Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magister en Matemática

Topologías Estrictas en un Espacio de Funciones y una Representación Integral para Operadores Débilmente Compactos

ANGEL DANIEL BARRÍA COMICHEO
CONCEPCIÓN-CHILE
2011

Profesor Guía: José Aguayo Garrido
Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magíster en Matemática

Topologías Estrictas en un Espacio de Funciones y una Representación Integral para Operadores Débilmente Compactos

Comisión de Evaluación de Tesis:

José Aguayo G. (Director de Tesis)
Jacqueline Ojeda F. (Evaluadora interna)
Samuel Navarro H. (Evaluador externo)

ANGEL DANIEL BARRÍA COMICHEO
CONCEPCIÓN - CHILE
2011

Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Topologías Estrictas en un Espacio de Funciones y una Representación Integral para Operadores Débilmente Compactos.

Angel Daniel Barría Comicheo

Universidad de Concepción

Diciembre 2011

A mi familia.

Agradecimientos.

Primeramente le doy las gracias a mi profesor guía, Jose Aguayo Garrido, por sus orientaciones, consejos y observaciones oportunas. Su constante estímulo y confianza me ayudaron a superar las expectativas iniciales de esta tesis.

También quiero agradecer a mis padres y hermanos por su apoyo constante durante todos estos años. Sin ellos no podría estar donde estoy, ni ser la persona que soy.

No puedo dejar de agradecer a mi dulce Marianela, por su apoyo diario e incondicional.

Deseo agradecer también a todas aquellas personas que contribuyeron de una u otra forma en la realización de esta tesis.

Índice general

Introducción.

En el año 1958 R.C Buck ([5]) introdujo la noción de topología estricta en el espacio de todas las funciones a valores reales, continuas y acotadas, con dominio en un espacio localmente compacto. Entre los años 1967 y 1972 diferentes generalizaciones de esta topología, entregadas por D.H. Fremlin, A.C.M. Van Rooij y F.D. Sentilles ([9, 27, 24]), fueron definidas en el espacio $C_b(X)$ de todas las funciones a valores reales, continuas y acotadas, con dominio en un espacio X completamente regular. En la literatura, estas topologías son denotadas por β_0, β y β_1. Sentilles logró una identificación de los duales $(C_b(X), \beta_0)'$, $(C_b(X), \beta)'$ y $(C_b(X), \beta_1)'$ con los espacios de medida estudiados por V.S. Varadarajan ([28]) $M_t(X)$, $M_\tau(X)$ y $M_\sigma(X)$ respectivamente, mediante una representación integral de las funcionales en el sentido Riesz. En 1976 A. Katsaras ([14]) generaliza estas topologías al espacio $C_{rc}(X, E)$ de todas las funciones a valores en un espacio localmente convexo Hausdorff E, continuas, de rango relativamente compacto y con dominio en un espacio completamente regular X. La generalización de la topología β_0 en este espacio fue denotada por $\beta_{\mathscr{F}}$. Katsaras mostró que los conjuntos acotados respecto a la topología $\beta_{\mathscr{F}}$ coinciden con los conjuntos uniformemente acotados y también entregó una representación integral de las funcionales pertenecientes a $(C_{rc}(X, E), \beta_{\mathscr{F}})'$ respecto a un espacio de medidas vectoriales. Luego en 1986, esta topología fue generalizada por J. Zafarani ([31]) al espacio $C_b(X, E)$ de las funciones acotadas y continuas con dominio en un espacio completamente regular X y a valores en un espacio localmente convexo Hausdorff E. Esta nueva topología fue denotada por $\beta_{\mathcal{P}}$. El objetivo de esta tesis es desarrollar y complementar el estudio del espacio $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ presentado en [31] y estudiar la representación de su dual como un espacio de medidas en base a [14] y [8]. También se planea contribuir en esta teoría mostrando una representación integral de los operadores débilmente compactos sobre el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$.

Este documento se estructura de la siguiente forma: en el Capítulo 1 se presentan las definiciones y notaciones de los espacios de funciones y de las topologías que se estudiarán. También se presentan los conceptos básicos sobre conjuntos y medidas de Baire.

En el Capítulo 2 se muestran condiciones necesarias y suficientes para que las diversas topologías definidas en $C_b(X,E)$ coincidan. Se muestra que un subconjunto de $C_b(X,E)$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-acotado si y solo si es τ_u-acotado. Se logra identificar a los espacios E y $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ como subespacios $\beta_{\mathcal{P}}$-cerrados de $C_b(X,E)$ y se prueba la $\beta_{\mathcal{P}}$-densidad de $C_b(X)\otimes E$. Se muestran condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ sea barrelado, cuasibarrelado, DF-espacio, gDF-espacio, bornológico entre otros. Se estudian las condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ sea separable, completo, cuasicompleto y secuencialmente completo. También se logra una caracterización de los conjuntos relativamente $\beta_{\mathcal{P}}$-compactos. Se finaliza el capítulo mostrando diferentes caracterizaciones de la topología β_p a través de diversas bases de vecindades de cero.

En el Capítulo 3 se introducen los conceptos de funcional $\mathcal{P}_p$-tight, medida $\mathcal{P}_p$-tight y operador $\mathcal{P}_p^q$-tight. Se identifica la $\beta_{\mathcal{P}}$-continuidad de operadores y funcionales lineales sobre $C_b(X,E)$ con las condiciones $\mathcal{P}_p^q$-tight y $\mathcal{P}_p$-tight respectivamente. Luego, se muestra una definición equivalente de la integral para funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$, respecto a medidas de Baire, utilizando redes convergentes en el sentido de sumas de Riemman. Este concepto de integración se generaliza para funciones del espacio $C_b(X,E)$, respecto a las medidas vectoriales $\mathcal{P}_p$-tight. Se muestra una representación integral de las funcionales lineales $\beta_{\mathcal{P}}$-continuas respecto a las medidas $\mathcal{P}_p$-tight y se caracterizan los conjuntos $\beta_{\mathcal{P}}$-equicontinuos. También se muestra que si F es un espacio Frechet, entonces, un operador del tipo $T : C_b(X) \to F$ es débilmente $(\tau_{\|\cdot\|},\tau_{_F})$-compacto y $(\gamma_{\mathcal{P}},\tau_{_F})$-continuo si y solo si es débilmente $(\gamma_{\mathcal{P}},\tau_{_F})$-compacto.

En la parte final del capítulo, se define un espacio de medidas vectoriales del tipo $m : \mathcal{B} \to \mathscr{L}(E, F)$ y se extiende el concepto de integral para funciones en $C_b(X, E)$ respecto a estas medidas. Finalmente se entrega una representación integral en el sentido Riesz para operadores débilmente $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compactos $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuos definidos en $C_b(X, E)$ con valores en un espacio Hausdorff localmente convexo F, respecto a ciertas medidas vectoriales y se prueba que esta representación es única.

Resultados obtenidos.

En el Capítulo 2 se define Γ como la familia de todos los cubrimientos dirigidos de X formados por conjuntos compactos y se define la relación $\preceq$ como sigue: para $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \Gamma$, $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$ si y solo si $\mathcal{P}'$ es un refinamiento de $\mathcal{P}$. Obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.6.12

(a) *Si X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio y E es secuencialmente completo, entonces, para cada $\mathcal{P}_1 \in \Gamma$, tal que $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}$, el espacio $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}_1})$ es secuencialmente completo.*

(b) *Si $\mathcal{P}$ posee una subfamilia cofinal numerable y $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ es secuencialmente completo, entonces, el espacio X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio y E es secuencialmente completo.*

En [31] J. Zafarani probó el siguiente resultado:

Proposición 2.6.11 *Si $(C_b(X, E), \delta)$ es secuencialmente completo, entonces, para cada $\mathcal{P} \in \Gamma$, el espacio $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ es secuencialmente completo.*

Con ayuda del resultado 2.6.12, obtenemos la siguiente observación:

Observación 2.6.13 *En general, el hecho que exista $\mathcal{P} \in \Gamma$, tal que $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ sea secuencialmente completo, no implica que $(C_b(X, E), \delta)$ sea secuencialmente completo.*

En el Capítulo 3 daremos una generalización del Teorema 3.2 presentado en [8, página 846] por Robert Fontenot, el cuál solo se refiere a la caracterización de funcionales sobre $(C_b(X, E), \beta_0)$ cuando E es normado. El resultado obtenido es el siguiente:

Teorema 3.1.3 *Sea $T : C_b(X,E) \to F$ un operador lineal. Considere las siguientes proposiciones:*

1. *T es $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo.*

2. *Para todo $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$, tal que, T es (β_p, q)-continuo.*

3. *Para todo $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$, tal que, T es $\mathcal{P}_p^q$-tight.*

4. *Dados $\varepsilon > 0$ y $q \in s(F)$ existen $K \in \mathcal{P}$ y $p \in s(E)$, tales que, $q(T(f)) < \varepsilon$ para cada $f \in C_b(X,E)$ que cumple con $\|f\|_p \leqslant 1$ y $f|_K = 0$.*

5. *Toda red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$, tal que, es $\tau_{\mathcal{P}}$-convergente a 0, satisface con la siguiente condición: para cada $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$, tal que, $(T(f_\alpha g))_{\alpha\in\Lambda}$ es q-convergente a 0 de forma uniforme para $g \in \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant 1\}$.*

6. *Suponiendo que $\mathbb{K} = F = \mathbb{R}$, la aplicación $M : C_b(X) \to \mathbb{R}$ definida por $M(f) = \sup\{|T(g)| : g \in C_b(X,E) \text{ tal que } \forall p \in s(E), \forall x \in X, p(g(x)) \leqslant f(x)\}$ para $f \geqslant 0$ y definida por $M(f) := M(f^+) - M(f^-)$ para $f \in C_b(X)$, es una funcional lineal $\mathcal{P}_p$-tight.*

Se satisfacen las siguientes afirmaciones:

(a) *Las proposiciones $1, 2$ y 3 son equivalentes.*

(b) *La proposición 3 implica la proposición 4.*

(c) *Al suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y que T es (τ_u, τ_F)-continuo, se tiene que: $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$.*

(d) *Al suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y que E es normado con norma p, se tiene que: $6 \Rightarrow 1$.*

Es importante notar que si $\mathcal{P}$ es la colección de todos los subconjuntos compactos de X, $\mathbb{K} = \mathbb{R} = F$, T es una funcional uniformemente continua y E es un espacio normado, entonces, el teorema anterior se reduce al resultado mostrado por Fontenot.

En la Sección 3.5 se considera un espacio Frechet F cuya topología se denota por τ_F y se presenta la siguiente definición.

Definición 3.5.1 *Sea τ una topología vectorial en $C_b(X)$. Un operador $T : C_b(X) \to F$ es débilmente (τ, τ_F)-compacto si existe una τ-vecindad V de cero, tal que, $T(V)$ es relativamente $\sigma(F, F')$-compacto. Diremos simplemente que T es débilmente compacto si es $(\tau_{\|\cdot\|}, \tau_F)$-débilmente compacto.*

Proposición 3.5.2 *Para un operador lineal $T : C_b(X) \to F$ son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) T es débilmente compacto y $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continua.

(b) T es débilmente $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto.

Adicionalmente obtenemos

Proposición 3.5.3 *Para un operador lineal $T : C_b(X) \to E$ son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) T es compacto y $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continua.

(b) T es $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto.

En la sección 3.6 se presenta la siguiente definición de operador débilmente compacto, la cual es una generalización de la definición 3.5.1.

Definición 3.6.7 *Sean A y B espacios vectoriales topológicos y sea $Bd(A)$ la familia de todos los subconjuntos τ_A-acotados de A. Diremos que un operador lineal $T : A \to B$ es **débilmente $(\boldsymbol{\tau_A}, \boldsymbol{\tau_B})$-compacto**, si $T(S)$ es relativamente $\sigma(B, B')$-compacto, para cada $S \in Bd(A)$.*

En dicha Sección denotamos por $\mathscr{L}_{\beta_{\mathcal{P}},w}(C_b(X, E), F)$ al espacio de todos los operadores débilmente $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compactos y $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuos y se presenta el espacio de medidas vectoriales $\mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F))$. El resultado principal de la tesis es el siguiente:

Teorema 3.6.12 *La aplicación* $\Phi : \mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F)) \to \mathscr{L}_{\beta_{\mathcal{P}},w}(C_b(X,E), F)$*, definida por* $\Phi(m)(f) = \int_X f\, dm$*, es biyectiva y es tal que:* $\forall x' \in F', x'm = \Phi(m)'x'$*. Además, si* $p \in s(E)$ *y* $q \in s(F)$ *son tales que* $m_p^q(X) < \infty$*, entonces* $m_p^q(X) = \|\Phi(m)\|_p^q$*.*

Capítulo 1

Notaciones y definiciones.

1.1. Espacios de funciones.

En toda la tesis, se asumirá el conocimiento de las herramientas básicas de la topología general, de las topologías vectoriales y más específicamente, de los espacios localmente convexos. A través de este documento, X denotará un espacio Hausdorff completamente regular, βX su compactificación de Stone-$\check{C}$ech, $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales o el de los números complejos y E un espacio no trivial, localmente convexo Hausdorff sobre $\mathbb{K}$, cuya topología se denotará por $\tau_{_E}$. La aplicación identidad en E se denotará por Id_E y el dual topológico de E será denotado por E'. La topología Mackey en E respecto a la dualidad $\langle E, E' \rangle$ se denotará por $\tau(E, E')$. Adicionalmente, el espacio $(E', \beta(E', E))$ se denotará por E'_b. Si $(H, \tau_{_H})$ y $(F, \tau_{_F})$ son espacios localmente convexos Hausdorff, entonces, el espacio de todos los operadores $T : H \to F$ lineales y $(\tau_{_H}, \tau_{_F})$-continuos se denotará por $\mathscr{L}_{\tau_H}^{\tau_F}(H, F)$ y para mencionar que $V \subset H$ es una vecindad de 0 respecto a la topología τ_H, diremos que V es una τ_H-vecindad de 0.

Dadas dos topologías τ_1 y τ_2 definidas en un mismo conjunto, para decir que τ_1 es menos fina que τ_2 simplemente escribiremos $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Si K es un subconjunto de X entonces denotaremos por $\mathscr{X}_K$ a la función característica de K. Para una familia $\mathscr{R}$ de seminormas en un espacio vectorial V, se denotará por $\sigma(V, \mathscr{R})$ a la topología menos fina entre todas las topologías vectoriales que hacen continua a cada seminorma de $\mathscr{R}$.

Dicho de otro modo, $\sigma\left(V,\mathscr{R}\right)$ es aquella topología, para la cuál, cada $x\in V$ posee una base de vecindades constituida por todos los conjuntos de la forma:

$$x+\{z\in V:p_i(z)\leqslant\varepsilon,\ \ i=1...n\}$$

donde $\{p_1,...,p_n\}\in\mathscr{R}$ y $\varepsilon>0$.

Definición 1.1.1. *Sea $\mathscr{R}$ una familia de seminormas en un espacio vectorial V. Diremos que $\mathscr{R}$ es **dirigida** (o **filtrante**) si para cada par de seminormas p_1 y p_2 en $\mathscr{R}$ existe una seminorma p en $\mathscr{R}$ tal que $p_1,p_2\leqslant p$.*

La siguiente proposición entrega una útil caracterización de las topologías que definiremos en este documento; sin embargo, omitiremos su demostración, pues para ella basta aplicar la definición anterior.

