



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magíster en Matemática

Desarrollo asintótico de Dulac de la función pasaje de esquina en la familia Loud.

Tesis para optar al grado de *Magíster en Matemática*

NICOLE ROXANA CARRASCO VIDAL
CONCEPCIÓN-CHILE
2017

Profesora Guía: Mariana Ruth Saavedra Segura
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magíster en Matemática

Desarrollo asintótico de Dulac de la función pasaje de esquina en la familia Loud.

Tesis para optar al grado de *Magíster en Matemática*

NICOLE ROXANA CARRASCO VIDAL
CONCEPCIÓN-CHILE
2017

Profesora Guía: Mariana Ruth Saavedra Segura
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Desarrollo asintótico de Dulac de la función pasaje
de esquina en la familia Loud.

Nicole Roxana Carrasco Vidal

En estas palabras pretendo plasmar mis sinceros agradecimientos a todos quienes hicieron posible que esta tesis llegara a buen puerto.

En primer lugar y de manera especial a la señorita Mariana Saavedra Segura, mi profesora guía de tesis. Por su paciencia (infinita), meticulosidad, perfeccionismo y por todos los conocimientos que compartió conmigo tanto matemáticos como de redacción. Durante este proceso (que no era infinito pero lo parecía), aprendí muchísimo gracias a la profesora Mariana y a todos los docentes del Departamento de Matemática de la Universidad de Concepción, quienes han sido partícipes e influyentes en mi formación, desde el pregrado.

Agradezco sin lugar a dudas a mi familia. A mis padres, Ademar y Yolanda, porque siempre me entregaron las mejores energías para que este proyecto resultara de lo mejor. Gracias papitos por su apoyo incondicional en esto y todo lo que me proponga.

A mi hermano Rudy, y su hermosa familia, Valentina, Maximiliano y Facundo, quienes siempre estuvieron al pendiente del avance de este trabajo. Maki y Facu, mis sobrinos bellos, gracias por hacerme feliz.

A mis amigos por estar presentes entregándome buenas energías y ánimo. A los wps con quienes compartimos aula en esta facultad y entienden lo difícil que es. Gracias a todos por escucharme, por darme aliento, por disfrutar juntos muy buenos momentos y por estar presentes en los no tan buenos.

Amor mío Cristián. Has sido fundamental en este proceso. No sé como agradecer-te y devolverte la mano. Siempre estuviste conmigo cuando las cosas se nos ponían complejas, con una palabra de aliento, reafirmando mi confianza en mis conocimientos, compartiendo buenos momentos, regañándome cuando me desenfocaba. Infinitas gracias por tu apoyo, compañía y cariño mi amor.

Muchísimas gracias a todos.

Índice general

Introducción	4
1. Preliminares	6
1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias.	6
1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas.	8
1.3. Variedades Invariantes	10
1.4. Teorema del Flujo Tubular.	11
1.5. Aplicación de Poincaré.	13
2. Desarrollos asintóticos [6].	15
2.1. Anillo de Dulac.	15
2.2. Grupo Formal de Dulac	19
2.3. Grupo de Dulac	24
3. Aplicación a la Familia Loud.	28
3.1. Existencia de un policiclo.	28
3.2. Función pasaje de esquina.	30
3.2.1. Estudio de la función de Dulac d	33
3.2.2. Estudio de la función f_1	37
3.2.3. Estudio de la función f_2	39
3.2.4. Finalización de la demostración del Teorema A	43

Índice de figuras

1.1. Flujo Tubular	13
1.2. Sección Transversal en a	13
1.3. Policiclos	14
3.1. P_F	31
3.2. Función R	33
3.3. Cambio de coordenadas ϕ	36
3.4. Cambio de coordenadas φ	40
3.5. Función f_2	43

Introducción

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria, analítica,

$$E : \quad \frac{dx}{dt} = A(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = B(x, y),$$

sobre un abierto de \mathbb{R}^2 . Supongamos que E tiene una silla hiperbólica. Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$, p sobre la variedad estable de la silla y q sobre la inestable. Sean σ y π dos curvas analíticas, transversales a las curvas integrales de E ,

$$\sigma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

y

$$\pi :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2,$$

con $\sigma(0) = p$ y $\pi(0) = q$. Suponemos que para todo $s \in]0, 1[$, la semiórbita positiva de E que pasa por $\sigma(s)$ corta a $\pi(]0, 1[)$ en $\pi(R(s))$. La función

$$s \mapsto R(s)$$

es llamada función pasaje de esquina o función de Dulac.

Estamos interesados en el comportamiento cualitativo de la función R . La función R es un difeomorfismo analítico en todo punto s positivo pero no lo es, en general, para $s = 0$. En [1], Dulac prueba que la función d posee en $s = 0$ una expansión asintótica en $\{s^\mu\}_{\mu \in \mathbb{R}^+}$ y $\{s^\delta (\log s)^m\}_{\delta \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}_0}$, llamada desarrollo asintótico de Dulac (ver [4]). Más precisamente, el desarrollo asintótico de R es del tipo

$$\hat{R}(s) = as^\lambda + \sum_{n \geq 1} s^{\lambda_n} P_n(-\log s),$$

donde $a > 0$, $0 < \lambda < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n es un polinomio con coeficientes reales.

En este trabajo, consideramos la siguiente familia de ecuaciones diferenciales polinomiales cuadráticas, subfamilia de la familia Loud,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + xy \\ \frac{dy}{dt} = x + Fy^2, \end{cases} \quad (1)$$

donde $F \in]-1/2, 0[$. Esta familia posee una silla hiperbólica analíticamente linealizable, por lo que en el desarrollo asintótico de la función pasaje de esquina R no aparecen términos con logaritmos.

Demostremos en este trabajo, que la función R , asociada a la silla del sistema (1), posee efectivamente un desarrollo asintótico de Dulac sin términos logarítmicos y determinamos su parte principal. Más precisamente, demostramos el siguiente teorema.

Teorema A. La función pasaje de esquina R posee un desarrollo asintótico de Dulac y verifica la igualdad

$$R(s; F) = \left(\frac{1 - 2F}{-2F} \right)^{1+2F} s^{-2F} (1 + r(s; F)),$$

donde la función r está definida y es analítica en $]0, \delta[\times]-1/2, 0[$, para algún $\delta > 0$, y $\lim_{s \rightarrow 0^+} r(s; F) = 0$, para cada $F \in]-1/2, 0[$.

Para probar este teorema, reducimos el problema a uno local, es decir, estudiamos las funciones de Poincaré a lo largo de las variedades invariantes de la silla y, a lo largo del correspondiente sector silla donde es válida la linealización de la ecuación (1).

Plan de Trabajo.

Esta tesis se descompone en tres capítulos. En el primer capítulo, se revisan los conceptos y teoremas generales de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el segundo capítulo, se hace un estudio exhaustivo de las series de Dulac y de las funciones que poseen un desarrollo asintótico de Dulac.

En el capítulo tres, se hace un estudio de la ecuación (1). Se demuestra que ella posee, de hecho, dos sillas hiperbólicas cuyas variedades invariantes se intersectan de tal manera que acotan una región formada por órbitas periódicas. Finalmente, se demuestra el Teorema A para la función R asociada a una de estas sillas.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a recordar conceptos y resultados básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias que son necesarios en el capítulo tres, [5], [7].

En la primera sección, damos la definición de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y lo que es una solución de ésta. Enunciamos además los teoremas que garantizan la existencia y unicidad de estas soluciones.

En la segunda sección, consideramos las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas. Recordamos los conceptos de órbita, puntos singulares y regulares, retrato de fase y de flujo. Enunciamos también el Teorema que afirma que el flujo es una función diferenciable, de la misma clase de diferenciabilidad que la de la ecuación diferencial que lo define.

En la sección tres, enunciamos el Teorema que garantiza la existencia de variedades invariantes para un punto singular hiperbólico.

En la sección cuatro, damos los conceptos de equivalencia y conjugación, topológica, de clase C^r y analítica y enunciamos el Teorema del Flujo Tubular.

Finalmente, en la sección cinco, damos la definición de sección transversal y de policiclo. Recordamos, además, el Teorema que garantiza la existencia de la llamada función de Poincaré.

1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sean $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $(x, t) \mapsto f(x, t)$. Una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden* es una ecuación de la forma

$$E : \frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (1.1)$$

Definición 1.1.1. Una función diferenciable $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama *solución* o *curva integral de la ecuación* (1) en el intervalo I , si para todo t en I se satisfacen:

- i) $(\varphi(t), t) \in U$

ii) $\varphi'(t) = f(\varphi(t), t)$.

Si t es un punto extremo del intervalo, la derivada $\varphi'(t)$ es la derivada lateral respectiva.

La ecuación E tiene, en general, infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Por esto es necesario agregar condiciones suplementarias a la ecuación.

Definición 1.1.2. Se dice que la solución φ de la ecuación E verifica la *condición inicial* $(x_0, t_0) \in U$ si $\varphi(t_0) = x_0$.

Teorema 1.1.3. (de Peano) Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, donde $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Para todo $(x_0, y_0) \in U$, la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ tiene una solución φ tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Este teorema nos asegura solamente la existencia de soluciones de la ecuación diferencial, pero no así la unicidad de ésta. Para tener la unicidad de soluciones necesitamos definir lo siguiente:

Definición 1.1.4. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Decimos que una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, es *k-Lipschitziana en x* si

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq k\|x_1 - x_2\|,$$

para todo $(x_1, t), (x_2, t) \in U$. La función f se dice localmente Lipschitziana en x si para todo punto (x_0, t_0) , existe una vecindad V de (x_0, t_0) en U y una constante $k > 0$ tal que la restricción $f|_V$ sea k-Lipschitziana.

Teorema 1.1.5. (de existencia y unicidad local) Sea la función continua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Existe un intervalo I , con $t_0 \in I$, un abierto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, con $x_0 \in B$ y una única solución $\varphi : I \rightarrow B$ de E que verifica la condición $\varphi(t_0) = x_0$.

Definición 1.1.6. Se llama *solución maximal* de E a toda solución φ definida en un intervalo I , denominado *intervalo maximal* de φ , tal que si ψ es otra solución en un intervalo J que contiene a I y además $\psi|_I$ coincide con φ entonces $I = J$.

Lemma 1.1.7. Sean $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos soluciones de E . Si existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tales que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ entonces $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

El teorema de existencia y unicidad local y el lema anterior permiten demostrar el teorema de existencia y unicidad global que se enuncia a continuación.

Teorema 1.1.8. *(de existencia y unicidad global) Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ localmente lipschitziana en x . Para todo $(x_0, t_0) \in U$ existe una única solución maximal de E denotada por $\varphi : J =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$, con $t_0 \in J$ que verifica $\varphi(t_0) = x_0$. Además toda solución de E se prolonga en una única solución maximal.*

1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas.

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . En lo que sigue consideramos una ecuación diferencial autónoma

$$E : \frac{dx}{dt} = F(x), \quad x \in U.$$

Definición 1.2.1. Se dice que la función $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto F(x)$, es el *campo vectorial* asociado a la ecuación diferencial E .

Definición 1.2.2. Decimos que la ecuación E es de clase \mathcal{C}^r , con $r \geq 1$, si la función F es de clase \mathcal{C}^r .

Supongamos que la ecuación diferencial E es de clase \mathcal{C}^r sobre el abierto U , con $r \geq 1$. Denotemos por

$$\varphi_x :]\alpha_x, \beta_x[= I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$$

la solución maximal de E que verifica la condición inicial $\varphi_x(0) = x$.

Definición 1.2.3. El conjunto $\gamma_x = \{\varphi_x(t), t \in I_x\}$ se llama *órbita* o *trayectoria* de E que pasa por x .

Observemos que si $x_1 \in \gamma_x$, entonces existe $t_1 \in I_x$ tal que $x_1 = \varphi_x(t_1)$. La función

$$\begin{aligned} \phi :]\alpha_x - t_1, \beta_x - t_1[&\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi_x(t + t_1) \end{aligned}$$

verifica $\phi(0) = x_1$ y $\phi'(x) = F(\phi(x))$ y es la solución maximal φ_{x_1} de E .

Definición 1.2.4. Si la órbita de E que pasa por p es igual a p entonces diremos que p es un *punto singular* o *punto de equilibrio*, si no, p es un *punto regular*.

El punto p es singular si y sólo si $F(p) = 0$. Si p es regular, entonces la solución maximal φ_p tiene derivada $\varphi'_p(t) = F(\varphi_p(t))$ que no se anula.

Definición 1.2.5. Un punto de equilibrio p de la ecuación E es *hiperbólico* si ninguno de los autovalores de la matriz jacobiana de F en p , $DF(p)$, tiene parte real cero. El punto p es una *silla hiperbólica* si $DF(p)$ tiene al menos un valor propio con parte real positiva y al menos un valor propio con parte real negativa.

Definición 1.2.6. En el caso bidimensional, si p es una silla hiperbólica de la ecuación diferencial E , el *número característico* es $\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz jacobiana de F en p .

Definición 1.2.7. Una solución φ_x es *periódica* si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\varphi_x(t + c) = \varphi_x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.2.8. Si φ_x no es inyectiva y $F(x) \neq 0$ entonces, φ_x es periódica y γ_x es homeomorfa a un círculo. Decimos entonces que γ_x es un ciclo u órbita cerrada de E .

Definición 1.2.9. Un punto singular p es un *centro* si existe una vecindad V de p tal que $V - \{p\}$ está formado por órbitas cerradas. Se dice que un centro es *no degenerado* si los valores propios de la matriz jacobiana en p del campo de vectores asociado a E son imaginarios puros, no nulos.

