lecture Notes, King's College, 2003.

[13] Willard, Stephen., *General Topology.* Addison-Wesley, 1970.