Proposición 1.1.2. *Si $\mathscr{R}$ es una familia de seminormas dirigida en el espacio vectorial V, entonces, la colección de todos los conjuntos de la forma*

$$\{z\in V:p(z)\leqslant\varepsilon\}$$

donde $p\in\mathscr{R}$ y ε>0, es una base de vecindades de cero para la topología $\sigma\left(V,\mathscr{R}\right)$.

Definición 1.1.3. *Se dirá que una familia $\mathscr{R}$ de seminormas en E es **generadora** si $\sigma(E,\mathscr{R})=\tau_{_E}$.*

Un ejemplo clásico de una familia generadora en E es la familia de todas las seminormas continuas en E.

De ahora en adelante $s(E)$ será una familia de seminormas continuas en E, generadora, dirigida, que no contiene a la aplicación nula. El espacio de funciones acotadas con dominio X y valores en E se denotará por $B(X,E)$. Dicho de otra forma

$$B(X,E):=\left\{f\in E^X:\forall p\in s(E),\ \sup_{x\in X}\{p(f(x))\}<\infty\right\}.$$

El espacio de funciones acotadas y continuas con dominio X y valores en E se denotará por $C_b(X,E)$. Dicho de otro modo

$$C_b(X,E):=\{f\in B(X,E):f\text{ es continua }\}.$$

Cuando E sea un espacio normado denotaremos por $s(E)$ al conjunto cuyo único elemento es la norma en E. En caso que $E = \mathbb{K}$, escribiremos $B(X)$ para denotar $B(X,\mathbb{K})$ y $C_b(X)$ para denotar $C_b(X,\mathbb{K})$, entendiendo por $s(\mathbb{K}) = \{|\cdot|\}$ el conjunto cuyo único elemento es el valor absoluto o el módulo complejo según corresponda.

Definición 1.1.4. *Para cada función $f \in C_b(X)$, se define el **soporte de f** como el conjunto* $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Dados $e \in E$ y $f \in C_b(X)$ denotaremos por $f \otimes e$ a la función definida por $f \otimes e : X \longrightarrow E$, $f \otimes e(x) = f(x)e$. Notemos que $f \otimes e \in C_b(X,E)$ pues es la composición de funciones continuas y acotadas.

1.2. Topologías en los espacios $B(X,E)$ y $C_b(X,E)$.

Definición 1.2.1. *Sea p una seminorma de $s(E)$. En $B(X,E)$ se define la seminorma $\|\cdot\|_p$ como sigue:*

$$\|f\|_p := \sup_{x\in X}\{p(f(x))\}$$

para cada f en $B(X,E)$. Cuando $E = \mathbb{K}$, en $B(X)$ se define la norma de convergencia uniforme $\|\cdot\|$ como sigue:

$$\|f\| := \sup_{x\in X}\{|f(x)|\}$$

para cada f en $B(X)$.

Definición 1.2.2. *Sea p una seminorma de $s(E)$. En $B(X,E)$ se definen:*

- *la **topología p-uniforme** como $u_p := \sigma(B(X,E),\{\|\cdot\|_p\})$ y*
- *la **topología uniforme** como $\tau_u := \sigma(B(X,E),\{\|\cdot\|_q : q \in s(E)\})$.*

Para denotar la topología uniforme cuando $E = \mathbb{K}$, emplearemos el símbolo $\tau_{\|\cdot\|}$.

La colección de todos los subconjuntos compactos de X se denotará por $K(X)$ y la colección de todos los subconjuntos finitos de X se denotará por $A(X)$. Denotaremos por $\mathcal{P}$ a un subconjuto de $K(X)$ que cumpla las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{P}$ es un cubrimiento de X, es decir, $X = \bigcup_{K \in \mathcal{P}} K$.

(b) $\mathcal{P}$ es una colección dirigida, esto es, para cada par de elementos K_1 y K_2 de $\mathcal{P}$ existe un elemento K_3 en $\mathcal{P}$, tal que, $K_1 \cup K_2 \subset K_3$.

Definición 1.2.3. *Sean p una seminorma de $s(E)$ y K un elemento de $\mathcal{P}$. En $B(X, E)$ se define la seminorma $\|\cdot\|_{p,K}$ como sigue:*

$$\|f\|_{p,K} := \sup_{x \in K} \{p(f(x))\}$$

para cada f en $B(X, E)$.

Definición 1.2.4. *Sea p una seminorma de $s(E)$. En $B(X, E)$ se definen:*

- *la* ***topología de convergencia p-uniforme en los elementos de $\mathcal{P}$*** *como*

  $\tau_p := \tau_p(\mathcal{P}) := \sigma(B(X, E), \{\|\cdot\|_{p,K} : K \in \mathcal{P}\})$ *y*

- *la* ***topología de convergencia uniforme en los elementos de $\mathcal{P}$*** *como*

  $\tau_{\mathcal{P}} := \sigma(B(X, E), \{\|\cdot\|_{q,K} : q \in s(E), K \in \mathcal{P}\})$.

Definición 1.2.5. *Una función $v : X \longrightarrow [0, +\infty)$* ***se $\mathcal{P}$-desvanece al infinito*** *si esta es de rango acotado y si para cada $\varepsilon > 0$, existe K en $\mathcal{P}$ tal que*

$$\|v\|_{X \setminus K} := \sup \{v(x) : x \in X \setminus K\} < \varepsilon.$$

La familia de todas las funciones $v : X \longrightarrow [0, +\infty)$ que se $\mathcal{P}$-desvanecen al infinito la denotaremos por $V_{\mathcal{P}}$. Ya que $\mathcal{P}$ es un conjunto dirigido se deduce la siguiente observación:

Observación 1.2.6. *Dados v_1 y v_2 en $V_{\mathcal{P}}$ se tiene que $\max\{v_1, v_2\}$ pertenece a $V_{\mathcal{P}}$.*

El hecho de que $\mathcal{P}$ sea dirigido brinda el siguiente lema que resultará fundamental para el estudio de topologías que se estudiarán más adelante.

Lema 1.2.7. *Sean (K_n) una sucesión de elementos de $\mathcal{P}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales no negativos convergente. Si (A_n) es una sucesión de subconjuntos de X, tal que $A_n \subset K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la función $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathscr{X}_{A_n} \in V_{\mathcal{P}}$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n < \varepsilon$. Ya que $\mathcal{P}$ es dirigido, podemos escoger $K \in \mathcal{P}$ de modo que $K_n \subset K$ para $n = 1, ..., m$. Así $\|v\|_{X \setminus K} \leqslant \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathscr{X}_{K_n} \|_{X \setminus K} \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n < \varepsilon$. $\square$

Definición 1.2.8. *Sean p una seminorma de $s(E)$ y v un elemento de $V_{\mathcal{P}}$. En $B(X, E)$ se define la seminorma $\| \cdot \|_{p,v}$ como sigue:*

$$\|f\|_{p,v} := \sup_{x \in X} \{v(x)p(f(x))\}$$

para cada f en $B(X, E)$.

Definición 1.2.9. *Sea p una seminorma de $s(E)$. En $B(X, E)$ se definen las topologías:*

- $\beta_p := \beta_p(\mathcal{P}) := \sigma(B(X, E), \{\| \cdot \|_{p,v} : v \in V_{\mathcal{P}}\})$ *y*
- $\beta_{\mathcal{P}} := \sigma(B(X, E), \{\| \cdot \|_{q,v} : q \in s(E), v \in V_{\mathcal{P}}\})$.

Consideremos una familia $\mathscr{R}$ de seminormas en un espacio vectorial V y $L \subset V$ un subespacio vectorial. Si p está en $\mathscr{R}$ entonces $p|_L$ denotará la restricción de p al subespacio L. Ponemos $\mathscr{R}|_L := \{p|_L : p \in \mathscr{R}\}$. Puede mostrarse que en L la topología de subespacio inducida por $\sigma(V, \mathscr{R})$ coincide con $\sigma(L, \mathscr{R}|_L)$. De este modo, en $C_b(X, E)$ la topología de subespacio inducida por:

- u_p coincide con $\sigma\left(C_b(X, E), \{\| \cdot \|_p\} |_{C_b(X,E)}\right)$ la que denotaremos igualmente por u_p.
- τ_u coincide con $\sigma\left(C_b(X, E), \{\| \cdot \|_q : q \in s(E)\} |_{C_b(X,E)}\right)$ la que denotaremos igualmente por τ_u.
- τ_p coincide con $\sigma\left(C_b(X, E), \{\| \cdot \|_{p,K} : K \in \mathcal{P}\} |_{C_b(X,E)}\right)$ la que denotaremos igualmente por τ_p.
- $\tau_{\mathcal{P}}$ coincide con $\sigma\left(C_b(X, E), \{\| \cdot \|_{q,K} : q \in s(E), K \in \mathcal{P}\} |_{C_b(X,E)}\right)$ la que denotaremos igualmente por $\tau_{\mathcal{P}}$.

- β_p coincide con $\sigma\left(C_b(X, E), \{\|\cdot\|_{p,v} : v \in V_{\mathcal{P}}\} |_{C_b(X,E)}\right)$ la que denotaremos igualmente por β_p.

- $\beta_{\mathcal{P}}$ coincide con $\sigma\left(C_b(X, E), \{\|\cdot\|_{q,v} : q \in s(E), v \in V_{\mathcal{P}}\} |_{C_b(X,E)}\right)$ la que denotaremos igualmente por $\beta_{\mathcal{P}}$.

Sea $p \in s(E)$. Puesto que $s(E)$ es una familia de seminormas dirigida y que $\mathcal{P}$ es un conjunto dirigido, se puede mostrar que las familias de seminormas $\{\|\cdot\|_q : q \in s(E)\}$, $\{\|\cdot\|_{p,K} : K \in \mathcal{P}\}$, $\{\|\cdot\|_{q,K} : q \in s(E), K \in \mathcal{P}\}$, $\{\|\cdot\|_{p,v} : v \in V_{\mathcal{P}}\}$ y $\{\|\cdot\|_{q,v} : q \in s(E), v \in V_{\mathcal{P}}\}$ son dirigidas. Para mostrar esto en las dos últimas se utiliza la observación 1.2.6. De este modo podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 1.2.10. *Cada una de las topologías localmente convexas $\tau_E, u_p, \tau_u, \tau_p, \tau_{\mathcal{P}}, \beta_p$ y $\beta_{\mathcal{P}}$ tiene una base de vecindades de 0 del tipo dado en la proposición 1.1.2.*

Observación 1.2.11.

- *En $C_b(X, E)$ las topologías del tipo $\beta_{\mathcal{P}}$ son llamadas topologías estrictas.*

- *Con el fin de simplificar las notaciones, aceptaremos la siguiente convención: si $\|\cdot\|_\psi$ es una seminorma en $B(X, E)$, entonces, para referirnos a la restricción de esta al espacio $C_b(X, E)$, simplemente escribiremos $\|\cdot\|_\psi$.*

- *Cuando $E = \mathbb{K}$, escribiremos $\gamma_{\mathcal{P}}$ en lugar de $\beta_{\mathcal{P}}$.*

- *Cuando $\mathcal{P} = A(X)$, escribiremos δ en lugar de $\beta_{A(X)}$.*

- *Cuando $\mathcal{P} = K(X)$, escribiremos $\beta_\circ$ en lugar de $\beta_{K(X)}$ y $\gamma_\circ$ en lugar de $\gamma_{K(X)}$ (en el caso $E = \mathbb{K}$).*

- *Las topologías de convergencia puntual en $B(X, E)$ y $C_b(X, E)$ se denotaran ambas por pw.*

1.3. Medidas de Baire.

En toda la tesis, se asumirá el conocimiento de los conceptos básicos de la teoría de la medida; por ejemplo, la definición de un álgebra de conjuntos, la de una función conjunto monótona y la de una función conjunto finitamente aditiva.

1.3.1. Conceptos básicos.

A continuación, presentaremos algunas definiciones y resultados preliminares que aparecen en [7], y que son necesarios para desarrollar los conceptos de medidas de Baire y conjuntos de Baire. Durante esta sección, algunas demostraciones serán omitidas debido a que ya estan explicadas en [7].

Sean $\mathcal{X}$ un conjunto, Σ un álgebra de conjuntos de $\mathcal{X}$ y μ una función conjunto con dominio en Σ y valores en el conjunto de los números reales extendido $\mathbb{R}_e$.

Definición 1.3.1.1. *La **variación total de $\boldsymbol{\mu}$** es la función $|\mu| : \Sigma \to \mathbb{R}_e$, definida por*

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| : \{A_i\}_{i=1}^{n} \textit{ es una } \Sigma\textit{-partición de } A \right\} .$$

Observación 1.3.1.2. *Si $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una función conjunto, entonces la composición de μ con el valor absoluto se denotará por $|\mu(\cdot)|$ y no sebe ser confundida con la notación $|\mu|$ de la variación total de μ.*

Definición 1.3.1.3. *Diremos que $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_e$ es **acotada** si* $\sup\{|\mu(A)| : A \in \Sigma\} < \infty$.

Lema 1.3.1.4. *Si $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es finitamente aditiva y acotada, entonces,*

$$|\mu|(\mathcal{X}) \leqslant 4 \sup \{|\mu(A)| : A \in \Sigma\} .$$

Lema 1.3.1.5. *Si μ es finitamente aditiva, entonces, $|\mu|$ también lo es.*

Lema 1.3.1.6. *Si μ es no-negativa y finitamente aditiva, entonces, $\mu = |\mu|$.*

Lema 1.3.1.7. *Si $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una función conjunto no-negativa y finitamente aditiva, entonces, ésta es monótona y acotada. De hecho, se tiene que:*

$$\mu(\mathfrak{X}) = \sup\{\mu(A) : A \in \Sigma\}\,.$$

Demostración. Sean $A, B \in \Sigma$ tales que $A \subset B$. Ya que μ es finitamente aditiva y no-negativa, tenemos: $\mu(B) = \mu(A \cup (B \backslash A)) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geqslant \mu(A)$. Es decir, μ es monótona. Luego, para cada $A \in \Sigma$, se tiene que $\mu(A) \leqslant \mu(\mathfrak{X})$, por lo que $\mu(\mathfrak{X}) = \sup\{\mu(A) : A \in \Sigma\}$. □

Definición 1.3.1.8. *Sea $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ una función conjunto acotada y finitamente aditiva. La **variación positiva de $\boldsymbol{\mu}$** y la **variación negativa de $\boldsymbol{\mu}$**, son las funciones que se denotan y definen, respectivamente, por:*

$$\mu^+ : \Sigma \to \mathbb{R}, \quad \mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \qquad \mu^- : \Sigma \to \mathbb{R}, \quad \mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Notar que μ^+ y μ^- son funciones acotadas, no-negativas y finitamente aditivas.

Teorema 1.3.1.9. *(Teorema de descomposición de Jordan.) Si $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es acotada y finitamente aditiva, entonces, para cada $A \in \Sigma$, se tiene que:*

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(F) : F \in \Sigma, F \subset A\} \quad y$$
$$\mu^-(A) = -\inf\{\mu(F) : F \in \Sigma, F \subset A\}\,.$$

Además, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ se satisfacen.