Si $\varphi_x : I_x =]\alpha_x, \beta_x[\rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva, γ_x es una órbita no compacta. En este caso tenemos las semiórbitas

$$\gamma_x^+ = \varphi_x(]0, \beta_x]) \quad \text{y} \quad \gamma_x^- = \varphi_x(]0, \alpha_x])$$

llamadas *semiórbitas positivas* y *negativas* respectivamente. Las semiórbitas negativas de la ecuación $E : \frac{dx}{dt} = F(x)$ son las semiórbitas positivas de la ecuación $E^* : \frac{dx}{dt} = -F(x)$ y a la inversa.

Definición 1.2.10. El *retrato de fase* de E es la partición de U en órbitas de E , orientadas en el sentido de las curvas integrales de la ecuación.

Proposición 1.2.11. Sea $g : U \rightarrow]0, \infty[$ una función de clase \mathcal{C}^r . Las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = F(x)$ y $\frac{dx}{dt} = g(x)F(x)$ tienen los mismos retratos de fase.

Definición 1.2.12. El *flujo integral* de la ecuación E es la función

$$\Phi : V = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times I_x \rightarrow U, \quad \Phi(x, t) = \varphi_x(t).$$

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.2.13. *El conjunto V es un abierto de $U \times \mathbb{R}$, Φ es de clase \mathcal{C}^r y verifica que:*

$$i) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) = F(\Phi(x, t)) \text{ si } (x, t) \in V.$$

$$ii) \quad \Phi(x, 0) = x \text{ si } x \in V.$$

iii) $\Phi(x, t + t_1) = \Phi(\Phi(x, t), t_1)$ si $(x, t), (x, t + t_1) \in V$. Además la condición $(x, t), (x, t + t_1) \in V$ es equivalente a que $(x, t), (\Phi(x, t), t_1) \in V$.

Definición 1.2.14. Sea U abierto de \mathbb{R}^n , una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^∞ , se dice *analítica* sobre U si para todo $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$, existe $\rho > 0$ tal que para $\|x - a\| < \rho$, su desarrollo de Taylor en a

$$T_a f(x) = f(a) + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(a)$$

es una serie que converge a $f(x)$.

Teorema 1.2.15. *Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ analítica, es decir, cada componente de F es una función analítica. El flujo integral de la ecuación*

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

es analítico.

Observación 1.2.16. Las soluciones de una ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = P(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y P una función polinomial, no son necesariamente funciones polinomiales.

1.3. Variedades Invariantes

Consideremos la ecuación diferencial $E : \frac{dx}{dt} = F(x)$, con $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde U es un abierto de \mathbb{R}^n . Supongamos que $p = 0$ es una singularidad hiperbólica de E . Sea $JF(0)$ la matriz jacobiana de F en cero. Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son valores propios de $JF(0)$, con parte real negativa y $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ son valores propios de $JF(0)$ con parte real positiva. Sean v_1, v_2, \dots, v_k los vectores propios asociados a los valores propios con parte real negativa, y v_{k+1}, \dots, v_n los vectores propios asociados a los valores propios con parte real positiva.

Definición 1.3.1. Sean los conjuntos

$$E^s = \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle \quad E^u = \langle \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \rangle.$$

Estos espacios reciben el nombre de *Espacio estable* y *Espacio inestable* respectivamente.

Bajo estas notaciones, enunciamos el siguiente Teorema.

Teorema 1.3.2. *Existe una variedad diferenciable S , k -dimensional, tangente al subespacio estable E^s en cero, tal que para todo $t \geq 0$, $\Phi_t(S) \subset S$ y para todo $q \in S$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(q) = 0.$$

Además existe una variedad $(n - k)$ -dimensional U tangente al subespacio estable E^u en cero tal que para todo $t \leq 0$, $\Phi_t(U) \subset U$ y para todo $q \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(q) = 0.$$

En la siguiente definición, recordamos el concepto de variedad diferenciable.

Definición 1.3.3. Una *variedad diferenciable n -dimensional*, M (o una *variedad de clase \mathcal{C}^k*), es un espacio métrico conexo con un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$, es decir $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, tal que

- i) para todo α , U_α es homeomorfo a una bola abierta unitaria B de \mathbb{R}^n , es decir, para todo α existe un homeomorfismo $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$, y
- ii) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$, $h_\beta : U_\beta \rightarrow B$ son homeomorfismos, entonces $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son subconjuntos de \mathbb{R}^n y

$$h = h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es diferenciable (o de clase \mathcal{C}^k) y para todo $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, el determinante de la matriz jacobiana de h en x es no nulo. La variedad se dice *analítica* si h es analítica.

1.4. Teorema del Flujo Tubular.

Sean $E : \frac{dx}{dt} = F(x)$ y $E_1 : \frac{dx}{dt} = F_1(x)$ dos ecuaciones diferenciales de clase \mathcal{C}^r definidas sobre los abiertos U y U_1 de \mathbb{R}^n respectivamente. Consideremos $\Phi : V \rightarrow U$ y $\Phi_1 : V_1 \rightarrow U_1$ los flujos generados por las ecuaciones respectivas.

Definición 1.4.1. Las ecuaciones diferenciales E y E_1 son *topológicamente equivalentes* (\mathcal{C}^r -*equivalentes*) si existe un homeomorfismo (difeomorfismo de clase \mathcal{C}^r) $h : U \rightarrow U_1$ que lleva curvas integrales de E en curvas integrales de E_1 , preservando la orientación de las trayectorias. Más precisamente, si $p \in U$ y $\varphi(p)$ es una solución de E que pasa por p , entonces $h(\varphi(p))$ es una solución $\varphi_1(h(p))$ de E_1 , que pasa por $h(p)$. Diremos que h es una *equivalencia topológica* (*equivalencia de clase \mathcal{C}^r*) entre las ecuaciones E y E_1 .

Definición 1.4.2. Se dice que E es *topológicamente conjugada* (\mathcal{C}^r *conjugada* o *analíticamente conjugada*) a E_1 , si existe un homeomorfismo (resp. difeomorfismo de clase \mathcal{C}^r o difeomorfismo analítico) $h : U \rightarrow U_1$ tal que $h(\Phi(x, t)) = \Phi_1(h(x), t)$, para todo $(x, t) \in D$.

La proposición que sigue nos entrega la relación existente entre las órbitas de ecuaciones diferenciales equivalentes.

Proposición 1.4.3. *Sea h una equivalencia topológica entre E y E_1 .*

1. *Un punto $p \in U$ es una singularidad de la ecuación E si y sólo si $h(p)$ es una singularidad de E_1 .*
2. *La órbita γ_p , de la ecuación E que pasa por p es cerrada si y sólo si la órbita $\gamma_{h(p)}^1$ de E_1 que pasa por $h(p)$, es cerrada.*

Observación 1.4.4. Bajo cambios de coordenadas de clase \mathcal{C}^r la ecuación diferencial $E : \frac{dx}{dt} = F(x)$ es \mathcal{C}^r -conjugada a una ecuación diferencial $E_1 : \frac{dy}{dt} = g(y)F(y)$ de clase \mathcal{C}^r , donde g es una función a valores reales estrictamente positiva.

Teorema 1.4.5. *(del flujo tubular) Sea $E : \frac{dx}{dt} = F(x)$ una ecuación diferencial de clase \mathcal{C}^r sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, y sea $a \in U$ tal que $F(a) \neq 0$. La ecuación diferencial E es \mathcal{C}^r -conjugada a la ecuación diferencial*

$$E_1 : \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = 0 \\ \frac{dz_2}{dt} = 0 \\ \vdots \\ \frac{dz_{n-1}}{dt} = 0 \\ \frac{dz_n}{dt} = 1 \end{cases}$$

definida sobre el abierto $C = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n; |z_i| < 1\}$.

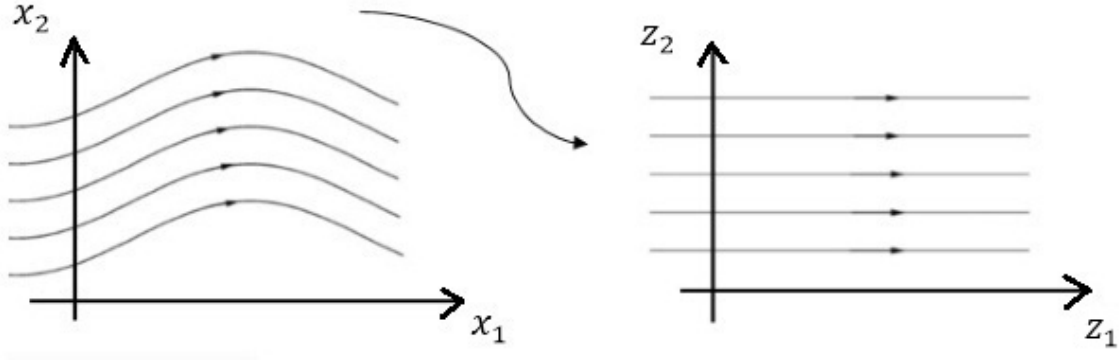


Figura 1.1: Flujo Tubular

1.5. Aplicación de Poincaré.

Definición 1.5.1. Sean $E : \frac{dx}{dt} = F(x)$ una ecuación diferencial de clase \mathcal{C}^r (resp. analítica) con $r \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ abierto. Llamaremos *sección transversal* en un punto a de E de clase \mathcal{C}^r (resp. analítica) a la imagen de una aplicación $\sigma : A \rightarrow U$ de clase \mathcal{C}^r (resp. analítica) tal que $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ y $F(f(a))$ generan el espacio \mathbb{R}^n .

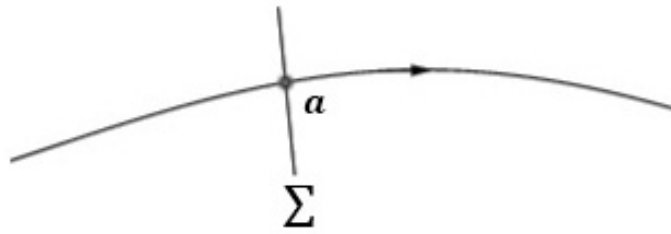


Figura 1.2: Sección Transversal en a

Proposición 1.5.2. (*Aplicación de Poincaré*) Sea γ una órbita no singular de la ecuación diferencial E , sean p, q dos puntos de γ con $q = \Phi(p, t_0)$, $t_0 \neq 0$, y sean Σ_p y Σ_q dos secciones transversales en p y q respectivamente. Existe una sección transversal local $\bar{\Sigma}_p \subset \Sigma_p$ en p , un \mathcal{C}^r -difeomorfismo $h : \bar{\Sigma}_p \rightarrow h(\bar{\Sigma}_p) \subset \Sigma_q$ y una función de clase \mathcal{C}^r , $\eta : \bar{\Sigma}_p \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo $x \in \bar{\Sigma}_p$

$$h(x) = \Phi(x, t_0 + \eta(x)), \quad \eta(p) = 0.$$

El difeomorfismo h y la función η son analíticos si E es una ecuación diferencial analítica.

Supongamos que la órbita γ es periódica de período T y $p = q = \Phi(p, T)$. Eligiendo $\Sigma_p = \Sigma_q$, la aplicación $h : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$ es un \mathcal{C}^r difeomorfismo sobre su imagen, llamada *aplicación de retorno de Poincaré de la órbita γ evaluada sobre la sección transversal Σ_p* .

Daremos a continuación la definición de Políciclo que será un elemento importante en el Capítulo 3.

Definición 1.5.3. Un *políciclo* P es una unión conexa finita de singularidades (*vértices del políciclo*) y curvas integrales (*lados del políciclo*) de E , que posee una *aplicación de retorno* R ; es decir, existe una sección transversal Σ , imagen de una curva analítica

$$\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma(0) \in P,$$

tal que la curva integral que pasa por $\sigma(s)$ interseca nuevamente a Σ , una primera vez, en un punto $\sigma(R(s))$, para s suficientemente pequeño.

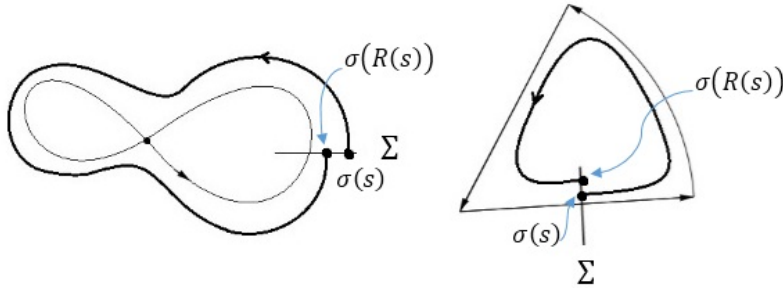


Figura 1.3: Polí Ciclos

Observemos que la función R define una aplicación de Poincaré “generalizada” evaluada sobre la transversal Σ .

Capítulo 2

Desarrollos asintóticos [6].

El objetivo de este capítulo es el estudio de las funciones definidas en una vecindad de 0 en \mathbb{R}^+ , de clase C^∞ fuera de cero. Primeramente, en la sección uno, estudiamos el anillo de Dulac y los objetos formales asociados. En la sección dos, consideramos el caso particular de las llamadas series de Dulac, que conforman un grupo con la composición de series. Finalmente, en la sección tres, estudiamos las funciones que poseen un desarrollo asintótico de Dulac.

2.1. Anillo de Dulac.

Las series que consideraremos en esta sección, son una extensión de las series de Taylor. Estudiaremos sus propiedades.

Definición 2.1.1. Se llama *monomio de Dulac* a un monomio del tipo:

$$y_\alpha = x^\lambda (-\log x)^p,$$

con $x > 0$ y $\alpha = (\lambda, p)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$ y la función \log es el logaritmo natural.