Corolario 1.3.1.10. *Sean μ, μ_1, μ_2 funciones conjunto con dominio en el álgebra Σ y con valores en $\mathbb{R}$. Si μ, μ_1, μ_2 son acotadas y finitamente aditivas, tales que, $\mu_1, \mu_2 \geqslant 0$ y $\mu = \mu_1 - \mu_2$, entonces, $\mu^+ \leqslant \mu_1$ y $\mu^- \leqslant \mu_2$.*

Demostración. Notemos que $-\mu_2 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$. Por lema 1.3.1.7, μ_1 y μ_2 son medidas monótonas. Luego, para $A \in \Sigma$ arbitrario, se tiene que:

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(F) : F \in \Sigma, F \subset A\} \leqslant \sup\{\mu_1(F) : F \in \Sigma, F \subset A\} = \mu_1(A)$$
$$\mu^-(A) = \sup\{-\mu(F) : F \in \Sigma, F \subset A\} \leqslant \sup\{\mu_2(F) : F \in \Sigma, F \subset A\} = \mu_2(A)$$

□

1.3.2. Conjuntos de Baire.

Definición 1.3.2.1. *Denotaremos por $\mathcal{Z}$ a la colección de subconjuntos de X definida como sigue:*

$$\mathcal{Z} := \left\{ f^{-1}\left(\{0\}\right) : f \in C_b(X) \right\} .$$

Lema 1.3.2.2. *Tanto la unión finita de elementos de $\mathcal{Z}$, como la intersección numerable de elementos de $\mathcal{Z}$, son elementos de $\mathcal{Z}$.*

Demostración. Sean $Z_1, \ldots, Z_n$ elementos de $\mathcal{Z}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomemos $f_i \in C_b(X)$ tal que $Z_i = f_i^{-1}(\{0\})$. Basta notar que $Z_1 \cup \ldots \cup Z_n = (f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)^{-1}(\{0\})$.

Ahora consideremos una sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{Z}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $f_n \in C_b(X)$ tal que $Z_n = f_n^{-1}(\{0\})$. Si consideramos la función $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|/2^n$, entonces, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n = g^{-1}(\{0\})$. $\square$

Definición 1.3.2.3. *Se denota por $\mathcal{U}$, a la colección de subconjuntos de X, definida como sigue:*

$$\mathcal{U} := \{U \subset X : X \backslash U \in \mathcal{Z}\} .$$

Directamente de la definición de $\mathcal{U}$ y del lema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.3.2.4. *Tanto la intersección finita de elementos de $\mathcal{U}$, como la unión numerable de elementos de $\mathcal{U}$, son elementos de $\mathcal{U}$.*

Lema 1.3.2.5. *Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f \in C_b(X)$. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\{x \in X : f(x) \leqslant a\} \in \mathcal{Z}$.

(b) $\{x \in X : f(x) \geqslant a\} \in \mathcal{Z}$.

(c) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{U}$.

(d) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{U}$.

Demostración. (a) Sea $a \in \mathbb{R}$. Consideremos $g = \text{máx}\{f, a\} - a$. Se tiene que $g \in C_b(X)$ y que $g^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : \text{máx}\{f, a\} = a\} = \{x \in X : f(x) \leqslant a\} \in \mathcal{Z}$.

(b) Sea $a \in \mathbb{R}$. Consideremos $g = \text{mín}\{f, a\} - a$. Se tiene que $g \in C_b(X)$ y que $g^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : \text{mín}\{f, a\} = a\} = \{x \in X : f(x) \geqslant a\} \in \mathcal{Z}$.

(c) Es consecuencia directa de (b).

(d) Es consecuencia directa de (a). □

Lema 1.3.2.6. *Si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$, son tales que, $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, entonces, existe $f \in C_b(X)$, tal que $0 \leq f \leq \mathscr{X}_X$, $Z_1 = f^{-1}(\{0\})$ y $Z_2 = f^{-1}(\{1\})$.*

Demostración. Sean $g_1, g_2 \in C_b(X)$, tales que $Z_i = g_i^{-1}(\{0\})$ para $i = 1, 2$. La función $f = g_1^2/(g_1^2 + g_2^2)$, cumple con los requisitos. □

Una función f con las características enunciadas en el lema anterior, se llamará **conexión de $\boldsymbol{Z_1}$ y $\boldsymbol{Z_2}$**.

Lema 1.3.2.7. *Para $n > 1$, consideremos $\{Z_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{Z}$ y $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{U}$ tales que, $Z_i \cap Z_j = \emptyset$, si $i \neq j$ y $Z_i \subset U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, existen colecciones $\{C_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{Z}$ y $\{V_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{U}$, tales que, $C_i \cap C_j = \emptyset$, si $i \neq j$ y $Z_i \subset V_i \subset C_i \subset U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Por los lemas 1.3.2.2 y 1.3.2.6, podemos considerar $f_1 \in C_b(X)$, una conexión de $(X \backslash U_1) \cup \bigcup_{i=2}^n Z_i$ y Z_1. Ponemos $V_1 := f_1^{-1}((\frac{1}{2}, +\infty)) \supset Z_1$ y notamos que

$$(X \backslash U_1) \cup \bigcup_{i=2}^{n} Z_i = f_1^{-1}(\{0\}) \subset f_1^{-1}((-\infty, 1/2]) = X \backslash V_1 \,,$$

por lo que, $V_1 \cap Z_i = \emptyset$ para $i = 2, \ldots, n$, y $Z_1 \subset V_1 \subset U_1$.

Sea $C_1 := f_1^{-1}(\big[\frac{1}{2}, +\infty\big)) \supset V_1$. Ya que $f_1^{-1}(\{0\}) \cap C_1 = \emptyset$, se tiene que $C_1 \cap Z_i = \emptyset$, para $i = 2, \ldots, n$ y $C_1 \subset U_1$. En resumen, tenemos que $Z_1 \subset V_1 \subset C_1 \subset U_1$ y por lema 1.3.2.5, $V_1 \in \mathcal{U}$ y $C_1 \in \mathcal{Z}$.

Luego, para $k \in \{2, \ldots, n\}$, definimos en forma recursiva $f_k \in C_b(X)$ una conexión de $(X \backslash U_k) \cup \bigcup\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} Z_i \cup \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} C_j$ y Z_k. Ponemos $V_k := f_k^{-1}((\frac{1}{2}, +\infty)) \supset Z_k$ y notamos que $f_k^{-1}(\{0\}) \subset f_k^{-1}\big((-\infty, \frac{1}{2}]\big) \subset X \backslash V_k$, por lo que, $Z_k \subset V_k \subset U_k$. Escribimos $C_k := f_k^{-1}\big([\frac{1}{2}, +\infty)\big) \supset V_k$. Ya que $f_k^{-1}(\{0\}) \cap C_k = \emptyset$, se tiene que $C_k \cap C_i = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k-1$ y $C_k \subset U_k$. En resumen, tenemos que $Z_k \subset V_k \subset C_k \subset U_k$, $C_k \cap C_i = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k-1$ y por lema 1.3.2.5, $V_k \in \mathcal{U}$ y $C_k \in \mathcal{Z}$.

Finalmente, las colecciones $\{C_i\}_{i=1}^n$ y $\{V_i\}_{i=1}^n$ son las requeridas. $\square$

Definición 1.3.2.8. *Se define el* ***álgebra de Baire*** *como el álgebra de subconjuntos de X más pequeña que contiene a $\mathcal{Z}$ (o a $\mathcal{U}$). Esta se denota por $\mathcal{B}$ y a sus elementos se les llaman* ***conjuntos de Baire****.*

1.3.3. Espacio de medidas de Baire.

Definición 1.3.3.1. *Una función conjunto $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, es* ***regular****, si para cada $A \in \mathcal{B}$, se tiene que: $\mu(A) = \sup\{\mu(Z) : Z \in \mathcal{Z},\ Z \subset A\}$.*

Definición 1.3.3.2. *Una* ***medida de Baire positiva****, es una función conjunto $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, no-negativa, finitamente aditiva y regular. El conjunto de todas las medidas de Baire positivas, es denotado por $M^+(X)$.*

La diferencia $\mu_1 - \mu_2$ de dos medidas de Baire positivas μ_1 y μ_2, es llamada ***medida de Baire****. El conjunto de todas las medidas de Baire, es denotado por $M(X)$.*

Proposición 1.3.3.3. *Sea $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ una función conjunto no-negativa y finitamente aditiva. Las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

(a) $\mu \in M^+(X)$.

(b) Para cada $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{U},\ A \subset U\}$.

Demostración. Supongamos que $\mu \in M^+(X)$. Entonces, por la regularidad de μ, para cada $A \in \mathcal{B}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu(X \backslash A) &= \sup\{\mu(Z) : Z \in \mathcal{Z},\ Z \subset X \backslash A\} \\
&= \sup\{\mu(X \backslash (X \backslash Z)) : Z \in \mathcal{Z},\ Z \subset X \backslash A\} \\
&= \mu(X) + \sup\{-\mu(X \backslash Z) : Z \in \mathcal{Z},\ Z \subset X \backslash A\} \\
&= \mu(X) - \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{U},\ A \subset U\}
\end{aligned}$$

De este modo, $\text{ínf}\{\mu(U) : U \in \mathcal{U},\ \ A \subset U\} = \mu(X) - \mu(X \backslash A) = \mu(A)$.

Ahora, supongamos que (b) se satisface. Para cada $A \in \mathcal{B}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu(X\backslash A) &= \text{ínf}\{\mu(U) : U \in \mathcal{U},\ \ X\backslash A \subset U\}\\ &= \text{ínf}\{\mu(X\backslash(X\backslash U)) : U \in \mathcal{U},\ \ X\backslash U \subset A\}\\ &= \mu(X) + \text{ínf}\{-\mu(X\backslash U) : U \in \mathcal{U},\ \ X\backslash U \subset A\}\\ &= \mu(X) - \sup\{\mu(Z) : Z \in \mathcal{Z},\ \ Z \subset A\}\end{aligned}$$

Luego, se tiene que: $\sup\{\mu(Z) : Z \in \mathcal{Z},\ \ Z \subset A\} = \mu(X) - \mu(X\backslash A) = \mu(A)$. Por lo tanto, μ es regular, y de aquí, se concluye que $\mu \in M^+(X)$. □

Proposición 1.3.3.4. *Si $\mu_1, \mu_2 \in M^+(X)$ y $\alpha, \beta \geqslant 0$, entonces, $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \in M^+(X)$.*

Demostración. Sean $A \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos, $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ tales que:

$$\begin{aligned}(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(A) &= \alpha\mu_1(A) + \beta\mu_2(A)\\ &= \alpha \sup\{\mu_1(Z) : Z \in \mathcal{Z},\ \ Z \subset A\} + \beta \sup\{\mu_2(Z) : Z \in \mathcal{Z},\ \ Z \subset A\}\\ &\leqslant \alpha(\mu_1(Z_1) + \varepsilon) + \beta(\mu_2(Z_2) + \varepsilon)\\ &= \alpha\mu_1(Z_1) + \beta\mu_2(Z_2) + \varepsilon(\alpha + \beta)\\ &\leqslant \alpha\mu_1(Z_1 \cup Z_2) + \beta\mu_2(Z_1 \cup Z_2) + \varepsilon(\alpha + \beta)\\ &\leqslant \sup\{(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(Z) : Z \in \mathcal{Z},\ \ Z \subset A\} + \varepsilon(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, podemos concluir que:

$$(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(A) = \sup\{(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(Z) : Z \in \mathcal{Z},\ \ Z \subset A\}\,.$$

Por lo tanto, $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \in M^+(X)$. □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Corolario 1.3.3.5. *El conjunto $M(X)$ de las medidas de Baire, es un espacio vectorial real.*

Definición 1.3.3.6. *En el espacio $M(X)$ se define la norma $\|\mu\|_* := |\mu|(X)$, para cada $\mu \in M(X)$.*

Teorema 1.3.3.7. *Sea $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ una función conjunto acotada y finitamente aditiva. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mu \in M(X)$

2. $\mu^+, \mu^- \in M^+(X)$

3. $|\mu| \in M(X)$

4. *Dados* $A \in \mathcal{B}$ *y* $\varepsilon > 0$, *existen* $Z \in \mathcal{Z}$ *y* $U \in \mathcal{U}$, *tales que,* $Z \subset A \subset U$ *y* $|\mu|(B) < \varepsilon$, $\forall B \in \mathcal{B}$, $B \subset U \backslash Z$.

5. *Dados* $A \in \mathcal{B}$ *y* $\varepsilon > 0$, *existe* $Z \in \mathcal{Z}$, *tal que,* $Z \subset A$ *y* $|\mu|(B) < \varepsilon$, $\forall B \in \mathcal{B}$, $B \subset A \backslash Z$.

6. *Dados* $A \in \mathcal{B}$ *y* $\varepsilon > 0$, *existe* $U \in \mathcal{U}$, *tal que,* $A \subset U$ *y* $|\mu|(B) < \varepsilon$, $\forall B \in \mathcal{B}$, $B \subset U \backslash A$.

7. *Dados* $A \in \mathcal{B}$ *y* $\varepsilon > 0$, *existen* $Z \in \mathcal{Z}$ *y* $U \in \mathcal{U}$, *tales que,* $Z \subset A \subset U$ *y* $|\mu(B)| < \varepsilon$, $\forall B \in \mathcal{B}$, $B \subset U \backslash Z$.

8. *Dados* $A \in \mathcal{B}$ *y* $\varepsilon > 0$, *existe* $Z \in \mathcal{Z}$, *tal que,* $Z \subset A$ *y* $|\mu(B)| < \varepsilon$, $\forall B \in \mathcal{B}$, $B \subset A \backslash Z$.

9. *Dados* $A \in \mathcal{B}$ *y* $\varepsilon > 0$, *existe* $U \in \mathcal{U}$, *tal que,* $A \subset U$ *y* $|\mu(B)| < \varepsilon$, $\forall B \in \mathcal{B}$, $B \subset U \backslash A$.

Demostración. La estrategia de la demostración se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
(3) \arrow[dr, Leftrightarrow] & & & & & \\
& (2) \arrow[dr, Rightarrow] & & & & \\
& & (1) \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
& & & (4) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (5) \arrow[r, Rightarrow] & (8) \arrow[uullll, Rightarrow, bend right] \\
& & & (6) \arrow[d, Rightarrow] & (7) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \\
& & & (9) \arrow[uuuull, Rightarrow, bend left] & &
\end{tikzcd}$$

Las demostraciones de (2) $\Rightarrow$ (1), (4) $\Rightarrow$ (7), (7) $\Rightarrow$ (8), (7) $\Rightarrow$ (9), (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (8) y (4) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (9) son inmediatas.

Mostremos que (1) $\Rightarrow$ (4). Supongamos que $\mu \in M(X)$. Sean $\mu_1, \mu_2 \in M^+(X)$ tales que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Sean $A \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$. Por la regularidad de μ_i $(i = 1, 2)$ y por 1.3.3.3, existen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ y $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, tales que, $Z_i \subset A \subset U_i$ y $\mu_i(U_i) - \frac{\varepsilon}{4} < \mu_i(A) < \mu_i(Z_i) + \frac{\varepsilon}{4}$, para $i = 1, 2$. Luego, $\mu_i(U_i \backslash Z_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, para $i = 1, 2$. Tomando $U = U_1 \cap U_2$ y $Z = Z_1 \cup Z_2$ tenemos que $Z \in \mathcal{Z}$, $U \in \mathcal{U}$, $Z \subset A \subset U$ y $\mu_i(U \backslash Z) \leqslant \mu_i(U_i \backslash Z_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, para $i = 1, 2$. Para $B \in \mathcal{B}$, $B \subset U \backslash Z$, aplicando 1.3.1.10, se tiene que: $|\mu|(B) = \mu^+(B) + \mu^-(B) \leqslant \mu_1(B) + \mu_2(B) \leqslant \mu_1(U \backslash Z) + \mu_2(U \backslash Z) < \varepsilon$. Así, (4) se satisface.