Proposición 2.1.2. *El producto de dos monomios de Dulac es un monomio de Dulac. Más precisamente se tiene que $y_\alpha \cdot y_\beta = y_{\alpha+\beta}$.*

Demostración. Sean y_α e y_β dos monomios de Dulac con $\alpha = (\lambda_1, p_1)$ y $\beta = (\lambda_2, p_2)$. Es decir,

$$y_\alpha = x^{\lambda_1} (-\log x)^{p_1} \quad , \quad y_\beta = x^{\lambda_2} (-\log x)^{p_2}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} y_\alpha \cdot y_\beta &= (x^{\lambda_1} (-\log x)^{p_1}) \cdot (x^{\lambda_2} (-\log x)^{p_2}) \\ &= x^{\lambda_1 + \lambda_2} (-\log x)^{p_1 + p_2} \\ &= y_{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$



Consideraremos el siguiente orden en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0$:

$$(\lambda_1, p_1) \leq (\lambda_2, p_2) \quad \text{si} \quad \lambda_1 < \lambda_2 \text{ ó } (\lambda_1 = \lambda_2) \text{ y } p_1 \geq p_2.$$

Este orden corresponde al orden lexicográfico de los pares $(\lambda, -p)$. Observemos que si $\alpha < \beta$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y_\beta}{y_\alpha} = 0$.

Sea \hat{A} el conjunto de las series

$$\hat{f} = a + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n y_{\alpha_n},$$

donde $a, a_n \in \mathbb{R}$ y $\alpha_n = (\lambda_n, p_n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0$ son tales que $\{\alpha_n\}$ es estrictamente creciente con $\lambda_n \rightarrow \infty$, si $n \rightarrow \infty$.

De acuerdo con el orden escogido en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0$, es claro que para un λ_n fijo, existe un número finito de $p_n \in \mathbb{N}$ tal que el monomio y_{α_n} , donde $\alpha_n = (\lambda_n, p_n)$, aparece en la serie \hat{f} . Así, un elemento $\hat{f} \in \hat{A}$ se escribe

$$\hat{f}(x) = a + \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{\lambda_n} P_n(-\log x), \quad x > 0,$$

donde $\{\lambda_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente, no acotada de números reales positivos y $P_n(X)$ son polinomios con coeficientes reales. El conjunto $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ lo denotaremos por $\Lambda_{\hat{f}}$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, se denota por $j_\lambda \hat{f}$ el truncado de \hat{f} al orden λ , es decir, si $\lambda \geq \lambda_1$

$$j_\lambda \hat{f}(x) = a + \sum_{\lambda_n \leq \lambda} x^{\lambda_n} P_n(-\log x).$$

Si $0 \leq \lambda < \lambda_1$, $j_\lambda \hat{f}(x) = a$ y si $\lambda < 0$, $j_\lambda \hat{f}(x) = 0$.

Definición 2.1.3. Sea \hat{f} no nula. Se define el orden de \hat{f} como el más pequeño $\lambda \geq 0$ tal que el truncado $j_\lambda \hat{f}(x)$ es distinto de cero. El orden de $\hat{f} \in \hat{A}$ se denota por $ord(\hat{f})$.

Proposición 2.1.4. El conjunto \hat{A} es un anillo con la suma y producto de series usuales. Se tiene que $\Lambda_{\hat{f}+\hat{g}} \subset \Lambda_{\hat{f}} \cup \Lambda_{\hat{g}}$ y $\Lambda_{\hat{f}\hat{g}} \subset \Lambda_{\hat{f}} + \Lambda_{\hat{g}}$.

Demostración. Sean $\hat{f}(x) = a + \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{\lambda_n} P_n(-\log x)$ y $\hat{g}(x) = b + \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{\mu_n} Q_n(-\log x)$ elementos en \hat{A} con $x > 0$. Considerando la sucesión $\{\alpha_n\}$ (estrictamente creciente), donde $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = \Lambda_{\hat{f}} \cup \Lambda_{\hat{g}}$, podemos escribir

$$\hat{f}(x) = a + \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{\alpha_n} R_n^1(-\log x)$$

y

$$\hat{g}(x) = b + \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{\alpha_n} R_n^2(-\log x),$$

donde $R_n^1 = P_n$, si $\alpha_n = \lambda_n$ y $R_n^1 = 0$ si $\alpha_n = \mu_n$. Análogamente $R_n^2 = Q_n$, si $\alpha_n = \mu_n$ y $R_n^2 = 0$ si $\alpha_n = \lambda_n$.

La demostración sigue como para las series de potencias. ■

Definición 2.1.5. Diremos que una sucesión $\{\hat{f}_n\}$ en \hat{A} es convergente en \hat{A} si existe $\hat{f} \in \hat{A}$ tal que

$$\forall \lambda > 0, \exists k \in \mathbb{N} : n \geq k \Rightarrow j_\lambda \hat{f}_n = j_\lambda \hat{f}.$$

Observemos que si la sucesión $\{\hat{f}_n\}$ verifica:

$$\forall \lambda > 0, \exists k \in \mathbb{N} : r, s \geq k \Rightarrow j_\lambda \hat{f}_r = j_\lambda \hat{f}_s \quad ,$$

entonces es convergente.

Proposición 2.1.6. Si $\{\hat{f}_n\}$ es una sucesión en \hat{A} tal que $\text{ord}(\hat{f}_n)$ tiende a ∞ cuando n tiende a ∞ entonces la serie $\sum \hat{f}_n$ converge en \hat{A} .

Demostración. Como $\text{ord}(\hat{f}_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, para $\lambda > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda < \text{ord}(\hat{f}_n)$ para todo $n \geq k$. Sea

$$\hat{S}_n = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \cdots + \hat{f}_n.$$

Se tiene que

$$j_\lambda \hat{S}_n = j_\lambda \hat{f}_1 + j_\lambda \hat{f}_2 + \cdots + j_\lambda \hat{f}_n.$$

Si $n > k$ se tiene que $j_\lambda \hat{f}_n = 0$, esto implica que $\forall n > k$ se cumple que

$$j_\lambda \hat{S}_n = j_\lambda \hat{f}_1 + j_\lambda \hat{f}_2 + \cdots + j_\lambda \hat{f}_k = j_\lambda \hat{S}_k.$$

Por lo tanto $\{\hat{S}_n\}$ converge en \hat{A} . ■

Sea \hat{A}^0 el subanillo de \hat{A} de las series con término constante cero. Es decir, si $\hat{f}(x)$ pertenece a \hat{A}^0 entonces $\hat{f}(x)$ se escribe de la forma:

$$\hat{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{\lambda_n} P_n(-\log x), \quad x > 0,$$

con $\{\lambda_n\}$ una sucesión estrictamente creciente no acotada de números reales positivos y $P_n(X)$ polinomios con coeficientes reales.

Proposición 2.1.7. *Si $\hat{f} \in \hat{A}^0$ entonces la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n \hat{f}^n$, con $a_n \in \mathbb{R}$, converge en \hat{A} . Cuando \hat{f} es no nula y los coeficientes a_n no son todos iguales a cero, el orden de esta serie es o bien cero si $a_0 \neq 0$, o bien $n_0 \cdot \text{ord}(\hat{f})$, donde n_0 es el índice n más pequeño tal que a_n es no nulo.*

Demostración. Sea $\hat{f} \in \hat{A}^0$, no nula. Como

$$\Lambda_{\hat{f}^n} = \left\{ \sum \lambda_i p_i : \lambda_i \in \Lambda_{\hat{f}}, p_i \in \mathbb{N}, \sum p_i = n \right\},$$

el orden de \hat{f}^n es igual a $n \cdot \text{ord}(\hat{f})$ y así $\text{ord}(\hat{f}^n)$ tiende a ∞ cuando n tiende a ∞ . Por la proposición 2.1.6 se tiene que la serie $\hat{S} = \sum a_n \hat{f}^n$ converge en \hat{A} .

Además, si $a_0 \neq 0$ entonces $\hat{S} = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \hat{f}^n$, por lo tanto $\text{ord}(\hat{S}) = 0$. Si $a_0 = a_1 = \dots = a_{n_0-1} = 0$ y $a_{n_0} \neq 0$ entonces el orden de la serie \hat{S} es igual a $\text{ord}(\hat{f}^{n_0})$, es decir, es igual a $n_0 \cdot \text{ord}(\hat{f})$. ■

Corolario 2.1.8. *Si $\mu \in \mathbb{R}$ y $\hat{f} \in \hat{A}^0$ entonces las series*

$$(1 + \hat{f})^\mu = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\mu \cdot (\mu - 1) \cdots (\mu - n + 1)}{n!} \hat{f}^n$$

y

$$\log(1 + \hat{f}) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \hat{f}^n,$$

convergen en \hat{A} .

Demostración. Por la proposición anterior, ambas series convergen en \hat{A} . El orden de la serie $(1 + \hat{f})^\mu$ es cero. Por otro lado el orden de la serie $\log(1 + \hat{f})$ es igual al orden de \hat{f} , y en particular $\log(1 + \hat{f})$ pertenece al subanillo \hat{A}^0 de \hat{A} . ■

2.2. Grupo Formal de Dulac

En esta sección estudiaremos un subconjunto del anillo de Dulac que conforma un grupo con la composición de series.

Se denota por \hat{D} el conjunto de las series del tipo siguiente:

$$\hat{\varphi}(x) = ax^\lambda + \sum_{k \geq 1} x^{\lambda_k} P_k(\log x),$$

donde $a > 0$, $0 < \lambda < \lambda_1$, $\{\lambda_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente no acotada de números reales positivos y $P_k(X)$ son polinomios con coeficientes reales.

Observemos que los elementos en el conjunto \hat{D} se pueden escribir de la forma:

$$\hat{\varphi}(x) = ax^\lambda(1 + \hat{f}(x)),$$

donde $a > 0$, $\lambda > 0$ y $\hat{f} \in \hat{A}^0$.

Proposición 2.2.1. *Sea $\hat{\varphi}(x) = ax^\lambda(1 + \hat{f}(x))$, un elemento en \hat{D} .*

1. *La serie $(\hat{\varphi}(x))^\mu$ definida por $a^\mu x^{\lambda\mu}(1 + \hat{f}(x))^\mu$ pertenece a \hat{D} si $\mu > 0$. Además esta serie es igual a $a^\mu x^{\lambda\mu} + \hat{h}(x)$, donde \hat{h} pertenece a \hat{A}^0 y cuyo orden es $\lambda\mu + \text{ord}(\hat{f})$.*
2. *Si $\mu > 0$, $m \in \mathbb{N}$ y $\log \hat{\varphi}(x)$ es la serie $\lambda \log x + \log a + \log(1 + \hat{f}(x))$ entonces $(\hat{\varphi}(x))^\mu (-\log \hat{\varphi}(x))^m$ es una serie en \hat{A}^0 . El orden de esta serie es igual al orden de $(\hat{\varphi}(x))^\mu$.*
3. *La serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\hat{\varphi}(x))^{\mu_n} P_n(-\log \hat{\varphi}(x))$ converge en \hat{A}^0 si la sucesión $\{\mu_n\} \subset \mathbb{R}^+$ es estrictamente creciente no acotada y los $P_n(X)$ son polinomios con coeficientes reales.*

Demostración. 1. Sea $\hat{\varphi}(x) = ax^\lambda(1 + \hat{f}(x)) \in \hat{D}$ con $\hat{f} \in \hat{A}^0$. Por el corolario 2.1.8, se tiene que $(1 + \hat{f}(x))^\mu \in \hat{A}$, y es igual a una serie del tipo $1 + \hat{g}(x)$ con $\hat{g} \in \hat{A}^0$ y $\text{ord}(\hat{g}) = \text{ord}(\hat{f})$.

Así,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x)^\mu &= a^\mu x^{\lambda\mu} (1 + \hat{f}(x))^\mu \\ &= a^\mu x^{\lambda\mu} (1 + \hat{g}(x)), \end{aligned}$$

con $\hat{g} \in \hat{A}^0$. Por lo tanto, si $\mu > 0$ entonces $(\hat{\varphi}(x))^\mu \in \hat{D}$. Denotando por $\hat{h}(x)$ el producto $a^\mu x^{\lambda\mu} \cdot \hat{g}(x)$, se tiene que $(\hat{\varphi}(x))^\mu = a^\mu x^{\lambda\mu} + \hat{h}(x)$ con $\hat{h} \in \hat{A}^0$. Además, $\text{ord}(\hat{h}) = \lambda\mu + \text{ord}(\hat{g}) = \lambda\mu + \text{ord}(\hat{f})$. Con esto se demuestra la parte 1.

2. Como $\log \hat{\varphi}(x)$ es la serie $\lambda \log x + \log a + \log(1 + \hat{f}(x))$, por lo que acabamos de demostrar, se tiene que

$$(\hat{\varphi}(x))^\mu (-\log \hat{\varphi}(x))^m = \left(a^\mu x^{\lambda\mu} + \hat{h}(x) \right) \left(-\lambda \log x - \log a - \log(1 + \hat{f}(x)) \right)^m,$$

con $\hat{h} \in \hat{A}^0$ cuyo orden es mayor que $\lambda\mu$. Denotemos por $\hat{s}(x)$ la serie $\log(1 + \hat{f}(x))$. Por el corolario 2.1.8 sabemos que $\hat{s}(x) \in \hat{A}^0$. Así,

$$(\hat{\varphi}(x))^\mu (-\log \hat{\varphi}(x))^m = a^\mu x^{\lambda\mu} (-\lambda \log x - \log a - \hat{s}(x))^m + \hat{h}(x) (-\lambda \log x - \log a - \hat{s}(x))^m.$$

Desarrollando la potencia $(-\lambda \log x - \log a - \hat{s}(x))^m$ y multiplicándola respectivamente por $a^\mu x^{\lambda\mu}$ y por $\hat{h}(x)$, obtenemos una serie perteneciente a \hat{A}^0 . Más precisamente,

$$(\hat{\varphi}(x))^\mu (-\log \hat{\varphi}(x))^m = a^\mu x^{\lambda\mu} (-\lambda \log x)^m + \hat{r}(x),$$

con $\hat{r}(x) \in \hat{A}^0$ y $\text{ord}(\hat{r}) > \lambda\mu$.

De aquí se obtiene que el orden de $(\hat{\varphi}(x))^\mu (-\log \hat{\varphi}(x))^m$ es $\lambda\mu$ que coincide con el orden de $\hat{\varphi}^\mu$.

3. Observemos que $(\hat{\varphi}(x))^\mu P_n(-\log \hat{\varphi}(x))$ es una suma finita de elementos del tipo $(\hat{\varphi}(x))^\mu (-\log \hat{\varphi}(x))^m$. Por lo tanto $(\hat{\varphi}(x))^\mu P_n(-\log \hat{\varphi}(x))$ pertenece a \hat{A}^0 .

De la parte 2, el orden de $(\hat{\varphi}(x))^{\mu_n} P_n(-\log \hat{\varphi}(x))$ es igual al orden de $(\hat{\varphi}(x))^{\mu_n}$, es decir, es igual a $\mu_n \cdot \text{ord}(\hat{\varphi}(x))$. Si $\{\mu_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente no acotada de números reales positivos, entonces $\mu_n \cdot \text{ord}(\hat{\varphi}(x))$ tiende a ∞ cuando n tiende a ∞ . Así por la proposición 2.1.6, la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\hat{\varphi}(x))^{\mu_n} P_n(-\log \hat{\varphi}(x))$ pertenece a \hat{A} . Como el orden de esta serie es distinto de cero, ella pertenece a \hat{A}^0 . ■

Corolario 2.2.2. *Sea $\hat{\varphi}$ en \hat{D} .*

1. *Si $\hat{\psi}(x)$ pertenece a \hat{A} y es de la forma $a + \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{\mu_n} P_n(-\log x)$, entonces la serie $\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}$ definida por*

$$\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}(x) = a + \sum_{n \in \mathbb{N}} (\hat{\varphi}(x))^{\mu_n} P_n(-\log \hat{\varphi}(x))$$

pertenece a \hat{A} .

2. *Si $\hat{\psi}(x)$ pertenece a \hat{D} entonces $\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}(x)$ pertenece a \hat{D} .*

Demostración. 1. Es directa de la parte 3 de la proposición anterior.

2. Si $\hat{\psi}(x)$ es un elemento en \hat{D} , es decir, $a = 0$ y $P_1(X) = c$ es una constante real positiva, se tiene que la compuesta cumple

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (\widehat{\varphi}(x))^{\mu_n} P_n(-\log \widehat{\varphi}(x)) = c(\widehat{\varphi}(x))^{\mu_1} + \sum_{n \geq 2} (\widehat{\varphi}(x))^{\mu_n} P_n(-\log \widehat{\varphi}(x)).$$

Por lo tanto, de la proposición 2.2.1 se tiene que $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}$ es un elemento en \widehat{D} . ■

Observemos que el orden de $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}$ es la multiplicación del orden de $\widehat{\psi}$ con el de $\widehat{\varphi}$.

Proposición 2.2.3. *Sea $\widehat{\varphi} \in \widehat{D}$, la función $H_{\widehat{\varphi}} : \widehat{A}^0 \rightarrow \widehat{A}^0$ definida por $H_{\widehat{\varphi}}(\widehat{g}) = \widehat{g} \circ \widehat{\varphi}$, es un automorfismo de \widehat{A}^0 .*

Demostración. Debemos demostrar que la función $H_{\widehat{\varphi}}$ es un homomorfismo de anillos biyectivo. La demostración de que $H_{\widehat{\varphi}}$ es un homomorfismo de anillos es inmediata pues se cumple que dados \widehat{g} y \widehat{h} dos elementos en \widehat{A}^0 , se tiene

$$H_{\widehat{\varphi}}(\widehat{g} + \widehat{h}) = (\widehat{g} + \widehat{h}) \circ \widehat{\varphi} = \widehat{g} \circ \widehat{\varphi} + \widehat{h} \circ \widehat{\varphi} = H_{\widehat{\varphi}}(\widehat{g}) + H_{\widehat{\varphi}}(\widehat{h}),$$

y

$$H_{\widehat{\varphi}}(\widehat{g} \cdot \widehat{h}) = (\widehat{g} \cdot \widehat{h}) \circ \widehat{\varphi} = (\widehat{g} \circ \widehat{\varphi}) \cdot (\widehat{h} \circ \widehat{\varphi}) = H_{\widehat{\varphi}}(\widehat{g}) \cdot H_{\widehat{\varphi}}(\widehat{h}).$$

Falta demostrar que $H_{\widehat{\varphi}}$ es biyectiva. Es suficiente, considerar el caso

$$\widehat{\varphi}(x) = x(1 + \widehat{f}(x)).$$

En efecto, sean $\widehat{\varphi}(x) = ax^\lambda(1 + \widehat{f}(x)) \in \widehat{D}$ y $\widehat{\varphi}_1(x) = x(1 + \widehat{f}_1(x))$ con $\widehat{f}_1(x) = \widehat{f}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)$. Para $\widehat{h} \in \widehat{A}^0$, se quiere demostrar que existe un único $\widehat{g} \in \widehat{A}^0$ tal que $H_{\widehat{\varphi}}(\widehat{g}) = \widehat{h}$, es decir, $\widehat{g} \circ \widehat{\varphi} = \widehat{h}$.

Si $H_{\widehat{\varphi}_1}$ es un automorfismo de \widehat{A}^0 entonces, para $\widehat{h}_1(x) = \widehat{h}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)$, existe un único $\widehat{g} \in \widehat{A}^0$ tal que $\widehat{g} \circ \widehat{\varphi}_1 = \widehat{h}_1$.

Componiendo a la derecha por la función ax^λ se tiene que

$$\widehat{g} \circ \widehat{\varphi}_1(ax^\lambda) = \widehat{h}_1(ax^\lambda)$$

lo que implica que

$$\widehat{g}\left(ax^\lambda\left(1 + \widehat{f}_1(ax^\lambda)\right)\right) = \widehat{h}_1(ax^\lambda)$$

al reemplazar f_1 se tiene que

$$\widehat{g}\left(ax^\lambda\left(1 + \widehat{f}\left(\left(\frac{ax^\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\right)\right) = \widehat{h}\left(\left(\frac{ax^\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)$$

por lo tanto

$$\hat{g}\left(ax^\lambda(1+\hat{f}(x))\right)=\hat{h}(x)$$

Así,

$$\hat{g}\circ\hat{\varphi}(x)=\hat{h}(x).$$

Demostremos entonces la proposición en el caso en que $\hat{\varphi}(x)=x(1+\hat{f}(x))$. Probaremos que, para $\hat{h}=\sum h_n\in\hat{A}^0$ dado, donde $h_n(x)=x^{\alpha_n}Q_n(-\log x)$, existe un único $\hat{g}=\sum g_n\in\hat{A}^0$ donde $g_n(x)=x^{\mu_n}P_n(-\log x)$, tal que $\hat{h}=\hat{g}\circ\hat{\varphi}$. En efecto, sea $\hat{h}=\sum h_n\in\hat{A}^0$. Calculemos los términos $g_n(x)$. Por la proposición 2.2.1 ítem 2. se tiene que

$$g_n\circ\hat{\varphi}(x)=x^{\mu_n}P_n(-\log x)+\hat{r}_n(x),$$

donde $\hat{r}_n\in\hat{A}^0$ y $\text{ord}(\hat{r}_n)=\mu_n+\text{ord}(\hat{f})$. Es decir

$$g_n\circ\hat{\varphi}(x)=g_n(x)+\hat{r}_n(x). \quad (2.1)$$

Luego,

$$\hat{h}=\hat{g}\circ\hat{\varphi}\Leftrightarrow\hat{h}=g_0\circ\hat{\varphi}+g_1\circ\hat{\varphi}+\dots$$

lo que es equivalente a

$$\hat{h}=g_0+\hat{r}_0+g_1\circ\hat{\varphi}+\dots$$

Así,

$$g_0=h_0,$$

Escribamos \hat{g} de la forma $\hat{g}=g_0+\hat{g}^1$. Se tiene $\hat{h}=\hat{g}\circ\hat{\varphi}$, por lo tanto

$$\hat{h}=(g_0+\hat{g}^1)\circ\hat{\varphi}$$

que es equivalente a

$$\hat{h}-g_0\circ\hat{\varphi}=\hat{g}^1\circ\hat{\varphi}.$$

Por lo tanto

$$\hat{h}-g_0-\hat{r}_0=\hat{g}^1\circ\hat{\varphi}.$$

Finalmente, reemplazando g_0 por h_0 se tiene que

$$\hat{h}-h_0-\hat{r}_0=\hat{g}^1\circ\hat{\varphi}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \text{ord}(\hat{r}_0) &= \mu_0 + \text{ord}(\hat{f}) \\ &= \alpha_0 + \text{ord}(\hat{f}) \\ &= \text{ord}(\hat{h}) + \text{ord}(\hat{f}) \end{aligned}$$

y

$$\text{ord}(\hat{h} - h_0) = \alpha_1 > \alpha_0$$

A la serie $\hat{h} - h_0 - \hat{r}_0$ la denotamos por \hat{H}^1 . Observemos que $\text{ord}(\hat{H}^1) > \text{ord}(\hat{h})$. Así, $\hat{h} = \hat{g} \circ \hat{\varphi}$ si y solo si $\hat{H}^1 = \hat{g}^1 \circ \hat{\varphi}$. Escribiendo \hat{g}^1 de la forma $g_1 + \hat{g}^2$ se tiene

$$\hat{H}^1 = g_1 \circ \hat{\varphi} + \hat{g}^2 \circ \hat{\varphi}.$$

De la igualdad (2.1), se tiene

$$\begin{aligned} \hat{H}^1(x) &= g_1 \circ \hat{\varphi}(x) + \hat{g}^2 \circ \hat{\varphi} \\ &= g_1(x) + \hat{r}_1(x) + \hat{g}^2 \circ \hat{\varphi} \end{aligned}$$

De manera general, se calcula g_n con ayuda de la fórmula

$$\hat{H}^n = \hat{h} - g_0 \circ \hat{\varphi} - g_1 \circ \hat{\varphi} - \cdots - g_{n-1} \circ \hat{\varphi} = \hat{g}^n \circ \hat{\varphi},$$

donde \hat{g}^n es la serie que cumple $\hat{g} = g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-1} + \hat{g}^n$. Se tiene que $\text{ord}(\hat{H}^n) > \text{ord}(\hat{H}^{n-1})$.

De esta manera se tiene la sucesión estrictamente creciente $\{\text{ord}(\hat{H}^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Probemos que posee una subsucesión $\{\text{ord}(\hat{H}^{n_m})\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\text{ord}(\hat{H}^{n_m}) \geq \text{ord}(\hat{h}) + m \cdot \text{ord}(\hat{f})$. En efecto, sabemos que los exponentes α_n que aparecen en \hat{h} cumplen que $\alpha_n \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$, por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n > k$ entonces $\alpha_n \geq \alpha_0 + \text{ord}(\hat{f})$. Sea n_1 el índice n más pequeño tal que $\alpha_n \geq \alpha_0 + \text{ord}(\hat{f})$. Por lo tanto para n_1 se tiene

$$\hat{H}^{n_1} = h_{n_1} + h_{n_1+1} + \cdots - \hat{r}_0 - \hat{r}_1 - \cdots - \hat{r}_{n_1-1},$$

donde $\hat{r}_i \in \hat{A}^0$ son de orden $\alpha_i + \text{ord}(\hat{f})$. Más precisamente, podemos decir que

$$\hat{H}^{n_1} = k_0 + k_1 + \cdots + k_n + \cdots,$$

donde $k_i(x)$ son del tipo $x^{\lambda_i} S_i(-\log x)$, con $\lambda_0 \geq \alpha_0 + \text{ord}(\hat{f})$ y los λ_i son estrictamente crecientes no acotados, los $S_i(X)$ polinomios con coeficientes reales. El mismo argumento que antes, muestra que existe un índice $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1$ tal que $\text{ord}(\hat{H}^{n_2}) \geq \alpha_0 + 2\text{ord}(\hat{f})$. En general se obtiene una sucesión $\{n_m\}_{m \geq 1}$ estrictamente creciente de \mathbb{N} tal que $\text{ord}(\hat{H}^{n_m}) \geq \alpha_0 + m \cdot \text{ord}(\hat{f})$. Por lo tanto $\text{ord}(\hat{H}^n) \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$. Así, \hat{g} es una serie de \hat{A}^0 y está únicamente determinada por \hat{h} . Con esto hemos demostrado que la función $H_{\hat{\varphi}}$ es sobreyectiva.

Con esto se demuestra que $H_{\hat{\varphi}}$ es un automorfismo de \hat{A}^0 . ■

Teorema 2.2.4. *El conjunto \hat{D} es un grupo con la composición definida en el corolario 2.2.2. Este grupo opera sobre el anillo \hat{A} por composición a la derecha. Más precisamente dados $\hat{f} \in \hat{A}$ y $\hat{\varphi} \in \hat{D}$ se tiene que $\hat{f} \circ \hat{\varphi} \in \hat{A}$.*

Demostración. Por el corolario 2.2.2 ítem 2, se tiene que \hat{D} es cerrada para la composición de series.