Mostremos que (8) $\Rightarrow$ (2). Por hipótesis, dados $A \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$, existe $Z \in \mathcal{Z}$, tal que, $Z \subset A$ y $-\varepsilon < \mu(B) < \varepsilon$, para todo $B \in \mathcal{B}$, $B \subset A \backslash Z$. Luego,

$$\mu^+(A \backslash Z) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}, B \subset A \backslash Z\} < \varepsilon \quad \text{y}$$
$$-\mu^-(A \backslash Z) = \text{ínf}\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}, B \subset A \backslash Z\} > -\varepsilon.$$

Así,

$$\mu^+(A) < \varepsilon + \mu^+(Z) \leqslant \varepsilon + \sup\{\mu^+(G) : G \in \mathcal{Z}, G \subset A\} \quad \text{y}$$
$$\mu^-(A) < \varepsilon + \mu^-(Z) \leqslant \varepsilon + \sup\{\mu^-(G) : G \in \mathcal{Z}, G \subset A\}.$$

Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ y por la monotonía de μ^+ y μ^-, se concluye que: $\mu^+(A) = \sup\{\mu^+(G) : G \in \mathcal{Z}, G \subset A\}$ y $\mu^-(A) = \sup\{\mu^-(G) : G \in \mathcal{Z}, G \subset A\}$. Es decir, μ^+ y μ^- son medidas de Baire positivas, lo que prueba (2).

Mostremos que (9) $\Rightarrow$ (2). Por hipótesis, dados $A \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$, existe $U \in \mathcal{U}$, tal que, $A \subset U$ y $-\varepsilon < \mu(B) < \varepsilon$, para todo $B \in \mathcal{B}$, $B \subset U \backslash A$. Luego,

$$\mu^+(U\backslash A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}, B \subset U\backslash A\} < \varepsilon \quad \text{y}$$
$$-\mu^-(U\backslash A) = \text{ínf}\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}, B \subset U\backslash A\} \geqslant -\varepsilon.$$

Así,

$$\text{ínf}\{\mu^+(G) : G \in \mathcal{U}, A \subset G\} \leqslant \mu^+(U) < \varepsilon + \mu^+(A) \quad \text{y}$$
$$\text{ínf}\{\mu^-(G) : G \in \mathcal{U}, A \subset G\} \leqslant \mu^-(U) < \varepsilon + \mu^-(A).$$

Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ y por la monotonía de μ^+ y μ^-, se concluye que: $\mu^+(A) = \text{ínf}\{\mu^+(G) : G \in \mathcal{U}, A \subset G\}$ y $\mu^-(A) = \text{ínf}\{\mu^-(G) : G \in \mathcal{U}, A \subset G\}$. Es decir, μ^+ y μ^- pertenecen a $M^+(X)$, probando (2).

Ahora probemos (3) $\Leftrightarrow$ (2). Supongamos que $|\mu| \in M^+(X)$. Sea $A \in \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}\mu^+(A) + \mu^-(A) = |\mu|(A) =& \sup\{|\mu|(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\} \\ &\leqslant \sup\{\mu^+(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\} + \sup\{\mu^-(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\}\ .\end{aligned}$$

Razonando por contradicción, si $\mu^+(A) > \sup\{\mu^+(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\}$, entonces $0 < \mu^+(A) - \sup\{\mu^+(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\} \leqslant \sup\{\mu^-(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\} - \mu^-(A)$. Luego, $\mu^-(A) < \sup\{\mu^-(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\} \leqslant \mu^-(A)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $\mu^+(A) = \sup\{\mu^+(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\}$ y $\mu^-(A) = \sup\{\mu^-(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\}$. De este modo, μ^+ y μ^- pertenecen a $M^+(X)$.

Supongamos ahora que $\mu^+, \mu^- \in M^+(X)$. Por la proposición 1.3.3.4, se tiene que $|\mu| = \mu^+ + \mu^- \in M^+(X)$. $\square$

Corolario 1.3.3.8. *Sea $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ una función conjunto. Si $\mu \in M(X)$ y $\mu \geqslant 0$, entonces, $\mu^- = 0$ y $\mu = |\mu| = \mu^+ \in M^+(X)$.*

Demostración. Como μ es no-negativa y finitamente aditiva, se tiene que $\mu = |\mu|$. De aquí, se tiene que $\mu^- = 0$ y por lo tanto $\mu = \mu^+$. Luego, aplicando el teorema anterior, se concluye que $|\mu| = \mu^+ \in M^+(X)$. $\square$

Capítulo 2

Algunas propiedades topológicas de $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$.

Todos los resultados en el capítulo 2 serán enunciados y demostrados para el espacio $C_b(X,E)$. Sin embargo, en las secciones 2.1, 2.2 y 2.3 basta sustituir el símbolo $C_b(X,E)$ por $B(X,E)$ para que los resultados y demostraciones sean igualmente válidos en el espacio $B(X,E)$.

2.1. Comparación de topologías en $C_b(X,E)$ y $B(X,E)$.

En esta sección veremos que las distintas topologías que hemos definido en el espacio $C_b(X,E)$ (y en $B(X,E)$) son comparables, e indicarémos cuáles topologías son más finas que otras y qué condiciones son necesarias y suficientes para obtener la igualdad entre ellas.

Definición 2.1.1. *Sean L_1 y L_2 cubrimientos de X. Diremos que L_2 es un **refinamiento** de L_1 si cada elemento de L_2 está contenido en algún elemento de L_1. Esto lo denotaremos por $L_1 \preceq L_2$.*

Observación 2.1.2. *Para las colecciones $A(X), K(X)$ y $\mathcal{P}$, tenemos:*

$$K(X) \preceq \mathcal{P} \preceq A(X).$$

Observación 2.1.3. *Si $X \in \mathcal{P}$, entonces, $\mathcal{P} \preceq K(X)$.*

Proposición 2.1.4.

(a) Si $\mathcal{P}_2 \preceq \mathcal{P}_1$ entonces $\tau_{\mathcal{P}_1} \leqslant \tau_{\mathcal{P}_2}$ y $\beta_{\mathcal{P}_1} \leqslant \beta_{\mathcal{P}_2}$

(b) $\tau_{\mathcal{P}} \leqslant \beta_{\mathcal{P}} \leqslant \tau_u$.

(c) $\tau_{\mathcal{P}} = \beta_{\mathcal{P}}$ si y solo si, para cada unión numerable de elementos de $\mathcal{P}$, existe un elemento de $\mathcal{P}$, que contiene a dicha unión.

(d) $\beta_{\mathcal{P}} = \tau_u$ si y solo si $X \in \mathcal{P}$.

Demostración. (a) Si $\mathcal{P}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_2$, entonces, dado K_1 en $\mathcal{P}_1$ existe K_2 en $\mathcal{P}_2$ que contiene a K_1. Luego, la primera relación sigue del hecho que $\|\cdot\|_{K_1,p} \leqslant \|\cdot\|_{K_2,p}$ para cada $p \in s(E)$. Para ver que $\beta_{\mathcal{P}_1} \leqslant \beta_{\mathcal{P}_2}$, basta probar que $V_{\mathcal{P}_1} \subset V_{\mathcal{P}_2}$. Sean $v \in V_{\mathcal{P}_1}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $K_1 \in \mathcal{P}_1$ que cumple $\|v\|_{X\setminus K_1} < \varepsilon$ y por hipótesis, existe K_2 en $\mathcal{P}_2$, que contiene a K_1. De este modo, $\|v\|_{X\setminus K_2} \leqslant \|v\|_{X\setminus K_1} < \varepsilon$, concluyendo así que $v \in V_{\mathcal{P}_2}$.

(b) Sean $p \in s(E)$ y $K \in \mathcal{P}$. Si ponemos $v = \mathscr{X}_K$ entonces $\|\cdot\|_{p,K} = \|\cdot\|_{p,v}$. De aquí $\tau_{\mathcal{P}} \leqslant \beta_{\mathcal{P}}$, pues la familia de seminormas que genera $\tau_{\mathcal{P}}$ esta contenida en la familia de seminormas que genera a $\beta_{\mathcal{P}}$. Por otro lado, dados v en $V_{\mathcal{P}}$, p en $\mathcal{P}$ y f en $C_b(X,E)$, se tiene que $\|f\|_{p,v} \leqslant \|v\|\|f\|_p$. Por lo tanto $\beta_{\mathcal{P}} \leqslant \tau_u$.

(c) Supongamos que $\tau_{\mathcal{P}}$ y $\beta_{\mathcal{P}}$ coinciden. Dada una sucesión (K_n) de elementos de $\mathcal{P}$, consideremos $v = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mathscr{X}_{K_n}$. Aplicando 1.2.7 tenemos que $v \in V_{\mathcal{P}}$. Por hipótesis se tiene que para cada p en $s(E)$, existen q en $s(E)$, K en $\mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$ tales que:

$$\{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{q,K} < \varepsilon\} \subset \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p,v} < 1\}.$$

Luego, para $f \in C_b(X,E)$ tal que $\|f\|_{q,K} \neq 0$ se tiene que $\|\left(\varepsilon/2\|f\|_{q,K}\right) f\|_{p,v} < 1$ y de aquí $\|f\|_{p,v} < (2/\varepsilon)\|f\|_{q,K}$. Para $f \in C_b(X,E)$ con $\|f\|_{q,K} = 0$ se tiene que $\|nf\|_{q,K} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por ende $\|nf\|_{p,v} < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, concluyendo que $\|f\|_{p,v} = 0$. De este modo, queda demostrado que $\|\cdot\|_{p,v} \leqslant r\|\cdot\|_{q,K}$, donde

$r = 2/\varepsilon$. Mostraremos por contradicción que $\forall n \in \mathbb{N}, K_n \subset K$. Supongamos que $K_n \not\subset K$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Ya que X es completamente regular, para $y \in K_n \backslash K$ existe $g \in C_b(X)$ tal que $0 \leqslant g \leqslant \mathscr{X}_X$, $g(K) = \{0\}$ y $g(y) = 1$. Elegimos $s \in E$ tal que $p(s) \neq 0$ y consideramos la función $g \otimes s \in C_b(X,E)$. Por lo obtenido más arriba se tiene que $\|g \otimes s\|_{p,v} \leqslant r\|g \otimes s\|_{q,K} = 0$. Sin embargo, para $y \in K_n \backslash K$ se tiene que $0 < v(y)p(s) \leqslant \|g \otimes s\|_{p,v}$ llegando a una contradicción. Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset K$.

Ahora supongamos que para cada sucesión (K_n) de elementos de $\mathcal{P}$, existe $K \in \mathcal{P}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K$. Probemos que $\beta_{\mathcal{P}} \leqslant \tau_{\mathcal{P}}$. Sean $v \in V_{\mathcal{P}}$ y $p \in s(E)$.

Sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $K_n \in \mathcal{P}$ tal que $\|v\|_{X\backslash K_n} < 2^{-n}$. Por hipótesis, existe un conjunto K en $\mathcal{P}$, tal que, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset K$, por lo que $\|v\|_{X\backslash K} \leqslant \|v\|_{X\backslash K_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De este modo, para cada $x \in X\backslash K$, $v(x) = 0$.

Luego, para $f \in C_b(X,E)$, $\|f\|_{p,v} = \sup\{v(x)p(f(x)) : x \in K\} \leqslant \|v\|\|f\|_{p,K}$. Así queda demostrado que $\beta_{\mathcal{P}} \leqslant \tau_{\mathcal{P}}$.

(d) Supongamos que $\tau_u \leqslant \beta_{\mathcal{P}}$. Luego, para $p \in s(E)$, existen $q \in s(E)$, $v \in V_{\mathcal{P}}$ y $r > 0$ tales que $\|\cdot\|_p \leqslant r\|\cdot\|_{q,v}$. Evaluando funciones constantes en la desigualdad anterior se deduce que $p(e) \leqslant r\|v\|q(e)$ para cada $e \in E$. Sea $s \in E$ tal que $p(s) = 1$.

Existe $K \in \mathcal{P}$ para el cual $v(x) \leqslant 1/2rq(s)$ para cada $x \in X\backslash K$. Se tiene que $X\backslash K = \emptyset$ y de aquí $X \in \mathcal{P}$; en efecto, de lo contrario podemos elegir $x \in X\backslash K$ y $f \in C_b(X)$ tal que $0 \leqslant f \leqslant \mathscr{X}_X$, $f(x) = 1$ y $f(K) = \{0\}$ lo que nos deja la siguiente contradicción:

$$r\|f \otimes s\|_{q,v} = r \sup_{x \in X\backslash K}\{v(x)q(f(x)s)\} \leqslant \frac{rq(s)}{2rq(s)} = \frac{1}{2} < 1 = \|f \otimes s\|_p.$$

Recíprocamente si $X \in \mathcal{P}$, entonces $\mathscr{X}_X \in V_{\mathcal{P}}$. Esto implica que $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{p,\mathscr{X}_X}$ para cada $p \in s(E)$. De este modo la familia de seminormas que genera la topología τ_u está contenida en la familia de seminormas que genera la topología $\beta_{\mathcal{P}}$. $\square$

De forma análoga, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.1.5. *Sea $p \in s(E)$.*

(a) Si $\mathcal{P}_2 \preceq \mathcal{P}_1$ entonces $\tau_p(\mathcal{P}_1) \leqslant \tau_p(\mathcal{P}_2)$ y $\beta_p(\mathcal{P}_1) \leqslant \beta_p(\mathcal{P}_2)$.

(b) $\tau_p \leqslant \beta_p \leqslant u_p$.

(c) $\tau_p = \beta_p$ *si y solo si, para cada unión numerable de elementos de* $\mathcal{P}$*, existe un elemento de* $\mathcal{P}$*, que contiene a dicha unión.*

(d) $\beta_p = u_p$ *si y solo si* $X \in \mathcal{P}$.

Demostración. Basta reemplazar los símbolos $s(E)$, $\tau_{\mathcal{P}_m}$, $\beta_{\mathcal{P}_m}$, τ_u , $\beta_{\mathcal{P}}$ y $\tau_{\mathcal{P}}$ por $\{p\}$ $\tau_p(\mathcal{P}_m)$, $\beta_p(\mathcal{P}_m)$, u_p , β_p y τ_p respectivamente en la demostración de 2.1.4, donde $m = 1, 2$. □

Podemos resumir las distintas comparaciones de las topologías $\beta_{\mathcal{P}}$ y β_p con las demás topologías definidas anteriormente, respecto de la relación $\leqslant$, en lo siguiente:

$$pw = \tau_{A(X)} \leqslant \tau_{\mathcal{P}} \leqslant \beta_{\mathcal{P}} \leqslant \beta_0 \leqslant \tau_u \qquad \tau_p(A(X)) \leqslant \tau_p \leqslant \beta_p \leqslant \beta_p(K(X)) \leqslant u_p$$
$$pw = \tau_{A(X)} \leqslant \delta \leqslant \beta_{\mathcal{P}} \leqslant \beta_0 \leqslant \tau_u \qquad \tau_p(A(X)) \leqslant \beta_p(A(X)) \leqslant \beta_p \leqslant \beta_p(K(X)) \leqslant u_p$$

Corolario 2.1.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $X \in \mathcal{P}$.

(b) $\beta_p = u_p$*, para cada* $p \in s(E)$.

(c) $\tau_p = \beta_p = u_p$*, para cada* $p \in s(E)$.

(d) Existe algún $p \in s(E)$*, para el cual,* $\tau_p = \beta_p = u_p$.

(e) Existe algún $p \in s(E)$*, para el cual,* $\beta_p = u_p$.

(f) $\beta_{\mathcal{P}} = \tau_u$.

(g) $\tau_{\mathcal{P}} = \beta_{\mathcal{P}} = \tau_u$.

Demostración. Por 2.1.5.d es inmediato que $(a) \Leftrightarrow (b)$ y que $(e) \Rightarrow (a)$. Por la equivalencia $(a) \Leftrightarrow (b)$ y por 2.1.5.c es claro que $(b) \Leftrightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (d)$ y $(d) \Rightarrow (e)$.

Debido a 2.1.4.d se tiene que $(a) \Leftrightarrow (f)$, y de aquí, junto con 2.1.4.c, se concluye que $(f) \Leftrightarrow (g)$. □

Podemos realizar un pequeño enriquecimiento del corolario anterior. La observación 2.1.3, junto con 2.1.4 y 2.1.6 produce el siguiente corolario:

Corolario 2.1.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $X \in \mathcal{P}$.

(b) $\beta_p = \beta_p(K(X)) = u_p$, *para cada* $p \in s(E)$.

(c) $\tau_p = \tau_p(K(X)) = \beta_p = \beta_p(K(X)) = u_p$, *para cada* $p \in s(E)$.

(d) Existe algún $p \in s(E)$, *para el cual,* $\tau_p = \tau_p(K(X)) = \beta_p = \beta_p(K(X)) = u_p$.

(e) Existe algún $p \in s(E)$, *para el cual,* $\beta_p = \beta_p(K(X)) = u_p$.

(f) $\beta_{\mathcal{P}} = \beta_0 = \tau_u$.

(g) $\tau_{\mathcal{P}} = \tau_{K(X)} = \beta_{\mathcal{P}} = \beta_0 = \tau_u$.

Corolario 2.1.8. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Cada unión numerable de elementos de $\mathcal{P}$ *esta contenida en algún elemento de* $\mathcal{P}$.

(b) $\tau_p = \beta_p$, *para cada* $p \in s(E)$,

(c) Existe algún $p \in s(E)$, *para el cual,* $\tau_p = \beta_p$

(d) $\tau_{\mathcal{P}} = \beta_{\mathcal{P}}$

Demostración. Por 2.1.5.c es inmediato que $(a) \Leftrightarrow (b)$ y que $(c) \Rightarrow (a)$, mientras que $(b) \Rightarrow (c)$ es directo. Por otro lado, debido a 2.1.4.c se tiene que $(a) \Leftrightarrow (d)$. □

Proposición 2.1.9. *Si cada unión numerable de elementos de* $\mathcal{P}$ *esta contenida en algún elemento de* $\mathcal{P}$, *entonces* X *es un espacio pseudo-compacto.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que existe una función f de X en $\mathbb{R}$ continua que no es acotada. De este modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir $x_n \in X$ tal que $|f(x_n)| \geqslant n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos K_n en $\mathcal{P}$ tal que $x_n \in K_n$.

Por hipótesis, existe $K \in \mathcal{P}$ para el cual $K_n \subset K$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Así $x_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, por la continuidad de f en K, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para cada $x \in K$, lo que es una contradicción. $\square$

2.2. Conjuntos $\beta_{\mathcal{P}}$-acotados en $C_b(X,E)$ y $B(X,E)$.

Proposición 2.2.1. *Sea B un subconjunto de $C_b(X,E)$. El conjunto B es τ_u-acotado si y solo si es $\beta_{\mathcal{P}}$-acotado.*

Demostración. Si B es τ_u-acotado, entonces, debido a que $\beta_{\mathcal{P}} \leqslant \tau_u$ (2.1.4.b), es $\beta_{\mathcal{P}}$-acotado. Para el recíproco, supongamos que B no es τ_u-acotado, entonces para algún $p \in s(E)$ existe, una sucesión (x_n) en X y otra sucesión (f_n) en B tales que $p(f_n(x_n)) \geqslant n^3$. Por 1.2.7 tenemos que $v = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\mathscr{X}_{\{x_n\}} \in V_{\mathcal{P}}$. Entonces tenemos que $\|f_n\|_{p,v} \geqslant v(x_n)p(f_n(x_n)) \geqslant v(x_n)n^3 = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De este modo B no es $\beta_{\mathcal{P}}$-acotado. $\square$

Análogamente tenemos:

Proposición 2.2.2. *Sea B un subconjunto de $C_b(X,E)$. El conjunto B es u_p-acotado si y solo si es β_p-acotado.*

Demostración. La demostración se obtiene al sustituir los símbolos $s(E)$, τ_u y $\beta_{\mathcal{P}}$ por $\{p\}$, u_p y β_p respectivamente en la demostración de la proposición anterior. $\square$

Proposición 2.2.3. *En el espacio $C_b(X,E)$ las topologías $\beta_{\mathcal{P}}$ y $\tau_{\mathcal{P}}$ coinciden en conjuntos τ_u-acotados.*

Demostración. Sea B un subconjunto τ_u-acotado de $C_b(X,E)$. Como $\tau_{\mathcal{P}} \leqslant \beta_{\mathcal{P}}$, basta probar que cada vecindad básica de 0 inducida por $\beta_{\mathcal{P}}$ en B, contiene una vecindad básica de 0 inducida por $\tau_{\mathcal{P}}$ en B. Consideremos $p \in s(E)$, $v \in V_{\mathcal{P}}$ y $a = \sup\{\|f\|_p : f \in B\}$. Existe un compacto $K \in \mathcal{P}$ tal que $\|v\|_{X\setminus K} \leqslant 1/(1+a)$. De este modo, para cada $f \in B$ se tiene:

$$\|f\|_{p,v} = \max\left\{\sup_{x\in K} v(x)p(f(x)),\ \sup_{x\in X\setminus K} v(x)p(f(x))\right\} \leqslant \max\left\{\|v\| \sup_{x\in K} p(f(x)), 1\right\}$$

donde la igualdad anterior, se obtiene de la caracterización del supremo. Por lo tanto, si $f \in B$ cumple con la desigualdad $\sup\{p(f(x)) : x \in K\} \leqslant 1/(1+\|v\|)$, entonces $\|f\|_{p,v} \leqslant 1$, se satisface. De este modo, hemos obtenido la relación:

$$B \cap \left\{ f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p,K} \leqslant \frac{1}{1+\|v\|} \right\} \subset B \cap \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p,v} \leqslant 1\}.$$

Así, $\tau_{\mathcal{P}}$ y $\beta_{\mathcal{P}}$ coinciden en B. □

Análogamente tenemos:

Proposición 2.2.4. *En el espacio $C_b(X,E)$ las topologías β_p y τ_p coinciden en conjuntos u_p-acotados.*

Demostración. La demostración se obtiene al sustituir los símbolos $s(E)$, τ_u ,$\tau_{\mathcal{P}}$ y $\beta_{\mathcal{P}}$ por $\{p\}$, u_p ,τ_p y β_p respectivamente en la demostración de la proposición anterior. □

2.3. Los espacios E y $C_b(X)$ como subespacios de $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$.

En esta sección, utilizando homeomorfismos lineales, mostraremos que los espacios E y $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ pueden ser identificados como subespacios $\beta_{\mathcal{P}}$-cerrados de $C_b(X,E)$.

Definición 2.3.1. *Dado un espacio vectorial V, una proyección sobre V es una aplicación $T : V \to V$ lineal, tal que, $T = T^2$.*

Observación 2.3.2. *Si T es una proyección sobre V, entonces se tiene que, $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$. Recíprocamente, si N y M son subespacios de V, tales que $V = N \oplus M$, entonces existe una proyección T sobre V, tal que:* $\mathrm{Ker}(T) = N$, $\mathrm{Im}(T) = M$ *y* $T|_M = Id_M$. *Además, $P := Id_V - T$ también es una proyección sobre V, tal que* $\mathrm{Ker}(P) = M$, $\mathrm{Im}(P) = N$ *y* $P|_N = Id_N$.

Definición 2.3.3. *Si N y M son subespacios de V, tales que $V = N \oplus M$, entonces diremos que M y N son **subespacios complementados de V**.*

*Sea T una proyección, tal que, $T|_N = Id_N$. Cuando V está equipado con una topología vectorial Hausdorff y T es continua, diremos que N es un **subespacio topológicamente complementado de V**.*

Utilizando la observación anterior tenemos el siguiente lema.

Lema 2.3.4. *Todo subespacio topológicamente complementado de un espacio vectorial topológico Hausdorff es un subespacio cerrado.*

Proposición 2.3.5.

(a) Para $x_0 \in X$ fijo, la aplicación $T_1 : (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}}) \to E$ definida por $T_1(f) = f(x_0)$, es lineal y continua.

(b) Para $f_0 \in C_b(X)$, $f_0 \neq 0$ fijo, la aplicación $T_2 : E \to (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ definida por $T_2(e) = f_0 \otimes e$, es lineal, continua e inyectiva. Además es un isomorfismo entre E y $T_2(E)$, este último equipado con la topología de subespacio inducida por $\beta_{\mathcal{P}}$.

(c) La aplicación $T_2 \circ T_1 : (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}}) \to (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ definida por $T_2 \circ T_1(f) = f_0 \otimes f(x_0)$, es lineal y continua. Si $f_0(x_0) = 1$, entonces:

- $T_1 \circ T_2 = Id_E$.
- $(T_2 \circ T_1)^2 = (T_2 \circ T_1)$.
- $T_2 \circ T_1(C_b(X,E)) = T_2(E)$.
- $T_2(E) \oplus \mathrm{Ker}(T_2 \circ T_1) = C_b(X,E)$.

Lo último dice que, E siempre es isomorfo a un subespacio topológicamente complementado de $C_b(X,E)$.

Demostración. (a) La linealidad de T_1 es clara. Para la continuidad, consideremos $p \in s(E)$ y $f \in C_b(X,E)$. Tenemos que $p(T_1(f)) = p(f(x_0))$. Esto muestra que T_1 es (pw,τ_E)-continua y de aquí, ésta es $(\beta_{\mathcal{P}},\tau_E)$-continua.

(b) La linealidad de T_2 es clara. Para la continuidad, consideremos $p \in s(E)$. Para cada $e \in E$ se tiene:

$$\|T_2(e)\|_p = \|f_0 \otimes e\|_p = \sup_{x\in X} |f_0(x)|p(e) = \|f_0\|p(e)$$

mostrando así que T_2 es (τ_E, τ_u)-continua y de aquí, esta es $(\tau_E, \beta_{\mathcal{P}})$-continua. Ahora consideremos $e \in E$, tal que, $T_2(e) = 0$. Para $x \in X$, $f_0(x) \neq 0$, se cumple por hipótesis que $f_0(x)e = 0$, lo que implica $e = 0$, mostrando la inyectividad de T_2, y por ende, también la inyectividad de $T_2^{-1} : T_2(E) \to E$, donde $T_2^{-1}(f_0 \otimes e) := e$.

Para probar que T_2 es un isomorfismo entre E y $T_2(E)$, este último equipado con la topología de subespacio inducida por $\beta_{\mathcal{P}}$, basta probar que T_2^{-1} es continua respecto a esta topología.

Para esto, elegimos $y \in X$, tal que $f_0(y) \neq 0$. Para cada $p \in s(E)$ y $e \in E$, se tiene:

$$p(T_2^{-1}(f_0 \otimes e)) = p(e) = \frac{p(f_0(y)e)}{|f_0(y)|}$$

lo que muestra la continuidad de T_2^{-1} respecto de la topología de subespacio inducida por la topología pw, y de aquí, respecto a la topología de subespacio inducida por la topología $\beta_{\mathcal{P}}$.

(c) La aplicación $T_2 \circ T_1$ es lineal y continua porque es la composición de aplicaciones lineales y continuas. Supongamos que $f_0(x_0) = 1$ y consideremos $e \in E$.

$$(T_1 \circ T_2)(e) = T_1(f_0 \otimes e) = f_0(x_0)e = e$$

por lo tanto, $(T_1 \circ T_2) = Id_E$. Por consiguiente,

$$(T_2 \circ T_1)^2 = (T_2 \circ T_1) \circ (T_2 \circ T_1) = T_2 \circ (T_1 \circ T_2) \circ T_1 = T_2 \circ Id_E \circ T_1 = T_2 \circ T_1.$$

Luego, $T_2(E) = (T_2 \circ T_1 \circ T_2)(E) \subset T_2 \circ T_1(C_b(X,E))$, pues $T_2(E) \subset C_b(X,E)$.

Además, $T_1(C_b(X,E)) \subset E$, por lo que, $T_2 \circ T_1(C_b(X,E)) \subset T_2(E)$. De esto, se concluye que $T_2 \circ T_1(C_b(X,E)) = T_2(E)$. Luego, puesto que la aplicación $T_2 \circ T_1$ es una proyección sobre $C_b(X,E)$, se tiene que

$$C_b(X,E) = \mathrm{Im}(T_2 \circ T_1) \oplus \mathrm{Ker}(T_2 \circ T_1) = T_2(E) \oplus \mathrm{Ker}(T_2 \circ T_1).$$

$\square$

Proposición 2.3.6.

(a) *Para $e_0' \in E'$, con $e_0' \neq 0$ fijo, la aplicación $S_1 : (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}}) \to (C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ definida por $S_1(f) = e_0' \circ f$, es lineal y continua.*

(b) *Para $e_0 \in E$, $e_0 \neq 0$ fijo, la aplicación $S_2 : (C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}}) \to (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ definida por $S_2(f) = f \otimes e_0$, es lineal, continua e inyectiva. Además es un isomorfismo entre $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ y $S_2(C_b(X))$, este último equipado con la topología de subespacio inducida por $\beta_{\mathcal{P}}$.*

(c) *La aplicación $S_2 \circ S_1 : (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}}) \to (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ definida por $S_2 \circ S_1(f) = (e_0' \circ f) \otimes e_0$, es lineal y continua. Si $e_0'(e_0) = 1$, entonces:*

- $S_1 \circ S_2 = Id_{C_b(X)}$.
- $(S_2 \circ S_1)^2 = (S_2 \circ S_1)$.
- $S_2 \circ S_1(C_b(X,E)) = S_2(C_b(X))$.
- $S_2(C_b(X)) \oplus \mathrm{Ker}(S_2 \circ S_1) = C_b(X,E)$.

Lo último dice que, $C_b(X)$ siempre es isomorfo a un subespacio topológicamente complementado de $C_b(X,E)$.

Demostración. (a) La linealidad de S_1 es clara. Para la continuidad, notemos que $|e_0'(\cdot)|$ es una seminorma continua en E, por tanto, existen $p \in s(E)$ y $r > 0$, tales que, $|e_0'(e)| \leqslant rp(e)$, para todo $e \in E$. De este modo, dado $v \in V_{\mathcal{P}}$, se tiene:

$$\|S_1(f)\|_v = \|e_0' \circ f\|_v = \sup_{x\in X} v(x)|e_0'(f(x))| \leqslant \sup_{x\in X} rv(x)p(f(x)) = r\|f\|_{p,v}$$

donde $f \in C_b(X,E)$. Esto muestra que S_1 es $(\beta_{\mathcal{P}},\gamma_{\mathcal{P}})$-continua.

(b) La linealidad de S_2 es clara. Para la continuidad, consideremos $p \in s(E)$ y $v \in V_{\mathcal{P}}$. Para cada $f \in C_b(X)$, se tiene $\|S_2(f)\|_{p,v} = \|f \otimes e_0\|_{p,v} = \|f\|_v p(e_0)$ mostrando así que S_2 es $(\gamma_{\mathcal{P}},\beta_{\mathcal{P}})$-continua. Ahora consideremos $f \in C_b(X)$, tal que, $S_2(f) = 0$.