Sea $\hat{\varphi}(x) = ax^\lambda(1 + \hat{\varphi}_1(x)) \in \hat{D}$, con $a > 0$, $\hat{\varphi}_1 \in \hat{A}^0$. Demostremos que la inversa de $\hat{\varphi} \in \hat{D}$ pertenece a \hat{D} .

La inversa de $\hat{\varphi}$ es una serie $\hat{\varphi}^{-1}$ que verifica $\hat{\varphi}(\hat{\varphi}^{-1}(x)) = x$. Así, $\hat{\varphi}^{-1}$ es la serie $\hat{\varphi}^{-1}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} + \hat{g}(x)$, donde la serie \hat{g} verifica

$$x = x(1 + \hat{\varphi}_1(x))^{\frac{1}{\lambda}} + \hat{g} \circ \hat{\varphi}(x).$$

La serie $\hat{h}(x) = x - x(1 + \hat{\varphi}_1(x))^{\frac{1}{\lambda}}$ pertenece a \hat{A}^0 . La proposición 2.2.3 afirma que existe $\hat{g} \in \hat{A}^0$ tal que $\hat{g} \circ \hat{\varphi}(x) = \hat{h}(x)$. Luego \hat{g} esta determinada por la proposición anterior.

Además de 2.2.3 se tiene que si $\hat{f} \in \hat{A}$ y $\hat{\varphi} \in \hat{D}$ entonces $\hat{f} \circ \hat{\varphi} \in \hat{A}$. ■

2.3. Grupo de Dulac

En esta sección estudiaremos las funciones que poseen un desarrollo asintótico de Dulac.

Definición 2.3.1. Sea $f :]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$, $\delta > 0$, una función de clase \mathcal{C}^∞ . Se dice que f posee un *desarrollo asintótico* $\hat{f}(x) = a + \sum_{k \in \mathbb{N}} x^{\lambda_k} P_k(-\log x)$ en \hat{A} si

$$f(x) = a + \sum_{k=1}^n x^{\lambda_k} P_k(-\log x) + o(x^{\lambda_n}), \quad (2.2)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $o(x^{\lambda_n})$ denota una función $r(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{r(x)}{x^{\lambda_n}} = 0$.

Si $n \in \mathbb{N}$ y la igualdad (2.2) se cumple, se dice que la suma finita $a + \sum_{k=1}^n x^{\lambda_k} P_k(-\log x)$ es un desarrollo asintótico de f a la *precisión* λ_n . Cuando \hat{f} es no nula la *parte principal* de f es a si $a \neq 0$. Si $a = 0$, entonces la parte principal es $a_s x^{\lambda_s} (-\log x)^{m_s}$ donde $\lambda_s = \text{ord}(\hat{f})$, a_s y m_s son respectivamente el coeficiente principal y el grado del polinomio $P_s(X)$. Se denota por A y A^0 los conjuntos de las funciones reales de clase \mathcal{C}^∞ definidas a la derecha de cero, que poseen un desarrollo asintótico en \hat{A} y en \hat{A}^0 respectivamente.

Proposición 2.3.2. .

1. Si f admite un desarrollo asintótico \hat{f} en \hat{A} , éste es único.

2. A es un anillo con la suma y producto de funciones. La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ de A en \hat{A} es un homomorfismo de anillos.

Demostración. 1. Sea $f \in A$. Si $\hat{f}(x) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k x^{\lambda_k} (-\log x)^{m_k} \in \hat{A}$ es un desarrollo asintótico de f con (λ_k, m_k) estrictamente creciente, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a_0$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{s-1} a_k x^{\lambda_k} (-\log x)^{m_k} \right) / x^{\lambda_s} (-\log x)^{m_s} = a_s.$$

Por la unicidad del límite, los coeficientes a_k de \hat{f} están únicamente determinados por f . Lo que demuestra que \hat{f} es único.

2. Sean f y g funciones en el conjunto A cuyos desarrollos asintóticos respectivos son

$$\hat{f}(x) = a + \sum_{k \geq 1} x^{\lambda_k} P_k(-\log x) \quad \text{y} \quad \hat{g}(x) = b + \sum_{k \geq 1} x^{\alpha_k} Q_k(-\log x).$$

Veamos que $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$ y $\widehat{f \cdot g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Para r y s números naturales se tiene que

$$f(x) = a + \sum_{k=1}^r x^{\lambda_k} P_k(-\log x) + o(x^{\lambda_r}) \quad \text{y} \quad g(x) = b + \sum_{k=1}^s x^{\alpha_k} Q_k(-\log x) + o(x^{\alpha_s}).$$

Para la suma se asocian los términos con los mismos exponentes, se reordenan en orden creciente y no se consideran los términos que cumplan con $x^{\alpha_j} Q_j(-\log x) = o(x^{\lambda_r})$ y $x^{\lambda_k} P_k(-\log x) = o(x^{\alpha_s})$. Al hacer esto, la precisión obtenida es la más pequeña de las precisiones de los dos desarrollos. Así, para obtener el desarrollo de $f + g$ con una precisión δ , se eligen r y s tales que λ_r y α_s sean mayores o iguales a δ , y no se consideran los términos que son despreciables con respecto a x^δ . Así, $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$.

Para el producto, se reagrupan los términos $a x^{\alpha_k} Q_k(-\log x)$, $b x^{\lambda_k} P_k(-\log x)$ y $x^{\lambda_j + \alpha_k} P_j(-\log x) Q_k(-\log x)$ (recordemos que el producto de monomios de Dulac es un monomio del mismo tipo, por lo tanto, $x^{\lambda_j + \alpha_k} P_j(-\log x) Q_k(-\log x) = x^{\lambda_j + \alpha_k} S(-\log x)$). Luego de ello, no se consideran los términos que son despreciables con respecto a $x^{\lambda + \alpha_s}$ o a $x^{\lambda_r + \alpha}$ donde $\lambda = ord(\hat{f})$ y $\alpha = ord(\hat{g})$ y la precisión que se obtiene es la menor entre $\lambda + \alpha_s$ y $\lambda_r + \alpha$. Por lo tanto para obtener el desarrollo de $f \cdot g$ con una precisión δ , se eligen r y s tales que $\lambda + \alpha_s$ y $\lambda_r + \alpha$ sean mayores o iguales a δ y no se consideran los términos despreciables con respecto a x^δ . Por lo tanto, $\widehat{f \cdot g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$. ■

Definición 2.3.3. Se denota por D el subconjunto de A de difeomorfismos $f :]0, \delta[\rightarrow]0, \varepsilon[$ de clase \mathcal{C}^∞ , que poseen un desarrollo asintótico \hat{f} en \hat{D} . Se dice que \hat{f} es el desarrollo asintótico de Dulac de f .

Teorema 2.3.4. El conjunto D con la composición de funciones es un grupo que opera sobre el anillo A por composición a la derecha. Más precisamente, si $f \in A$ y $\varphi \in D$ entonces $f \circ \varphi \in A$ y además $\widehat{f \circ \varphi} = \hat{f} \circ \hat{\varphi}$.

Demostración. Sean $f \in A$ y $\varphi \in D$,

$$\hat{f}(x) = a + \sum_{k \geq 1} x^{\lambda_k} P_k(-\log x) \quad \text{y} \quad \hat{\varphi}(x) = bx^\alpha \left(1 + \sum_{k \geq 1} x^{\alpha_k} Q_k(-\log x) \right),$$

sus desarrollos asintóticos respectivos.

Para r y s naturales, se tiene:

$$f(x) = a + \sum_{k=1}^r x^{\lambda_k} P_k(-\log x) + o(x^{\lambda_r})$$

y

$$\varphi(x) = bx^\alpha \left(1 + \sum_{k=1}^s x^{\alpha_k} Q_k(-\log x) + o(x^{\alpha_s}) \right),$$

con b y α números reales estrictamente positivos. Así,

$$f \circ \varphi(x) = a + \sum_{k=1}^r (\varphi(x))^{\lambda_k} P_k(-\log \varphi(x)) + o((\varphi(x))^{\lambda_r}),$$

donde

$$(\varphi(x))^{\lambda_k} = b^{\lambda_k} x^{\lambda_k \alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^s x^{\alpha_k} Q_k(-\log x) + o(x^{\alpha_s}) \right)^{\lambda_k} \quad (2.3)$$

y

$$P_k(-\log \varphi(x)) = P_k \left(-\log b - \alpha \log x - \log \left(1 + \sum_{k=1}^s x^{\alpha_k} Q_k(-\log x) + o(x^{\alpha_s}) \right) \right).$$

Por lo tanto, la función $\varphi^{\lambda_k} P_k(-\log \varphi)$ posee un desarrollo asintótico en \hat{A}^0 , de orden $\alpha \lambda_k$ y precisión $\alpha \lambda_k + \alpha_s$. Observemos que $o(\varphi(x)^{\lambda_r}) = o(x^{\alpha \lambda_r})$.

Se agrupan los términos de los desarrollos de las funciones $\varphi^{\lambda_k} P_k(-\log \varphi)$, luego se eliminan todos los que son despreciables con respecto a $x^{\alpha \lambda_1 + \alpha_s}$ o con respecto a $x^{\alpha \lambda_r}$.

Así, para obtener el desarrollo de la compuesta $f \circ \varphi$ a una precisión δ , se escogen los naturales r y s de modo que δ sea el menor entre $\alpha\lambda_r$ y $\alpha\lambda_1 + \alpha_s$, y no se consideran los términos que son despreciables con respecto a x^δ . Se tiene así que $\widehat{f \circ \varphi} = \widehat{f} \circ \widehat{\varphi}$ y por lo tanto $f \circ \varphi \in A$.

Si f es un elemento en D , es decir si su parte principal es del tipo cx^λ con c y λ reales estrictamente positivos entonces se tiene que la parte principal de $f \circ \varphi(x)$ es $cb^\lambda x^{\lambda\alpha}$. Así se concluye que $f \circ \varphi \in D$.

Falta demostrar que si $\widehat{\varphi}(x) = ax^\lambda(1 + \widehat{\varphi}_1(x))$ es el desarrollo asintótico de $\varphi \in D$ entonces el desarrollo asintótico de la inversa φ^{-1} es $\widehat{\varphi}^{-1}(y) = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} + \widehat{g}(y)$ donde $\widehat{g} \in \widehat{A}^0$ está dada por

$$x = x(1 + \widehat{\varphi}_1(x))^{\frac{1}{\lambda}} + \widehat{g} \circ \widehat{\varphi}(x). \quad (2.4)$$

(Ver la proposición 2.2.3). En efecto, \widehat{g} se escribe

$$\widehat{g}(y) = \sum g_k(y) \quad \text{donde} \quad g_k(y) = y^{\alpha_k} Q_k(-\log y),$$

con $\alpha_k > 0$ y $Q_k(X)$ un polinomio con coeficientes reales. Debemos demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\varphi^{-1}(y) - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{k \leq n} g_k(y) \right) / y^{\alpha_n} = 0.$$

Para ello, consideramos el cambio de variable $x = \varphi^{-1}(y)$. Se calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{(\varphi(x))^{\alpha_n}}$ con $H(x) = x - \left(\frac{\varphi(x)}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{k \leq n} g_k \circ \varphi(x)$. De (2.4) se deduce que el desarrollo asintótico de H es $\sum_{k \geq n+1} g_k \circ \widehat{\varphi}(x)$. Se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) / (\varphi(x))^{\alpha_n} = 0.$$

■

Capítulo 3

Aplicación a la Familia Loud.

La forma normal Loud

$$E : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + Bxy \\ \frac{dy}{dt} = x + Dx^2 + Fy^2, \end{cases}$$

con $B, D, F \in \mathbb{R}$, posee un centro en el origen. En este capítulo, consideraremos el caso $B = 1$, $D = 0$ y $F \in]-\frac{1}{2}, 0[$. La frontera de la banda de órbitas periódicas que rodean al centro, tiene 2 componentes conexas, una es el centro mismo y la otra es una unión de 2 órbitas regulares que se intersectan en 2 sillas hiperbólicas.

Nos interesa estudiar la función pasaje de esquina asociada a una de las sillas hiperbólicas. De [1] y [4], sabemos que estas funciones tienen un desarrollo asintótico de Dulac. El objetivo de este capítulo es calcular su parte principal, es decir, el primer término no nulo de dicho desarrollo.

3.1. Existencia de un policiclo.

Esta sección estará enfocada en demostrar que la familia Loud con $B = 1$, $D = 0$ y $F \in]-\frac{1}{2}, 0[$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + xy \\ \frac{dy}{dt} = x + Fy^2, \end{cases} \quad (3.1)$$

posee un policiclo formado por dos sillas hiperbólicas conectadas por una órbita regular. Denotaremos por X_F el campo de vectores asociado al sistema (3.1). Así,

$$\begin{aligned} X_F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto X_F(x, y) = (-y + xy, x + Fy^2). \end{aligned}$$

Las singularidades de (3.1) son los puntos (x, y) tales que $X_F(x, y) = (0, 0)$, es decir:

$$-y + xy = 0 \quad y \quad x + Fy^2 = 0.$$

Así, las singularidades de (3.1) son: $(0, 0)$, $\left(1, \sqrt{\frac{1}{-F}}\right)$ y $\left(1, -\sqrt{\frac{1}{-F}}\right)$. La matriz jacobiana del campo de vectores X_F en un punto (x, y) es:

$$JX_F(x, y) = \begin{pmatrix} y & -1 + x \\ 1 & 2Fy \end{pmatrix}.$$

En el punto $(0, 0)$, la matriz

$$JX_F(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene como valores propios a $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, por lo que $(0, 0)$ podría ser un foco o bien un centro. Se deduce que $(0, 0)$ es un centro porque el sistema (3.1) es simétrico con respecto al eje x , es decir, el sistema (3.1) es invariante bajo la transformación $(x, y, t) \rightarrow (x, -y, -t)$. De hecho, se tiene que

$$\nabla(x(-t), -y(-t)) = X_F(x, y).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \nabla(x(-t), -y(-t)) &= \left(\frac{dx}{dt}(-t) \cdot (-1), -\frac{dy}{dt}(-t) \cdot (-1)\right) \\ &= \left(-\frac{dx}{dt}(-t), \frac{dy}{dt}(-t)\right) \\ &= \left(-(y - xy), x + F(-y)^2\right) = X_F(x, y). \end{aligned}$$

Así, el sistema (3.1) tiene un centro en el origen.