Así, $f(x)e_0 = 0$, para cada $x \in X$, lo que implica $f = 0$, mostrando la inyectividad de S_2, y por ende, también la inyectividad de $S_2^{-1} : S_2(C_b(X)) \to C_b(X)$, donde

$S_2^{-1}(f\otimes e_0) := f$. Para probar que S_2 es un isomorfismo entre $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ y $S_2(C_b(X))$, este último equipado con la topología de subespacio inducida por $\beta_{\mathcal{P}}$, basta probar que S_2^{-1} es continua respecto a esta topología.

Para esto, elegimos $p\in s(E)$, tal que $p(e_0)\neq 0$. Para cada $v\in V_{\mathcal{P}}$ y $f\in C_b(X)$, se tiene:

$$\|S_2^{-1}(f)\|_v = \|f\|_v = \frac{\|f\|_v p(e_0)}{p(e_0)} = \frac{\|f\otimes e_0\|_{p,v}}{p(e_0)}$$

lo que muestra la continuidad de S_2^{-1} respecto de la topología de subespacio inducida por la topología $\beta_{\mathcal{P}}$.

(c) La aplicación $S_2\circ S_1$ es lineal y continua porque es la composición de aplicaciones lineales y continuas. Supongamos que $e_0'(e_0)=1$ y consideremos $g\in C_b(X)$.

$$(S_1\circ S_2)(g) = S_1(g\otimes e_0) = g\cdot e_0'(e_0) = g$$

por lo tanto, $(S_1\circ S_2) = Id_{C_b(X)}$. Por consiguiente,

$$(S_2\circ S_1)^2 = S_2\circ S_1\circ S_2\circ S_1 = S_2\circ Id_E\circ S_1 = S_2\circ S_1.$$

Luego, $S_2(C_b(X)) = (S_2\circ S_1\circ S_2)(C_b(X)) \subset S_2\circ S_1(C_b(X,E))$, pues $S_2(C_b(X))\subset C_b(X,E)$. Además, $S_1(C_b(X,E))\subset C_b(X)$, por lo que, $S_2\circ S_1(C_b(X,E))\subset S_2(C_b(X))$.

De esto, se concluye que $S_2\circ S_1(C_b(X,E)) = S_2(C_b(X))$. Luego, puesto que la aplicación $S_2\circ S_1$ es una proyección sobre $C_b(X,E)$, se tiene que

$$C_b(X,E) = \mathrm{Im}(S_2\circ S_1)\oplus \mathrm{Ker}(S_2\circ S_1) = S_2(C_b(X))\oplus \mathrm{Ker}(S_2\circ S_1).$$

□

Los siguientes corolarios son herramientas muy útiles para los resultados futuros, y son consecuencia inmediata de las proposiciones anteriores.

Corolario 2.3.7. *Los espacios E y $C_b(X)$ son subespacios $\beta_{\mathcal{P}}$-cerrados de $C_b(X,E)$.*

Demostración. Es inmediato de 2.3.5, 2.3.6 y de 2.3.4. □

Corolario 2.3.8. *Si el espacio* $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ *es completo (respectivamente cuasicompleto), entonces, los espacios* E *y* $(C_b(X), \gamma_{\mathcal{P}})$ *son completos (respectivamente cuasicompletos).*

Demostración. La demostración es directa de 2.3.7, pues E y $(C_b(X), \gamma_{\mathcal{P}})$ pueden identificarse con subespacios cerrados de $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$, mediante homeomorfismos lineales. □

Corolario 2.3.9. *Si el espacio* $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ *es separable, entonces, los espacios* E *y* $(C_b(X), \gamma_{\mathcal{P}})$ *son separables.*

Demostración. Consideremos las aplicaciones T_1, T_2, S_1 y S_2 definidas en 2.3.5 y 2.3.6.

Sea D un subconjunto numerable y $\beta_{\mathcal{P}}$-denso de $C_b(X, E)$. Por 2.3.5 se tiene que:

$$T_2(E) = T_2 \circ T_1(C_b(X, E)) = T_2 \circ T_1(\overline{D}) \subset \overline{T_2 \circ T_1(D)} \subset \overline{T_2 \circ T_1(C_b(X, E))} = \overline{T_2(E)}\ .$$

De este modo, por 2.3.7, $\overline{T_2 \circ T_1(D)} = \overline{T_2(E)} = T_2(E)$, mostrando que $T_2(E)$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-separable. Luego, mediante el isomorfismo $T_2 : E \to T_2(E)$, se concluye que E es τ_E-separable.

Análogamente, aplicando 2.3.6, se tiene que:

$$\begin{aligned} S_2(C_b(X)) = S_2 \circ S_1(C_b(X, E)) = S_2 \circ S_1(\overline{D}) \subset \overline{S_2 \circ S_1(D)} \subset \overline{S_2 \circ S_1(C_b(X, E))} \\ = \overline{S_2(C_b(X))}\ . \end{aligned}$$

De este modo, por 2.3.7, $\overline{S_2 \circ S_1(D)} = \overline{S_2(C_b(X))} = S_2(C_b(X))$, mostrando que $S_2(C_b(X))$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-separable. Luego, por el isomorfismo $S_2 : C_b(X) \to S_2(C_b(X))$, concluimos que $C_b(X)$ es $\gamma_{\mathcal{P}}$-separable. □

2.4. La $\beta_{\mathcal{P}}$-densidad de $C_b(X) \otimes E$ en $C_b(X, E)$.

Antes de enunciar el principal resultado de esta sección, probaremos un par de lemas preliminares.

Lema 2.4.1. *Sean F y K subespacios disjuntos de un espacio Hausdorff completamente regular X, tales que, F es cerrado y K es compacto. Existen vecindades abiertas U_0 y U_1 de F y K respectivamente, que son disjuntas entre sí, y una función continua $f : X \to \mathbb{R}$, tal que, $0 \leqslant f \leqslant \mathscr{X}_X$, $f(U_0) = \{0\}$ y $f(U_1) = \{1\}$.*

Demostración. Podemos identificar X con un subespacio topológico de su compactificación de Stone-Čech βX, y por lo tanto, podemos identificar K con un subespacio compacto de βX. Además existe un subconjunto C de βX, cerrado, tal que $F = X \cap C$. Como K y F son disjuntos, se tiene que K y C también lo son. Ya que βX es un espacio normal, por la caracterización de Urysohn existe una función continua $g : \beta X \to \mathbb{R}$, tal que, $0 \leqslant g \leqslant \mathscr{X}_{\beta X}$, $g(C) = \{0\}$ y $g(K) = \{1\}$. Si consideramos la función $h := g|_X$ entonces, $0 \leqslant h \leqslant \mathscr{X}_X$, $h(F) = \{0\}$ y $h(K) = \{1\}$. Los conjuntos $U_0 = \{x \in X : h(x) < 1/3\}$ y $U_1 = \{x \in X : h(x) > 2/3\}$ son vecindades abiertas de F y K respectivamente. Tomamos una función continua $t : [0, 1] \to [0, 1]$, tal que, $t([0, \frac{1}{3}]) = \{0\}$ y $t([\frac{2}{3}, 1]) = \{1\}$. Finalizamos la demostración definiendo la función $f := t \circ h$, la cual cumple todos los requisitos. $\square$

Lema 2.4.2. *Si K es un subespacio compacto de X y $\{U_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ es una colección finita de subconjuntos abiertos de X, tales que, $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $K \not\subset \bigcup\{U_i : i \in \{1, \dots, n\} - \{j\}\}$ para cada $j = 1, \dots, n$, entonces existe una vecindad abierta U de K y una colección de funciones $\{f_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset C_b(X)$, tales que, $0 \leqslant \sum_{i=1}^n f_i \leqslant \mathscr{X}_X$, $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ para todo $x \in K$ y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene:* $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$.

Demostración. Definimos el conjunto

$$K_1 := K \setminus \bigcup_{i=2}^{n} U_i$$

el cual es compacto y está contenido en U_1. Por lema 2.4.1, existen vecindades abiertas disjuntas V_0 y V_1 de $X \setminus U_1$ y K_1 respectivamente, y existe también una función $g_1 \in C_b(X)$, tal que, $0 \leqslant g_1 \leqslant \mathscr{X}_X$, $g_1(V_0) = \{0\}$ y $g_1(V_1) = \{1\}$. Luego $\operatorname{supp} g_1 \subset U_1$ y $V_1 \subset U_1$.

Definimos el conjunto

$$K_2 := \left(K\backslash \bigcup_{i=3}^{n} U_i\right)\backslash V_1 .$$

el cual es un conjunto compacto contenido en U_2. En efecto, si $x\in K_2\backslash U_2$, entonces $x\in K\backslash\left(\bigcup_{i=2}^{n} U_i\right) = K_1\subset V_1$, llegando a una contradicción, pues $x\notin V_1$. Luego K_2 es un compacto disjunto del conjunto cerrado $X\backslash U_2$. Aplicando el lema 2.4.1 existe una vecindad abierta V_2 de K_2 y una función $g_2\in C_b(X)$, tales que, $V_2\subset U_2$, $0\leqslant g_2\leqslant \mathscr{X}_X$, $g_2(V_2)=\{1\}$ y $\operatorname{supp} g_2\subset U_2$.

De forma recursiva, para $\ell\in\{3,\dots,n-1\}$ definimos

$$K_\ell := \left(K\backslash \bigcup_{i=\ell+1}^{n} U_i\right)\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{\ell-1} V_i\right) ,$$

el cual, es un conjunto compacto contenido en U_ℓ. Además, existe una vecindad abierta V_ℓ de K_ℓ y una función $g_\ell\in C_b(X)$, tales que, $V_\ell\subset U_\ell$, $0\leqslant g_\ell\leqslant\mathscr{X}_X$, $g_\ell(V_\ell)=\{1\}$ y $\operatorname{supp} g_\ell\subset U_\ell$.

Finalmente definimos el conjunto

$$K_n := K\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i\right)$$

el cual es un conjunto compacto contenido en U_n. En efecto, si $x\in K_n\backslash U_n$, entonces $x\in (K\backslash U_n)\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n-2} V_i\right) = K_{n-1}\subset V_{n-1}$, llegando a una contradicción, pues $K_n\cap V_{n-1}=\emptyset$.

Aplicando el lema 2.4.1, obtenemos la existencia de una función $g_n\in C_b(X)$, tal que, $g_n(K_n)=\{1\}$ y $\operatorname{supp} g_n\subset U_n$. Ya que $K\subset K_n\cup\bigcup_{i=1}^{n-1}V_i$, la función $\sum_{i=1}^n g_i$ es mayor o igual a 1 en cada punto de K. La función $g:=\min\{1,\sum_{i=1}^n g_i\}$ pertenece a $C_b(X)$ y satisface $0\leqslant g\leqslant\mathscr{X}_X$ y $g(K)=\{1\}$. Luego, el conjunto

$$U=\{x\in X : g(x)>1/4\}=\{x\in X : \sum_{i=1}^{n} g_i(x)>1/4\}$$

es una vecindad abierta de K. Tomamos una función continua $t:[0,1]\to[0,1]$ tal que, $t(\left[0,\frac{1}{3}\right])=\{0\}$ y $t(\left[\frac{2}{3},1\right])=\{1\}$. Así, la función $h:=t\circ g$ pertenece a $C_b(X)$ y satisface: $0\leqslant h\leqslant\mathscr{X}_X$, $h(K)=\{1\}$ y $h(\{x\in X : g(x)<1/3\})=\{0\}$. Luego $\operatorname{supp} h\subset U$, en efecto, si $y\notin U$, entonces $V:=\{x\in X : g(x)<1/3\}$ es una vecindad abierta de y, para la cual, $h(V) = \{0\}$ y de aquí $V \cap \{x \in X : h(x) \neq 0\} = \emptyset$. Por lo tanto $y \notin \operatorname{supp} h$. Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos la función f_i por

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x) g_i(x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} & , \text{ si } x \in U \\ 0 & , \text{ si } x \in X \backslash U \ . \end{cases}$$

Para finalizar la demostración, resta probar que $f_i \in C_b(X)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. La función f_i es acotada, pues $f_i \leqslant h$. Ya que $\frac{h \cdot g_i}{\sum_{i=1}^n g_i}|_U : U \to \mathbb{R}$ es una función continua y como U es un conjunto abierto en X, se tiene que f_i es continua en cada punto de U. Si $y \in X \backslash U$, entonces $h(y) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, $U := \{x \in X : h(x) < \varepsilon\}$ es una vecindad de y. Como $|f_i(x)| \leqslant h(x) < \varepsilon$ para cualquier $x \in U$, se concluye que f_i es continua en y. De este modo $f_i \in C_b(X)$. $\square$

Teorema 2.4.3. *El espacio $C_b(X) \otimes E$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-denso en $C_b(X, E)$.*

Demostración. Sean $f \in C_b(X, E)$, $p \in s(E)$, $v \in V_{\mathcal{P}}$ y $\varepsilon > 0$. Existe $K \in \mathcal{P}$ tal que: $\|v\|_{X \backslash K} \leqslant \varepsilon / (2\|f\|_p + 1)$. Notemos que

$$f(K) \subset \bigcup_{x \in K} \left\{ e \in E : p(e - f(x)) < \frac{\varepsilon}{\|v\| + 1} \right\} .$$

Por la continuidad de f, tenemos que $f(K)$ es un subconjunto compacto de E. Luego existen $x_1, \dots, x_n$ elementos de K, tales que,

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ e \in E : p(e - f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{\|v\| + 1} \right\} .$$

Definimos

$$U_i = f^{-1} \left(\left\{ e \in E : p(e - f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{\|v\| + 1} \right\} \right)$$

y obtenemos que la colección de abiertos $\{U_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, es un cubrimiento finito de K. Por 2.4.2, para cada $i = 1, \dots, n$, existen funciones continuas $g_i : X \to [0, 1]$ tales que: $\operatorname{supp}(g_i) \subset U_i$, $0 \leqslant \sum_{i=1}^n g_i \leqslant \mathscr{X}_X$ y $\sum_{i=1}^n g_i(V) = \{1\}$, para algún V subconjunto abierto de X que contiene a K. Luego:

$$\|f-\sum_{i=1}^{n} g_i\otimes f(x_i)\|_{p,v} = \sup_{x\in X} v(x)p\left(f(x)-\sum_{i=1}^{n} g_i(x)f(x_i)\right)$$

$$= \text{máx}\left\{\sup_{x\in X\setminus K} v(x)p\left(f(x)-\sum_{i=1}^{n} g_i(x)f(x_i)\right), \sup_{x\in K} v(x)p\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)(f(x)-f(x_i))\right)\right\}$$

$$\leqslant \text{máx}\left\{\|v\|_{X\setminus K}\cdot\sup_{x\in X\setminus K} p(f(x))+\sum_{i=1}^{n}|g_i(x)|p(f(x_i)),\ \|v\|\sup_{x\in K}\sum_{i=1}^{n}|g_i(x)|p(f(x)-f(x_i))\right\}$$

$$\leqslant \text{máx}\left\{\frac{\varepsilon}{2\|f\|_p+1}\cdot\left(\|f\|_p+\sup_{x\in X}\sum_{i=1}^{n}|g_i(x)|\|f\|_p\right), \|v\|\sup_{x\in K}\sum_{i=1}^{n}|g_i(x)|\frac{\varepsilon}{\|v\|+1}\right\}$$

$$\leqslant \text{máx}\left\{\frac{\varepsilon\cdot 2\|f\|_p}{2\|f\|_p+1}, \frac{\|v\|\varepsilon}{\|v\|+1}\right\}\leqslant\varepsilon\ .$$

□

2.5. Propiedades topológicas de $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$.

En esta sección se estudian condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ sea bornológico, barrelado, cuasibarrelado entre otros. En el anexo C, se demuestran las distintas definiciones equivalentes de estos espacios, que ocuparemos en este documento.