Ahora, los valores propios de la matriz

$$JX_F\left(1, \sqrt{\frac{1}{-F}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{-F}} & 0 \\ 1 & -2\sqrt{-F} \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{-F}} > 0$ y $\lambda_2 = -2\sqrt{-F} < 0$. Por lo tanto, el punto singular $\left(1, \sqrt{\frac{1}{-F}}\right)$ es una silla hiperbólica.

El punto $\left(1, -\sqrt{\frac{1}{-F}}\right)$ es también una silla hiperbólica ya que la matriz

$$JX_F\left(1, -\sqrt{\frac{1}{-F}}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{-F}} & 0 \\ 1 & 2\sqrt{-F} \end{pmatrix}$$

tiene como valores propios a $\lambda_1 = -\sqrt{\frac{1}{-F}} < 0$ y a $\lambda_2 = 2\sqrt{-F} > 0$.

Proposición 3.1.1. *La función $H_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $H_F(x, y) = (1-x)^{-2F} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1-x}{1-2F} + \frac{1}{2F} \right)$, con $F \in]-\frac{1}{2}, 0[$, es una integral primera del campo X_F .*

Demostración. Recordemos que H_F es una integral primera de X_F si $\langle \nabla H_F(x, y), X_F(x, y) \rangle = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Tenemos

$$\frac{\partial H_F}{\partial x}(x, y) = (1-x)^{-2F-1}(Fy^2 + x)$$

y

$$\frac{\partial H_F}{\partial y}(x, y) = (1-x)^{-2F}y.$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle \nabla H_F(x, y), X_F(x, y) \rangle &= ((1-x)^{-2F-1}(Fy^2 + x))(-y + xy) + (1-x)^{-2F}y(x + Fy^2) \\ &= -y(1-x)^{-2F-1}(Fy^2 + x)(1-x) + y(1-x)^{-2F}(x + Fy^2) \\ &= -y(1-x)^{-2F}(Fy^2 + x) + y(1-x)^{-2F}(x + Fy^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra la Proposición. ■

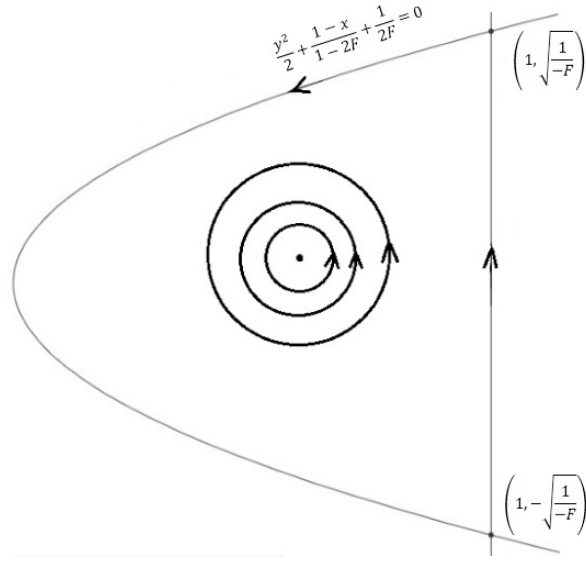
De la Proposición anterior, las curvas $1-x=0$ y $\frac{y^2}{2} + \frac{1-x}{1-2F} + \frac{1}{2F} = 0$ son curvas invariantes del sistema (3.1), que corresponden a las curvas de nivel cero de H_F . Estas curvas se intersectan en las sillas $\left(1, \sqrt{\frac{1}{-F}}\right)$, $\left(1, -\sqrt{\frac{1}{-F}}\right)$. Como el centro $(0, 0)$ pertenece a la región que ellas encierran (a la izquierda del segmento $x=1$), obtenemos un políciclo P_F cuya aplicación de retorno es la aplicación identidad, los vértices de P_F son las sillas hiperbólicas antes mencionadas y sus lados son el segmento de recta $\left\{x=1, -\sqrt{\frac{1}{-F}} < y < \sqrt{\frac{1}{-F}}\right\}$ y la curva $\left\{\frac{y^2}{2} + \frac{1-x}{1-2F} + \frac{1}{2F} = 0, x \leq 1\right\}$. Este políciclo está recorrido en el sentido como se indica en la Figura 3.1. Así, la frontera de la región formada por las órbitas cerradas tiene dos componentes conexas, el centro y el políciclo P_F .

Observación: En [3], los autores afirman que la función H_F es una integral primera.

3.2. Función pasaje de esquina.

En esta sección calcularemos el primer término no nulo del desarrollo asintótico de Dulac de la función pasaje de esquina asociada a una de las sillas hiperbólicas del sistema (3.1).

Consideremos secciones transversales Σ y Π del campo X_F , imágenes respectivas de las funciones:


 Figura 3.1: P_F

$$\begin{aligned} \sigma :]-\delta, \delta[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \sigma(s) = (1-s, 0), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi :]-\epsilon, \epsilon[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \pi(s) = \left(\frac{1}{2F} + s, 0\right), \end{aligned}$$

donde $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ son suficientemente pequeños tales que si $0 < s < \delta$, la semiórbita positiva de (3.1) que pasa por $\sigma(s)$ intersecta a Π , una primera vez, en $\pi(R(s))$, con $0 < R(s) < \epsilon$ (continuidad de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales, ver teorema 1.2.13).

La imagen Σ de σ es un intervalo sobre el eje x , que intersecta transversalmente a P_F en el punto $(1, 0)$, y la imagen Π de π es también un segmento sobre el eje x , que intersecta transversalmente a P_F en $(\frac{1}{2F}, 0)$, punto que corresponde al vértice de la parábola $\frac{y^2}{2} + \frac{1-x}{1-2F} + \frac{1}{2F} = 0$.

Definición 3.2.1. La función $R :]0, \delta[\rightarrow]0, \epsilon[$, $s \mapsto R(s)$, se llama función pasaje de esquina (o función de Dulac) entre las secciones transversales Σ y Π .

Se sabe que la función R pertenece al grupo de Dulac [1], [4]. Más específicamente, en esta sección probaremos que R es una compuesta de difeomorfismos \mathcal{C}^∞ (cambios de coordenadas y funciones de Poincaré) y de una función del tipo $x \mapsto x^\lambda$, donde

$\lambda = -2F$ es la *razón de hiperbolicidad* del vértice $(1, \sqrt{\frac{1}{-F}})$, (ver Definición 1.2.6).

Nuestro objetivo es calcular el primer término no nulo del desarrollo asintótico de R . Para ello, vamos a considerar dos secciones transversales de X_F adicionales, analíticas, en puntos $p_1, q_1 \in P_F$ que están suficientemente cerca de la silla $(1, \sqrt{\frac{1}{-F}})$. Tomaremos p_1 sobre el lado dado por la ecuación $x = 1$, con coordenada $y < \sqrt{-\frac{1}{F}}$, y q_1 sobre la parábola $\frac{y^2}{2} + \frac{1-x}{1-2F} + \frac{1}{2F} = 0$, con coordenada $x < 1$ (ver Figura 3.2). Consideraremos $\epsilon_1 > 0$ y $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeños y secciones transversales Σ_1 y Π_1 parametrizadas, respectivamente, por

$$\sigma_1 :] - \delta_1, \delta_1[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto \sigma_1(u)$$

y

$$\pi_1 :] - \epsilon_1, \epsilon_1[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto \pi_1(v),$$

con $\sigma_1(0) = p_1$ y $\pi_1(0) = q_1$, tales que la semiórbita positiva de (3.1) que pasa por el punto $\sigma_1(u)$, con $0 < u < \delta_1$, intersecta a Π_1 en un punto $\pi_1(d(u))$ y la semiórbita positiva que pasa por un punto $\pi_1(v)$, con $0 < v < \epsilon_1$, intersecta una primera vez a Π en $\pi(f_2(v))$. Las expresiones exactas de $\sigma_1(u)$ y $\pi_1(v)$ los daremos en la demostración del próximo teorema.

Así, se tendrán definidas las funciones $d :]0, \delta_1[\rightarrow]0, \epsilon_1[$, $u \mapsto d(u)$ y $f_2 :]0, \epsilon_1[\rightarrow]0, \epsilon_1[$, $v \mapsto f_2(v)$, llamadas respectivamente *función de Dulac* y *función de Poincaré entre Π_1 y Π* . Análogamente se tiene definida la función $f_1 :]0, \delta_1[\rightarrow]0, \delta_1[$ llamada *función de Poincaré entre Σ y Σ_1* .

Así, la función pasaje de esquina R (ver Figura 3.2), está dada por la composición

$$R = f_2 \circ d \circ f_1.$$

Teorema A. La función pasaje de esquina R posee un desarrollo asintótico de Dulac y verifica la igualdad

$$R(s; F) = \left(\frac{1 - 2F}{-2F} \right)^{1+2F} s^{-2F} (1 + r(s; F)),$$

donde la función r está definida y es analítica en $]0, \delta[\times] - 1/2, 0[$, para algún $\delta > 0$, y $\lim_{s \rightarrow 0^+} r(s; F) = 0$, para cada $F \in] - 1/2, 0[$.

La demostración de este teorema la realizaremos en tres etapas. En primer lugar estudiaremos la función de Dulac d y luego las funciones de Poincaré f_1 y f_2 .

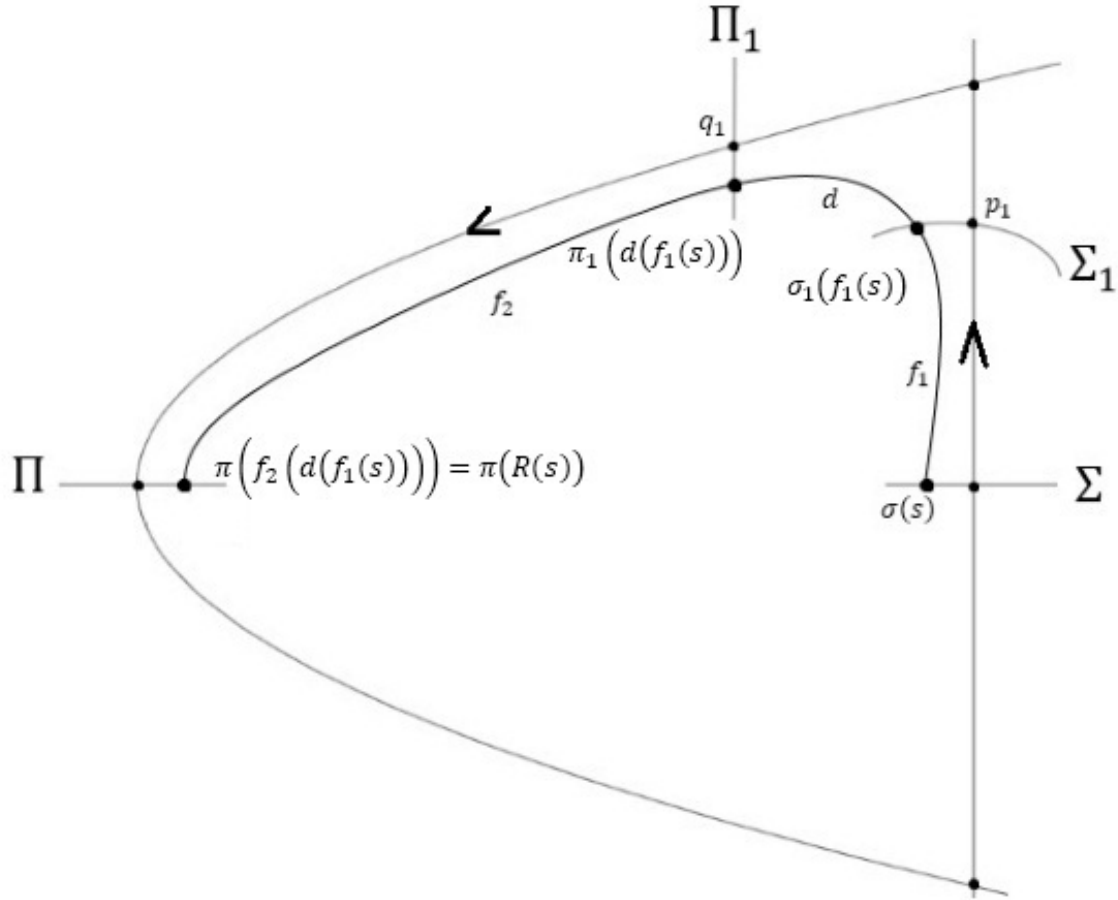


Figura 3.2: Función R .

3.2.1. Estudio de la función de Dulac d

En esta sección probaremos primeramente que en una vecindad de la silla $(1, \sqrt{\frac{1}{-F}})$, la ecuación (3.1) es analíticamente equivalente a su parte lineal.