Proposición 2.5.1. *Si L es un subespacio topológicamente complementado de E y E es ultrabornológico, entonces, L es ultrabornológico.*

Demostración. Sea $T:E\to L$ una proyección continua tal que $T|_L=Id_L$. Supongamos que E es un espacio ultrabornológico. Es suficiente probar que cada seminorma p en L es continua si ésta es acotada en cada subconjunto absolutamente convexo compacto de L. Esto por C.3.8. Notemos que $p\circ T$ es una seminorma en E que coincide con p en L y que es continua en E ya que ésta es acotada en cada subconjunto absolutamente convexo compacto de L. Luego $p=p\circ T|_L$ es continua. □

Observación 2.5.2. *Si L es un subespacio topológicamente complementado de E y E es bornológico (respectivamente barrelado)(resp. cuasibarrelado), entonces, L es bornológico (resp. barrelado)(resp. cuasibarrelado).*

Para mostrar esto, se ocupan argumentos análogos a los empleados en 2.5.1. En efecto, si E es un espacio:

(a) bornológico,

(b) barrelado,

(c) cuasibarrelado,

basta reemplazar en la demostración de 2.5.1 la condición "cada seminorma p en L es continua, si es acotada en cada subconjunto absolutamente convexo compacto de L" por: "cada seminorma p en L es continua, si:

(a) es acotada en cada subconjunto acotado de L",

(b) es semi-continua inferiormente en L",

(c) es semi-continua inferiormente en L y acotada en cada subconjunto acotado de L",

respectivamente, y en lugar de ocupar el teorema C.3.8, se ocupa el teorema:

(a) C.3.2,

(b) C.1.10,

(c) C.1.7,

respectivamente.

Proposición 2.5.3. *Si L es un subespacio topológicamente complementado de E y E es un (DF)-espacio, entonces, L es un (DF)-espacio.*

Demostración. Sea $T : E \to L$ una proyección continua tal que $T|_L = Id_L$. Supongamos que E es un (DF)-espacio (ocuparemos la definición C.2.6). Notemos que si $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema fundamental de acotados en E, entonces $\{L \cap B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema fundamental de acotados en L. Por otro lado, sea $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de seminormas continuas en L, tal que, $q = \sup_{n\in\mathbb{N}} q_n$ es una seminorma en L acotada en los subconjuntos acotados de L. Luego, $(q_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de seminormas continuas en L, tal que, $q \circ T = \sup_{n\in\mathbb{N}} q_n \circ T$ es una seminorma en E acotada en los subconjuntos acotados de E. Luego, $q \circ T$ es una seminorma continua en E y de aquí $q \circ T|_L = q$ es una seminorma continua en L. □

Presentaremos la siguiente definición, tomada de [22, página 86].

Definición 2.5.4. *Una sucesión $\underline{e} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E es* ***absolutamente sumable*** *si para cada $p \in s(E)$, se tiene que:*

$$\pi_p(\underline{e}) := \sum_{n=1}^{\infty} p(e_n) < \infty.$$

El espacio de todas las sucesiones en E absolutamente sumables se denotará por $\ell^1(E)$ y se equipará con la topología $\pi := \sigma(\ell^1(E), \{\pi_p : p \in s(E)\})$.

Diremos que ***E tiene la propiedad (B)*** *si para cada $\mathscr{B} \subset \ell^1(E)$, π-acotado, existe $B \subset E$, τ_E-acotado absolutamente convexo, tal que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_B(e_n) \leqslant 1 \quad \forall (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{B}$$

donde $p_B : \mathrm{span}(B) \to \mathbb{R}$ es la funcional de Minkowski de B.

Proposición 2.5.5. *Supongamos que X no es finito. El espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es cuasibarrelado (respectivamente barrelado) si y solo si $X \in \mathcal{P}$, E es cuasibarrelado (respectivamente barrelado) y E'_b tiene la propiedad (B).*

Demostración. Si $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es cuasibarrelado (resp. barrelado), entonces por 2.5.2 junto con 2.3.7, $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ y E son cuasibarrelados (resp. barrelados). Como $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ y $(C_b(X),\tau_{\|\cdot\|})$ poseen los mismos conjuntos acotados (esto por 2.2.2), el conjunto $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$ es un barrel bornivoro de $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$. Por lo tanto $\gamma_{\mathcal{P}} = \tau_{\|\cdot\|}$. Aplicando el corolario 2.1.6 concluimos que $X \in \mathcal{P}$.

Luego, por [22, iv.6.6,$(a) \Rightarrow (c)$] se obtiene que E'_b posee la propiedad (B).

Ahora supongamos que $X \in \mathcal{P}$, E es cuasibarrelado (resp. barrelado) y E'_b tiene la propiedad (B). En este caso X es compacto. Luego, por [22, iv.6.6,$(c) \Rightarrow (b)$] (resp. por [22, iv.7.7,$(c) \Rightarrow (b)$]) el espacio $(C_b(X,E),\tau_{K(X)})$ (el cual en [22] es denotado por $C_c(K,E)$, donde $K = X$) es cuasibarrelado (resp. barrelado). Finalmente, por 2.1.7.g, concluimos que $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es cuasibarrelado (resp. barrelado). $\square$

Corolario 2.5.6. *Si X no es finito y el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es bornológico (respectivamente ultrabornológico), entonces $X \in \mathcal{P}$, E es bornológico (respectivamente ultrabornológico) y E'_b tiene la propiedad (B).*

Demostración. Por 2.5.2 (resp. 2.5.1) junto a 2.3.7, E es bornológico (resp. ultrabornológico). Si $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es bornológico o ultrabornológico, entonces es cuasibarrelado y como X no es finito, por 2.5.5, se obtiene el resultado. $\square$

Proposición 2.5.7. *El espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es un (DF)-espacio si y solo si E es un (DF)-espacio y toda unión numerable de elementos de $\mathcal{P}$ está contenida en algún elemento de $\mathcal{P}$.*

Demostración. Supongamos que $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es un (DF)-espacio. Por 2.5.3 junto con 2.3.7, $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ y E son (DF)-espacios. Por [16, 9.5.2] se tiene que $\gamma_{\mathcal{P}} = \tau_{\mathcal{P}}$ y de aquí toda unión numerable de elementos de $\mathcal{P}$ está contenida en algún elemento de $\mathcal{P}$ (esto por 2.1.4.c).

Supongamos ahora que E es un (DF)-espacio y que toda unión numerable de elementos de $\mathcal{P}$ está contenida en algún elemento de $\mathcal{P}$. Nuevamente por 2.1.4.c, tenemos que $\gamma_{\mathcal{P}} = \tau_{\mathcal{P}}$ y aplicando [16, 9.5.2] junto con [22, iv.9.2,(a)] se obtiene que $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es un (DF)-espacio. $\square$

Proposición 2.5.8. *El espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es un (gDF)-espacio si y solo si E es un (gDF)-espacio.*

Demostración. La prueba de este resultado, está ámpliamente desarrollada en [23]. $\square$

A continuación estudiaremos la separabilidad del espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$. Presentaremos la siguiente definición, tomada de [31, página 8].

Definición 2.5.9. *Un espacio topológico $\mathcal{X}$ es llamado* ***separablemente submetrizable*** *si la topología en $\mathcal{X}$ es más fina que una topología metrizable y separable en $\mathcal{X}$.*

Equivalentemente, $\mathcal{X}$ es separablemente submetrizable, si y solo si, existe una función continua e inyectiva en $\mathcal{X}$ con valores en un espacio métrico separable.

El siguiente resultado fue extraído de [25, Theorem 2.1, página 509].

Proposición 2.5.10. *El espacio $(C_b(X),\gamma_0)$ es separable si y solo si X es separablemente submetrizable.*

Proposición 2.5.11. *Las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

(a) *X es separablemente submetrizable y E es separable.*

(b) *$(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es separable.*

(c) *$(C_b(X,E),\delta)$ es separable.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Por la proposición anterior el espacio $(C_b(X),\gamma_0)$ es separable, y de aquí, $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ también es separable, pues $\gamma_{\mathcal{P}} \leqslant \gamma_0$. Como el producto de dos espacios separables es separable, tenemos que $C_b(X) \times E$ con la topología producto es separable. Consideremos la aplicación lineal $L : C_b(X) \times E \to C_b(X) \otimes E$, definida por $L(f,e) := f \otimes e$. Si el espacio $C_b(X) \otimes E$ está equipado con la topología de subespacio inducida por $\beta_{\mathcal{P}}$, entonces L es continua. En efecto, sea $(f_\alpha, e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en $C_b(X) \times E$ convergente a $(0,0)$. Luego $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red $\gamma_{\mathcal{P}}$-convergente a 0 y $(e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en E convergente a 0. Sean $v \in V_{\mathcal{P}}$ y $p \in s(E)$. Para $\alpha \in \Lambda$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|f_\alpha \otimes e_\alpha\|_{v,p} &= \sup_{x\in X} v(x)p(f_\alpha(x)e_\alpha) \\ &= \sup_{x\in X} v(x)|f_\alpha(x)|p(e_\alpha) \\ &= \|f_\alpha\|_v \cdot p(e_\alpha) \end{aligned}$$

concluyendo así que $(f_\alpha \otimes e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-convergente a $(0,0)$ en $C_b(X)\times E$. Por lo tanto L es continua. De este modo, podemos afirmar que $L(C_b(X)\times E)$ es separable y del hecho que span $L(C_b(X)\times E) = C_b(X)\otimes E$, se deduce que $C_b(X)\otimes E$ es separable. Ya que $C_b(X)\otimes E$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-denso en $C_b(X,E)$ (2.4.3), tenemos que (b) se satisface.

$(b) \Rightarrow (c)$: Es evidente.

$(c) \Rightarrow (a)$: Por el resultado 2.3.9, sabemos que E y $(C_b(X),\gamma_{A(X)})$ son espacios separables. Sea $D := \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto $\gamma_{A(X)}$-denso en $C_b(X)$. La colección D separa puntos en X. En efecto, sean $x,y\in X$, distintos. Supongamos que $f_m(x) = f_m(y)$, para cada $m\in\mathbb{N}$. Como X es Hausdorff completamente regular, existe $g\in C_b(X)$, tal que, $g(x)=1$ y $g(y)=0$. Ya que $pw = \tau_{A(X)} \leqslant \gamma_{A(X)}$, se tiene que D es pw-denso en $C_b(X)$. Luego, existe $n\in\mathbb{N}$, tal que, $|1-f_n(x)| = |g(x)-f_n(x)| < \frac{1}{4}$ y $|f_n(x)| = |f_n(y)| = |g(y)-f_n(x)| < \frac{1}{4}$, lo que es imposible. Por lo tanto D separa puntos en X. Mostraremos que la topología en X es más fina que alguna topología metrizable. Por lo anterior la función $d: X\times X\to\mathbb{R}$, definida por,

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{2^n(1+|f_n(x)-f_n(y)|)}$$

es una métrica en X. Notemos que la topología τ_d generada por d es la topología vectorial menos fina en X que hace continua a cada función f_n, con $n\in\mathbb{N}$. Luego, τ_d es menos fina que la topología en X. Finalicemos la demostración mostrando que (X,τ_d) es separable. En efecto, los subconjuntos de X de la forma:

$$\bigcap_{k=1}^{m} f_{n_k}^{-1}(z_k - r_k, z_k + r_k)$$

donde $m\in\mathbb{N}$, $\{z_1,\ldots,z_m,r_1,\ldots,r_m\}\subset\mathbb{Q}$ y $r_i>0, i=1,\ldots,m$, forman una base numerable para la topología τ_d. Luego, aplicando el teorema de Kakutani, se satisaface (a). $\square$

Proposición 2.5.12. *Si una unión numerable de elementos de $\mathcal{P}$ es denso en X y E es metrizable, entonces $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es un espacio angelical.*

Demostración. Por C.4.5 el espacio $(C(X,E),pw)$ de las funciones continuas en X con valores en E, equipado con la topología de convergencia puntual, es angelical.

Consideremos la inclusión canónica $i : C_b(X, E) \to C(X, E)$. Ya que los espacios vectoriales topológicos son regulares, por C.4.2 tenemos que, el espacio $(C_b(X, E), pw)$ es angelical. Como, $pw \leqslant \tau_{\mathcal{P}} \leqslant \beta_{\mathcal{P}}$, la identidad $id : C_b(X, E) \to C_b(X, E)$ es $(\beta_{\mathcal{P}}, pw)$-continua. Nuevamente por C.4.2, tenemos que $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ es un espacio angelical. □

2.6. Completitud y compacidad en $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$.

En esta sección estudiaremos condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ sea completo, cuasicompleto y secuencialmente completo. Además daremos una caracterización de los conjuntos relativamente $\beta_{\mathcal{P}}$-compactos.

Para presentar los resultados de completitud, necesitamos desarrollar algunos lemas y definiciones previas.

Lema 2.6.1. *(Teorema de extensión para un espacio Hausdorff completamente regular.)*

Sean X un espacio Hausdorff completamente regular y K un subespacio compacto de X. Cada función $f : K \to \mathbb{R}$ continua, tiene una extensión $F : X \to \mathbb{R}$ continua, tal que, $\sup\{|f(x)| : x \in K\} = \sup\{|F(x)| : x \in X\}$.

Demostración. Podemos identificar X con un subespacio topológico de su compactificación de Stone-Čech βX, y por lo tanto, podemos identificar K con un subespacio compacto de βX. Ya que βX es un espacio normal, por el teorema de extensión de Tietze, existe una función continua $G : \beta X \to \mathbb{R}$, tal que, $G|_K = f$ y $\sup\{|f(x)| : x \in K\} = \sup\{|G(x)| : x \in \beta X\}$. Luego, basta considerar la función $F = G|_X$, la cual cumple los requisitos. □

Lema 2.6.2. *Supongamos que $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red en $C_b(X, E)$ la cual es pw-convergente a una función $f : X \to E$.*

(a) Si la red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es τ_u-Cauchy, entonces, es τ_u-convergente a f y $f \in C_b(X, E)$.

(b) Si la red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-Cauchy, entonces, es $\beta_{\mathcal{P}}$-convergente a f, $f \in B(X, E)$ y para todo $K \in \mathcal{P}$, $f|_K : K \to E$ es continua.

(c) *Si la red* $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *es* $\tau_{\mathcal{P}}$*-Cauchy, entonces, dados* $p \in s(E)$*,* $K \in \mathcal{P}$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe* $\alpha_0 \in \Lambda$*, tal que:* $\|f_\alpha - f\|_{p,K} < \varepsilon$*, para cada* $\alpha \geqslant \alpha_0$*. Además, para todo* $K \in \mathcal{P}$*,* $f|_K : K \to E$ *es continua.*

Demostración. (a) Dados $p \in s(E)$ y $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$, tal que: $\|f_\alpha - f_\beta\|_p < \varepsilon$, para cada $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Por B.1, se tiene que $\|f_\alpha - f\|_p < \varepsilon$, para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$, lo que implica que $\|f\|_p \leqslant \|f_\alpha\|_p + \varepsilon < \infty$. Aplicando B.2 se tiene que $p \circ f$ es continua. Ahora por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ y de $p \in s(E)$ se concluye que, la red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es τ_u-convergente a f y que $f \in C_b(X,E)$.