Proposición 3.2.2. *Sea $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Y(u, v) = (u, 2Fv)$. Existen abiertos Δ_1 y Δ_2 de \mathbb{R}^2 , con $(1, \sqrt{-\frac{1}{F}}) \in \Delta_1$ y $(0, 0) \in \Delta_2$ tales que $X_F|_{\Delta_1}$ es analíticamente equivalente a $Y|_{\Delta_2}$.*

Demostración. Sean $\Delta_1 =]\frac{1}{2F}, +\infty[\times \mathbb{R}^+$ y $\Delta_2 = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u < 1 - \frac{1}{2F}, v < -\frac{u}{1-2F} - \frac{1}{2F} \right\}$.

Consideremos la función

$$\begin{aligned}\phi : \Delta_1 &\rightarrow \Delta_2 \\ (x, y) &\mapsto \phi(x, y) = \left(1 - x, -\frac{y^2}{2} - \frac{(1-x)}{1-2F} - \frac{1}{2F}\right) = (u, v).\end{aligned}$$

La inversa de ϕ es la función definida por

$$\phi^{-1}(u, v) = \left(1 - u, \sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}}\right) = (x, y).$$

Las funciones ϕ y ϕ^{-1} son claramente analíticas en sus respectivos dominios. Notemos que hemos trasladado el origen a la silla hiperbólica $\left(1, \sqrt{\frac{1}{-F}}\right)$, es decir, $\phi\left(1, \sqrt{\frac{1}{-F}}\right) = (0, 0)$. En las coordenadas (u, v) , el sistema Loud se escribe como:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}}u \\ \frac{dv}{dt} = \sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}}2Fv. \end{cases} \quad (3.2)$$

En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}u = 1 - x &\Rightarrow x = 1 - u \\ v = -\frac{y^2}{2} - \frac{(1-x)}{1-2F} - \frac{1}{2F} &\Rightarrow y = \sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{du}{dt} = -\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dv}{dt} = -y\frac{dy}{dt} + \frac{1}{1-2F}\frac{dx}{dt}.$$

Recordemos que del sistema (3.1) tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = -y + xy \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = x + Fy^2.$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -(-y + xy) \\ \frac{dv}{dt} = -y(x + Fy^2) + \frac{-y + xy}{1-2F}. \end{cases}$$

Se tiene que

$$\frac{du}{dt} = y(1 - x) = \sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}}u$$

Además

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}} \left(1 - u + F \left(-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F} \right) + \frac{u}{1-2F} \right) \\ &= \sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}} 2Fv.\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}} u \\ \frac{dv}{dt} = \sqrt{-2v - \frac{2u}{1-2F} - \frac{1}{F}} 2Fv. \end{cases}$$

Como estamos interesados en el estudio de la función d , basta considerar el sistema:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \\ \frac{dv}{dt} = 2Fv, \end{cases} \quad (3.3)$$

que es equivalente al sistema (3.2). ■

Daremos ahora, las definiciones explícitas de las secciones transversales σ_1 y π_1 antes mencionadas.

Notemos primero que para δ_1 y ϵ_1 suficientemente pequeños, los segmentos

$$\bar{\Sigma}_1 = \{(u_0, 1) : -\delta_1 < u_0 < \delta_1\} \quad \text{y} \quad \bar{\Pi}_1 = \{(1, v_0) : -\epsilon_1 < v_0 < \epsilon_1\}$$

están contenidos en Δ_2 .

Estos segmentos están parametrizados, respectivamente, por:

$$\bar{\sigma}_1 :]-\delta_1, \delta_1[\rightarrow \Delta_2; u_0 \mapsto \bar{\sigma}_1(u_0) = (u_0, 1) \quad \text{y} \quad \bar{\pi}_1 :]-\epsilon_1, \epsilon_1[\rightarrow \Delta_2; v_0 \mapsto \bar{\pi}_1(v_0) = (1, v_0).$$

Observemos que $\phi^{-1}(0, 1) = \left(1, \sqrt{-2 - \frac{1}{F}}\right)$ es un punto del policiclo P_F ubicado sobre la recta $x = 1$. La transversal Σ_1 que elegiremos, mencionada al comienzo de esta sección, será la curva $\phi^{-1}(\bar{\Sigma}_1)$, y p_1 el punto $\phi^{-1}(0, 1)$, intersección de Σ_1 con el lado $x = 1$. La curva Σ_1 está parametrizada por la función $\sigma_1 = \phi^{-1} \circ \bar{\sigma}_1$:

$$\begin{aligned}\sigma_1 :]-\delta_1, \delta_1[&\rightarrow \Delta_1 \\ u_0 &\mapsto \sigma_1(u_0) = \left(1 - u_0, \sqrt{-2 - \frac{1}{F} - \frac{2u_0}{1-2F}}\right).\end{aligned}$$

De la misma manera, $\phi^{-1}(1, 0) = \left(0, \sqrt{\frac{1}{-F(1-2F)}}\right)$ es el punto q_1 mencionado al comienzo de esta sección. La curva Π_1 que vamos a considerar es $\phi^{-1}(\bar{\Pi}_1)$. Esta curva está parametrizada por la función $\pi_1 = \phi^{-1} \circ \bar{\pi}_1$:

$$\begin{aligned} \pi_1 :]-\epsilon_1, \epsilon_1[&\rightarrow \Delta_1 \\ v_0 &\mapsto \pi_1(v_0) = \left(0, \sqrt{\frac{1}{-F(1-2F)} - 2v_0}\right). \end{aligned}$$

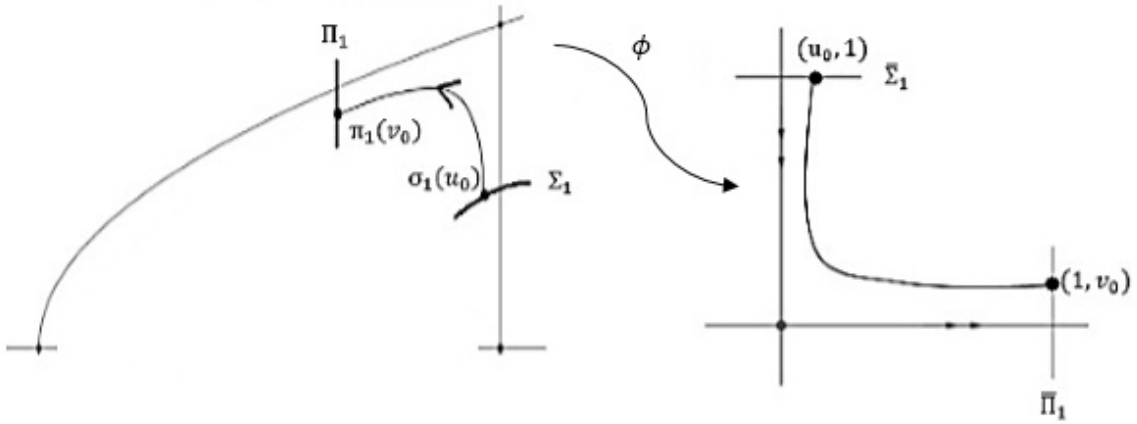


Figura 3.3: Cambio de coordenadas ϕ .

Ya establecidas las secciones transversales Σ_1 y Π_1 , podemos formular la siguiente proposición:

Proposición 3.2.3. *La función de Dulac es la función $d :]0, \delta_1[\times] -\frac{1}{2}; 0[\rightarrow]0, \epsilon_1[$, definida por*

$$(u_0, F) \mapsto d(u_0, F) = u_0^{-2F}.$$

Demostración. La curva integral del sistema (3.3) que pasa por $(u_0, 1)$, con $u_0 > 0$, corta a la transversal Π_1 en un punto $(1, d(u_0))$. Esto define la función de Dulac $u_0 \mapsto d(u_0)$.

Las soluciones de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \\ \frac{dv}{dt} = 2Fv. \end{cases}$$

verifican la igualdad

$$v = u^{2F}C$$

con C constante. Así, la curva integral que pasa por $(u_0, 1)$, con $u_0 > 0$, está dada por

$$v = \left(\frac{u}{u_0} \right)^{2F}, \quad u > 0.$$

Concluimos que

$$d(u_0) = u_0^{-2F}.$$

■

3.2.2. Estudio de la función f_1

Necesitaremos de un resultado, dado en [2], que recordamos a continuación.

Se considera una familia de campos de vectores en \mathbb{R}^2 de la forma

$$X(x, y; \mu) = \frac{1}{y^n} (f(x, y; \mu), yg(x, y; \mu)),$$

con $n \geq 0$ y $\mu \in W$, donde W es un abierto de un espacio de parámetros \mathbb{R}^r y las funciones f y g analíticas en una vecindad de $y = 0$. Se consideran además dos secciones transversales $\xi : I \rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \xi(s)$, y $\eta : I \rightarrow \Pi \subseteq \mathbb{R}^2$ a la curva integral $y = 0$. Sea R la función de Poincaré entre Σ y Π . El lema siguiente, nos otorga una forma de obtener $R(s, \mu)$.

Lemma 3.2.4. *Asumiendo que $f(x, 0; \mu) \neq 0$ para todo $x \in [\xi_1(0), \eta_1(0)]$, la función $R(s; \mu)$ es analítica en $s = 0$ para todo $\mu \in W$. Además,*

$$R(s; \mu) = \Delta(\mu)s + sh(s; \mu),$$

donde $h(s; \mu)$ es una función analítica en $] -\delta, \delta[\times W$ para algún $\delta > 0$, $h(0; \mu) = 0$, y

$$\Delta(\mu) = \frac{\xi_2'(0)}{\eta_2'(0)} \exp \left(\int_{\xi_1(0)}^{\eta_1(0)} \frac{g(x, 0; \mu)}{f(x, 0; \mu)} dx \right).$$

Consideremos el lemma 3.2.4 para el estudio de la función f_1 . Para ello, realizaremos el cambio de coordenadas siguiente:

$$\psi(x, y) = (y, 1 - x) = (w, z), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dw}{dt} = x + Fy^2 \quad y \quad \frac{dz}{dt} = y - xy.$$

Como $1 - x = z$ e $y = w$, se tiene que el sistema (3.1) en las coordenadas (w, z) , se escribe como

$$X_F : \begin{cases} \frac{dw}{dt} = -z + 1 + Fw^2 \\ \frac{dz}{dt} = zw. \end{cases}$$

Consideremos las secciones transversales $\xi = \psi \circ \sigma$ y $\eta = \psi \circ \sigma_1$. Se tiene

$$\begin{aligned} \xi :] - \delta, \delta[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \xi(s) = (0, s) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \eta :] - \delta_1, \delta_1[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u_0 &\mapsto \eta(u_0) = \left(\sqrt{-\frac{2u_0}{1-2F} - \frac{1}{F} - 2}, u_0 \right). \end{aligned}$$

Las funciones $f(w, z; F)$ y $g(w, z; F)$ que aparecen en el Lema están, en nuestro caso, definidas por:

$$f(w, z; F) = -z + 1 + Fw^2 \quad g(w, z; F) = w,$$

respectivamente. Usando el Lema 3.2.4, obtenemos la siguiente proposición, considerando un δ más pequeño, si es necesario:

Proposición 3.2.5. *La función f_1 es un difeomorfismo analítico en $s = 0$, para todo $F \in] - 1/2, 0[$. Además,*

$$f_1(s; F) = (-2F)^{\frac{1}{2F}} s(1 + h_1(s; F)),$$

con h_1 una función analítica en $] - \delta, \delta[\times] - 1/2, 0[$ y $h_1(0; F) = 0$, para todo $F \in] - 1/2, 0[$.

Demostración. Por el Lema 3.2.4, se tiene que el difeomorfismo f_1 es analítico en $s = 0$ y

$$f_1(s; F) = \Delta_1(F)s + sh_1(s; F),$$

con

$$\Delta_1(F) = \frac{\xi_2'(0)}{\eta_2'(0)} \cdot \exp \left(\int_{\xi_1(0)}^{\eta_1(0)} \frac{g(w, 0; F)}{f(w, 0; F)} dw \right),$$

donde

$$\xi(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s)) = (0, s)$$

y

$$\eta(s) = (\eta_1(s), \eta_2(s)) = \left(\sqrt{-\frac{2s}{1-2F} - \frac{1}{F}} - 2, s \right).$$

Como $\frac{\xi_2'(0)}{\eta_2'(0)} = 1$, $\xi_1(0) = 0$ y $\eta_1(0) = \sqrt{-\frac{1}{F} - 2}$, se tiene:

$$\Delta_1(F) = \exp \left(\int_0^{\sqrt{-\frac{1}{F}-2}} \frac{w}{1+FW^2} dw \right) = \exp \left(\frac{1}{2F} (\ln(-2F) - \ln 1) \right) = (-2F)^{\frac{1}{2F}}.$$

Así $f_1(s; F) = (-2F)^{\frac{1}{2F}} s + sh_1(s; F)$, con h_1 una función analítica en $]0, \delta[\times] - \frac{1}{2}, 0[$, y $h_1(0; F) = 0$, para todo $F \in] - \frac{1}{2}, 0[$. ■

3.2.3. Estudio de la función f_2

Recordemos que f_2 es la función de Poincaré entre Π_1 y Π , parametrizadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \pi_1 :] - \epsilon_1, \epsilon_1[&\rightarrow \Delta_1 \\ v_0 &\mapsto \pi_1(v_0) = \left(0, \sqrt{\frac{1}{-F(1-2F)} - 2v_0} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi :] - \epsilon, \epsilon[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \pi(s) = \left(\frac{1}{2F} + s, 0 \right). \end{aligned}$$

Para el estudio de la función f_2 realizaremos un cambio de coordenadas de manera que los puntos de la parábola con segunda coordenada positiva corresponda al eje horizontal.

Sean

$$\Delta_3 = \left\{ (u, v) : u > 0, v < \frac{1+u}{1-2F} - \frac{1}{2F} \right\}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \Delta_3 \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) = \left(-x, -\frac{y^2}{2} - \frac{1-x}{1-2F} - \frac{1}{2F} \right) = (u, v). \end{aligned}$$

La función φ es un difeomorfismo analítico cuya inversa es la función

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \Delta_3 &\rightarrow \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ (u, v) &\mapsto \varphi^{-1}(u, v) = \left(-u, \sqrt{-2v - \frac{2(1+u)}{1-2F} - \frac{1}{F}} \right) = (x, y). \end{aligned}$$

Se tiene que $\varphi\left(0, \sqrt{\frac{1}{-F(1-2F)}}\right) = (0, 0)$. Con esto, hemos trasladado el origen al punto $\left(0, \sqrt{\frac{1}{-F(1-2F)}}\right)$, que corresponde al punto de intersección de la parábola $\frac{y^2}{2} + \frac{1-x}{1-2F} + \frac{1}{2F} = 0$ con el semieje y positivo. Con esto, el eje u corresponde a la curva $\left\{(x, y) : -\frac{y^2}{2} - \frac{1-x}{1-2F} - \frac{1}{2F} = 0, y > 0\right\}$ y el eje v corresponde al eje y (donde el semieje positivo v es el semieje negativo y).

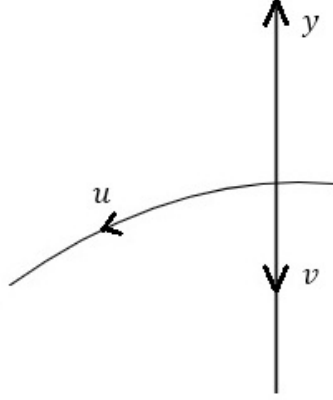


Figura 3.4: Cambio de coordenadas φ .

Observemos que la transversal Π no está contenida en el dominio de φ , debido a que φ no es un difeomorfismo en una vecindad del vértice $\left(\frac{1}{2F}, 0\right)$ de la parábola, por lo que vamos a escoger una transversal cercana a Π .

Sea $(a(\beta), \beta)$ un punto de la parábola $\frac{y^2}{2} + \frac{1-x}{1-2F} + \frac{1}{2F} = 0$, con $\beta > 0$ suficientemente pequeño. Consideremos la transversal Π_β parametrizada por:

$$\begin{aligned} \pi_\beta :]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s_0 &\mapsto \pi_\beta(s_0) = (a(\beta) + s_0, \beta). \end{aligned}$$

Observemos que $a(\beta) = \frac{(1-2F)\beta^2}{2} + \frac{1}{2F}$, y si $\beta \rightarrow 0^+$ entonces $a(\beta) \rightarrow \frac{1}{2F}$. Así, $(a(\beta), \beta)$ converge a $\left(\frac{1}{2F}, 0\right)$, cuando $\beta \rightarrow 0^+$.

En las coordenadas (u, v) , el sistema Loud (3.1) se escribe como

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sqrt{-2v - \frac{2(1+u)}{1-2F} - \frac{1}{F}}(1+u) \\ \frac{dv}{dt} = \sqrt{-2v - \frac{2(1+u)}{1-2F} - \frac{1}{F}}2Fv. \end{cases} \quad (3.4)$$

Consideremos las secciones transversales $\tilde{\Pi}_1$ y $\tilde{\Pi}_\beta$ del sistema (3.4), parametrizadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi_1 :] - \epsilon_1, \epsilon_1[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v_0 &\mapsto \varphi \circ \pi_1(v_0) = (0, v_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi_\beta :] - 1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s_0 &\mapsto \varphi \circ \pi_\beta(s_0) = \left(-a(\beta) - s_0, -\frac{\beta^2}{2} + \frac{a(\beta) + s_0}{1 - 2F} - \frac{1}{2F(1 - 2F)} \right). \quad (\star) \end{aligned}$$

Ahora podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 3.2.6. *Existe $\delta > 0$ tal que el difeomorfismo analítico f_2 verifica*

$$f_2(v_0; F) = \frac{(1 - 2F)^{1+2F}}{(-2F)^{2F}} v_0 (1 + h_2(v_0; F)),$$

con h_2 una función analítica en $]-\delta, \delta[\times]-1/2, 0[$ y $h_2(0; F) = 0$ para todo $F \in]-1/2, 0[$.

Demostración. Del sistema (3.4) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria de variables separables,

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{-2v - \frac{2(1+u)}{1-2F} - \frac{1}{F}(1+u)}}{\sqrt{-2v - \frac{2(1+u)}{1-2F} - \frac{1}{F}2Fv}} = \frac{1+u}{2Fv}.$$

De esta manera tenemos que

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dv}{2Fv}.$$

Así, la solución está dada por $\ln(v) = 2F \ln(1+u) + \ln(C)$, es decir, $v = C(1+u)^{2F}$. Por lo tanto, la órbita que pasa por el punto $(0, v_0)$ tiene por ecuación

$$v = v_0(1+u)^{2F}.$$

De (\star) , la transversal $\tilde{\Pi}_\beta = \varphi(\Pi_\beta)$ es la recta de ecuación $v = -\frac{u}{1-2F} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2F(1-2F)}$, parametrizada por s_0 . Es decir,

$$\begin{cases} u = -a(\beta) - s_0 \\ v = -\frac{\beta^2}{2} - \frac{1 - a(\beta) - s_0}{1 - 2F} - \frac{1}{2F}. \end{cases}$$

El punto intersección de la curva solución $v = v_0(1 + u)^{2F}$ con la recta $\tilde{\Pi}_\beta$ verifica

$$v_0 = (1 + u)^{-2F} \left(-\frac{u}{1 - 2F} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2F(1 - 2F)} \right),$$

con $u = -a(\beta) - s_0$. Es decir,

$$v_0 = (1 - a(\beta) - s_0)^{-2F} \left(\frac{a(\beta) + s_0}{1 - 2F} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2F(1 - 2F)} \right).$$

Haciendo tender $\beta \rightarrow 0^+$, se tiene $a(\beta) \rightarrow \frac{1}{2F}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} v_0 &= \left(1 - \frac{1}{2F} - s_0 \right)^{-2F} \left(\frac{\frac{1}{2F} + s_0}{1 - 2F} - \frac{1}{2F(1 - 2F)} \right) \\ &= \frac{s_0}{1 - 2F} \left(\frac{1 - 2F}{-2F} - s_0 \right)^{-2F} \\ &= \frac{s_0}{1 - 2F} \left(\frac{1 - 2F}{-2F} \right)^{-2F} \left(1 + \frac{2F}{1 - 2F} s_0 \right)^{-2F} \\ &= \frac{(1 - 2F)^{-1-2F}}{(-2F)^{-2F}} s_0 \left(1 + \frac{2F}{1 - 2F} s_0 \right)^{-2F}. \end{aligned}$$

Esta igualdad define, para s_0 suficientemente pequeño, a la inversa de f_2 . Denotemos a esta inversa por g . Es decir,

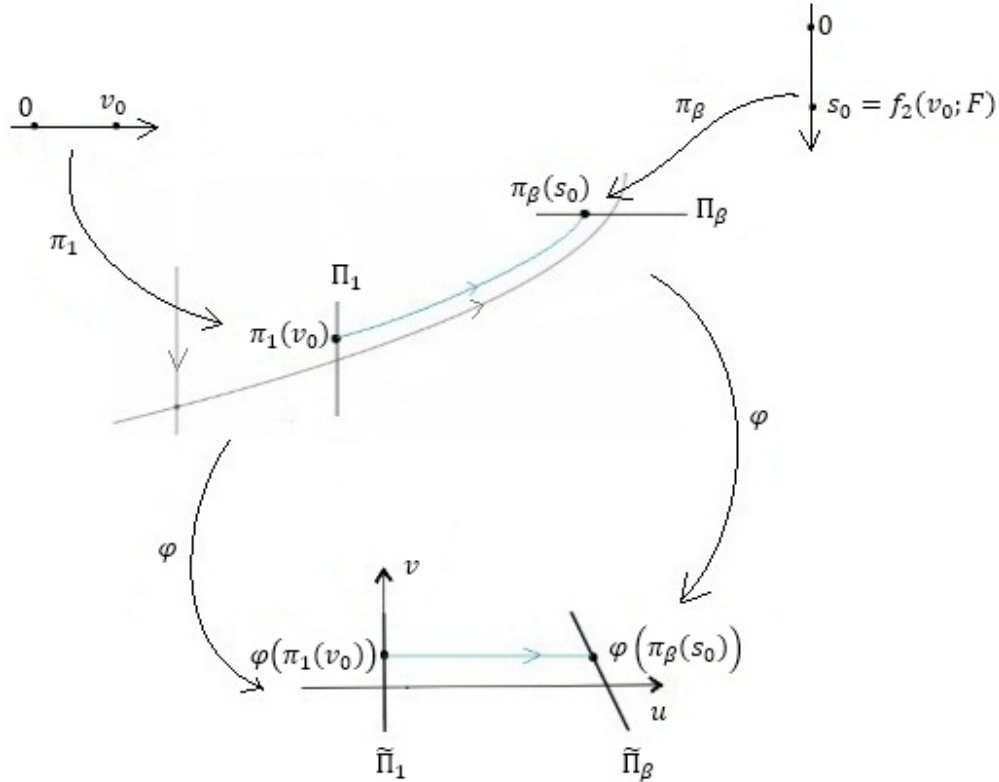
$$g(s_0; F) = \frac{(1 - 2F)^{-1-2F}}{(-2F)^{-2F}} s_0 \left(1 + \frac{2F}{1 - 2F} s_0 \right)^{-2F}.$$

Observemos que $g(0; F) = 0$, y

$$g'(s_0; F) = \frac{(1 - 2F)^{-1-2F}}{(-2F)^{-2F}} \left[\left(1 + \frac{2F}{1 - 2F} s_0 \right)^{-2F} + s_0 (-2F) \left(1 + \frac{2F}{1 - 2F} s_0 \right)^{-2F-1} \frac{2F}{1 - 2F} \right].$$

Tenemos entonces que $g'(0; F) = \frac{(1 - 2F)^{-1-2F}}{(-2F)^{-2F}} \neq 0$. Luego, por el teorema de la función inversa existen una vecindad $V \subset \text{Dom}(g)$ de $s_0 = 0$, y una vecindad U de $v_0 = 0$ tales que la función $g : V \times]-\frac{1}{2}, 0[\rightarrow U$, $s_0 \mapsto g(s_0; F) = v_0$ es un difeomorfismo analítico. La inversa de g , es la función f_2 . Como

$$\frac{dg^{-1}}{dv_0}(0; F) = \frac{1}{g'(0; F)} = \frac{(1 - 2F)^{1+2F}}{(-2F)^{2F}},$$


 Figura 3.5: Función f_2 .

la función f_2 está dada por

$$f_2(v_0; F) = \frac{(1 - 2F)^{1+2F}}{(-2F)^{2F}} v_0 (1 + h_2(v_0; F)).$$

con h_2 analítica en $] -\delta, \delta[\times] -\frac{1}{2}, 0[$ y $h_2(0; F) = 0$ para todo $F \in] -\frac{1}{2}, 0[$. ■

3.2.4. Finalización de la demostración del Teorema A

Recordemos que la función R es la compuesta de las funciones f_2 , d y f_1 estudiadas en las secciones anteriores, es decir, $R = f_2 \circ d \circ f_1$. La función d es del tipo x^λ y las funciones f_1 y f_2 son analíticas en cero, en particular ellas pertenecen al grupo de Dulac. Así, la compuesta R es una función de Dulac. Además, tenemos

$$u_0 = f_1(s; F) = (-2F)^{\frac{1}{2F}} s (1 + h_1(s; F)).$$

Luego,

$$v_0 = d(f_1(s; F)) = (-2F)^{\frac{-2F}{2F}} s^{-2F} (1 + h_1(s; F))^{-2F} = -\frac{1}{2F} s^{-2F} (1 + h_1(s; F))^{-2F}.$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} f_2(d(f_1(s; F))) &= f_2\left(-\frac{1}{2F}s^{-2F}(1+h_1(s; F))^{-2F}\right) \\ &= \frac{(1-2F)^{1+2F}}{(-2F)^{2F}}\left(-\frac{1}{2F}\right)s^{-2F}(1+r_1(s; F)). \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$R(s; F) = f_2(d(f_1(s; F))) = \left(\frac{1-2F}{-2F}\right)^{1+2F} s^{-2F}(1+r_1(s; F)),$$

con $1+r_1(s; F) = (1+h_1(s; F))^{-2F}(1+h_2(f_1(s; F); F))$ con $\lim_{s \rightarrow 0^+} r_1(s; F) = 0$. Así queda demostrado el teorema. ■

Bibliografía

- [1] Dulac, H. (1923). *Sur les cycles limites*. Bull. Soc. Math. France 51, p. 45-188.
- [2] Mardešić, P, Marín, D and Villadelprat, J. (2003). *On the time function of the Dulac map for families of meromorphic vector fields*, Nonlinearity, **16**, p. 855-881.
- [3] Mardešić, P, Marín, D and Villadelprat, J. (2006). *The period function of reversible quadratic centers*, J. Differential Equations **224**, p. 120-171.
- [4] Moussu, R. (1985) *Le problème de la finitude du nombre de cycles limites*, Séminaire Bourbaki, exp. n 655, p.89-101.
- [5] Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems* (Vol. 7). Springer Science, Business Media.
- [6] Saavedra, M. (1995). *Développement asymptotique de la fonction période* (Tesis Doctoral, Université de Bourgogne, Dijon).
- [7] Sotomayor, J. (1979). *Lições de equações diferenciais ordinárias* (Vol. 11). Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.