(c) Dados $p \in s(E)$, $K \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$, tal que: $\|f_\alpha - f_\beta\|_{p,K} < \varepsilon$, para cada $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Por el resultado B.1, se tiene que $\|f_\alpha - f\|_{p,K} < \varepsilon$, para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Aplicando B.2, se tiene que $p \circ f|_K$ es continua. Ahora por la arbitrariedad de $p \in s(E)$ y de $K \in \mathcal{P}$ se concluye que, para cada $K \in \mathcal{P}$, $f|_K$ es continua.

(b) Dado $x \in X$, se tiene que:

$$\begin{aligned} v(x)p(f_\alpha(x) - f(x)) &\leqslant v(x)p(f_\alpha(x) - f_\beta(x)) + v(x)p(f_\beta(x) - f(x)) \\ &\leqslant \|v\|\|f_\alpha - f_\beta\|_{p,v} + \|v\|p(f_\beta(x) - f(x)) \ , \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\alpha_0 \in \Lambda$, que satisface:

$$v(x)p(f_\alpha(x) - f(x)) \leqslant \varepsilon + \|v\|p(f_\beta(x) - f(x)) \ ,$$

cualquiera sea $x \in X$ y $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Consideremos $y \in X$ fijo. Para $r > 0$, existe $\beta_0 \in \Lambda$, $\beta_0 \geqslant \alpha_0$, talque: $\|v\|p(f_{\beta_0}(y) - f(y)) \leqslant r$. De este modo, $v(y)p(f_\alpha(y) - f(y)) \leqslant \varepsilon + r$, donde $r > 0$ es arbitrario, por lo que $v(y)p(f_\alpha(y) - f(y)) \leqslant \varepsilon$. Como $y \in X$ es arbitrario, se concluye que $\|f_\alpha - f\|_{p,v} \leqslant \varepsilon$, para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$. Esto implica que $\|f\|_{p,v} \leqslant \|f_\alpha\|_{p,v} + \varepsilon < \infty$. Por la arbitrariedad de $p \in s(E)$ y de $v \in V_{\mathcal{P}}$, junto al resultado 2.2.2, se concluye que $f \in B(X,E)$. Además, por la arbitrariedad de $p \in s(E)$, $v \in V_{\mathcal{P}}$ y de $\varepsilon > 0$, se muestra la $\beta_{\mathcal{P}}$-convergencia de la red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ a la función f. Por lo tanto, la red es $\tau_{\mathcal{P}}$-convergente a f, y aplicando (c), se concluye el resultado. $\square$

Consideremos un espacio topológico $\mathcal{X}$ y un cubrimiento P de $\mathcal{X}$.

Definición 2.6.3. *Un espacio topológico $\mathcal{X}$ es un **K_P-espacio** si satisface la condición: $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ es continua, si y solo si, para todo $D\in P$, la restricción $f|_D$ es continua.*

Lema 2.6.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{X}$ es un K_P-espacio.

(b) Para cada función $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ de rango acotado, se tiene que, f es continua, si y solo si, para todo $D\in P$, la restricción $f|_D$ es continua.

Demostración. Es evidente que $(a)\Rightarrow(b)$. Mostremos ahora que $(b)\Rightarrow(a)$. Supongamos que se verifica (b). Sea $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ una función tal que, para cada $D\in P$, la restricción $f|_D$ es continua. Al considerar el homeomorfismo $g:\mathbb{R}\to(-1,1)$, $g(x)=x/(1+|x|)$, la función $g\circ f$ es de rango acotado, tal que, para cada $D\in P$, la restricción $g\circ f|_D$ es continua. Por hipótesis, $g\circ f$ es continua y de aquí $f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ es continua. $\square$

Proposición 2.6.5. *El espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es completo (respectivamente cuasicompleto) si y solo si X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio y E es completo (respectivamente cuasicompleto).*

Demostración. Supongamos que el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es completo (resp. cuasicompleto). Por el corolario 2.3.8, los espacios E y $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ son completos (resp. cuasicompletos). Sea $f:X\to\mathbb{R}$ una función de rango acotado, tal que, para cada $K\in\mathcal{P}$, la restricción $f|_{K}$ es continua. Por el teorema de extensión 2.6.1, para cada $K\in\mathcal{P}$, existe una extensión $g_{K}\in C_b(X)$ de $f|_{K}$, tal que, $\sup\{|f|_{K}(x)|:x\in K\}=\|g_{K}\|$. Ya que $\mathcal{P}$ es dirigido con la relación $\subset$, podemos considerar la red $(g_{K})_{K\in\mathcal{P}}$, la cual es $\tau_{\mathcal{P}}$-Cauchy.

Como las topologías $\gamma_{\mathcal{P}}$ y $\tau_{\mathcal{P}}$ coinciden en el conjunto $\{g\in C_b(X):\|g\|\leqslant\|f\|\}$ (2.2.3), se concluye que $(g_{K})_{K\in\mathcal{P}}$ es una red $\gamma_{\mathcal{P}}$-Cauchy y por lo tanto, es $\gamma_{\mathcal{P}}$-convergente a una función $h\in C_b(X)$. Ya que $(g_{K})_{K\in\mathcal{P}}$ es una red τ_p-convergente a h, dados $\widehat{K}\in\mathcal{P}$ y $\varepsilon>0$, existe $K_0\in\mathcal{P}$, $K_0\supset\widehat{K}$ tal que, $\|g_K-h\|_{\widehat{K}}=\|f-h\|_{\widehat{K}}<\varepsilon$, para cada $K\supset K_0$. Por la arbitrariedad de $\varepsilon>0$, se deduce que $f|_{\widehat{K}}=h|_{\widehat{K}}$ y por la arbitrariedad de $\widehat{K}$ se tiene que $f=h\in C_b(X)$. Finalmente aplicando el lema 2.6.4, X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio.

Recíprocamente, supongamos que X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio y E es completo (resp. cuasicompleto). Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red $\beta_{\mathcal{P}}$-Cauchy en $C_b(X,E)$. Luego es pw-Cauchy. Debido a la completitud de E, podemos definir la función $f : X \to E$, $f(x) = \lim f_\alpha(x)$. Aplicando el resultado 2.6.2.b obtenemos que $f \in B(X,E)$, y para cada $K \in \mathcal{P}$, la restricción $f|_K$ es continua. Además, se tiene que la red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-convergente a f. Para $p \in s(E)$ la función $p \circ f|_K$ es continua para cada $K \in \mathcal{P}$, por lo que, la función $p\circ f$ es continua, pues X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio. Por la arbitrariedad de $p \in s(E)$ se concluye que $f \in C_b(X,E)$. □

Definición 2.6.6. *Un espacio Hausdorff completamente regular X es un **P-espacio** si todo elemento de $\mathcal{Z}$ es abierto.*

Lema 2.6.7. *El espacio X es un P-espacio, si y solo si, todo subconjunto de X de tipo G_δ es abierto.*

Demostración. Supongamos que X es un P-espacio. Sea $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es un subconjunto abierto de X. Puesto que todo subconjunto unitario de X es cerrado, dados $x \in U$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in C_b(X)$, tal que, $0 \leqslant f_n \leqslant \mathscr{X}_X$, $f_n(x) = 0$ y $f_n(X \backslash U_n) = \{1\}$. Luego $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(\{0\}) \subset U$, donde $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(\{0\})$ es un conjunto abierto, esto por 1.3.2.2 y por hipótesis. De este modo se concluye que U es vecindad de cada uno de sus elementos.

Ahora supongamos que todo subconjunto de X de tipo G_δ es abierto. Sea $f \in C_b(X)$.

Como el conjunto $f^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X : |f(x)| < 1/n\}$, entonces éste será un conjunto abierto. Por lo tanto X es un P-espacio. □

Proposición 2.6.8. *El espacio $(C_b(X),\gamma_{A(X)})$ es secuencialmente completo si y solo si X es un P-espacio.*

Demostración. Supongamos que $(C_b(X),\gamma_{A(X)})$ es secuencialmente completo. Consideremos $Z \in \mathcal{Z}$ y $f \in C_b(X)$ tal que $Z = f^{-1}(\{0\})$ y $0 \leqslant f \leqslant \mathscr{X}_X$. Notemos que la sucesión $((1-f)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es pw-convergente a $\mathscr{X}_Z$ y por 2.2.3 es $\gamma_{A(X)}$-Cauchy. Luego, por hipótesis, se tiene que $\mathscr{X}_Z \in C_b(X)$ y de aquí se concluye que Z es abierto. Por lo tanto X es un P-espacio.

Ahora supongamos que X es un P-espacio. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\gamma_{A(X)}$-Cauchy en $C_b(X)$. Podemos definir la función $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim f_n(x)$. Aplicando la proposición 2.6.2.b, se tiene que $f \in B(X)$ y que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\gamma_{A(X)}$-convergente a f. Basta probar que f es continua. Para esto, elijamos $x \in X$ arbitrario.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una vecindad abierta V_n de x, tal que, para cada $y \in V_n$, $|f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. Ya que X es un P-espacio, por 2.6.7 tenemos que $V = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$ es una vecindad de x, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, y para cada $y \in V$, $|f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. De este modo, para cada $y \in V$, se tiene que:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< |f(x) - f_n(x)| + \varepsilon/3 + |f_n(y) - f(y)|\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon/3$ y $|f_{n_0}(y) - f(y)| < \varepsilon/3$, mostrando así que f es continua en x. Por lo tanto, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\gamma_{A(X)}$-convergente en $C_b(X)$. □

En lo que sigue, denotaremos por $\mathbf{\Gamma}$ a la colección de todas las familias $\mathcal{P} \subset K(X)$ tales que: $X = \bigcup\{K : K \in \mathcal{P}\}$ y para cada par de elementos K_1 y K_2 de $\mathcal{P}$ existe un elemento K_3 en $\mathcal{P}$, tal que, $K_1 \cup K_2 \subset K_3$.

Proposición 2.6.9. *Si E es secuencialmente completo y X es un P-espacio, entonces, para cada $\mathcal{P} \in \Gamma$, el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es secuencialmente completo.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} \in \Gamma$ y consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\beta_{\mathcal{P}}$-Cauchy en $C_b(X,E)$. Ya que E es secuencialmente completo, podemos definir la función $f : X \to E$, $f(x) = \lim f_n(x)$. Por proposición 2.6.2.b, se obtiene que $f \in B(X,E)$, y que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-convergente a f. Resta probar que f es continua. Para esto, elijamos $x \in X$ arbitrario. Por la continuidad de las funciones f_n, por el lema 2.6.7 y por le mismo argumento ocupado en 2.6.8, dados $\varepsilon > 0$ y $p \in s(E)$, existe una vecindad V de x, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, y para cada $y \in V$, $p(f_n(y) - f_n(x)) < \varepsilon/3$. Para cada $y \in V$, se tiene que:

$$\begin{aligned}p(f(x) - f(y)) &\leqslant p(f(x) - f_n(x)) + p(f_n(x) - f_n(y)) + p(f_n(y) - f(y)) \\ &< p(f(x) - f_n(x)) + \varepsilon/3 + p(f_n(y) - f(y))\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Elejimos $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$p(f(x) - f_{n_0}(x)) < \varepsilon/3 \quad \text{y} \quad p(f_{n_0}(y) - f(y)) < \varepsilon/3.$$

De este modo f es continua en x, y de aquí, se deduce que $f \in C_b(X,E)$. $\square$

Proposición 2.6.10. *El espacio $(C_b(X,E),\delta)$ es secuencialmente completo, si y solo si, E es secuencialmente completo y X es un P-espacio.*

Demostración. Si $(C_b(X,E),\delta)$ es secuencialmente completo, entonces E y $(C_b(X),\gamma_{A(X)})$ son espacios secuencialmente completos, pues son subespacios δ-cerrados de $C_b(X,E)$ (2.3.7). Luego, por 2.6.8, X es un P-espacio. El recíproco es inmediato de 2.6.9. $\square$

Corolario 2.6.11. *Si $(C_b(X,E),\delta)$ es secuencialmente completo, entonces, para cada $\mathcal{P} \in \Gamma$, el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es secuencialmente completo.*

Demostración. Es consecuencia de 2.6.10 y 2.6.9. $\square$

Los resultados 2.6.9, 2.6.10 y 2.6.11 fueron presentados por J. Zafarani en [31]. Fortaleceremos este resultado mostrando un ejemplo, en el cual, existe $\mathcal{P} \in \Gamma$ tal que, el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es secuencialmente completo y sin embargo, el espacio $(C_b(X,E),\delta)$ no es secuencialmente completo. Para realizar esta tarea, necesitamos desarrollar el siguiente resultado.

Proposición 2.6.12.

(a) Si X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio y E es secuencialmente completo, entonces, para cada $\mathcal{P}_1 \in \Gamma$, tal que $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}$, el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}_1})$ es secuencialmente completo.

(b) Si $\mathcal{P}$ posee una subfamilia cofinal numerable y $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es secuencialmente completo, entonces, el espacio X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio y E es secuencialmente completo.

Demostración. (a) Notemos que para $\mathcal{P}_1 \in \Gamma$, tal que $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}$, X es también un $K_{\mathcal{P}_1}$-espacio. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\beta_{\mathcal{P}_1}$-Cauchy en $C_b(X,E)$. Como E es secuencialmente completo, podemos definir la función $f : X \to E$, $f(x) = \lim f_n(x)$.

Por proposición 2.6.2.b, se obtiene que $f \in B(X,E)$, y que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\beta_{\mathcal{P}_1}$-convergente a f. Además, para cada $K \in \mathcal{P}_1$, la restricción $f|_K$ es continua. Ya que X es un $K_{\mathcal{P}_1}$-espacio, se deduce que $f \in C_b(X,E)$.

(b) Ahora supongamos que $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es secuencialmente completo y que $\mathcal{K} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto cofinal de $\mathcal{P}$. Ya que E y $(C_b(X),\gamma_{\mathcal{P}})$ son subespacios cerrados de $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$, se deduce que son secuencialmente completos.

Para mostrar que X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio podemos considerar una subfamilia $\mathcal{Q} = \{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{K}$, definida como sigue: $Q_1 = K_1$, y para $n \geqslant 2$, se define en forma recursiva $Q_n \in \mathcal{K}$, tal que $Q_{n-1}, K_n \subset Q_n$, esto es posible porque $\mathcal{P}$ es dirigido y $\mathcal{K}$ es cofinal. De este modo $\mathcal{Q}$ es totalmente ordenado, dirigido y cofinal en $\mathcal{P}$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función de rango acotado, tal que, para cada $K \in \mathcal{P}$, la restricción $f|_K$ es continua. Por el teorema de extensión 2.6.1, para cada $Q_n \in \mathcal{Q}$, existe una extensión $g_n \in C_b(X)$ de $f|_{Q_n}$, tal que, $\sup\{|f|_{Q_n}(x)| : x \in Q_n\} = \|g_n\|$.

Consideremos la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la cual es $\tau_{\mathcal{P}}$-Cauchy. En efecto, dado $K \in \mathcal{P}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $Q_m, Q_n \supset K$ para $m,n \geqslant n_0$. Luego, $\|g_m - g_n\|_K = \|f - f\|_K = 0$ para $m,n \geqslant n_0$. Como las topologías $\gamma_{\mathcal{P}}$ y $\tau_{\mathcal{P}}$ coinciden en el conjunto $\{g \in C_b(X) : \|g\| \leqslant \|f\|\}$ (2.2.3), se concluye que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\gamma_{\mathcal{P}}$-Cauchy y por lo tanto, es $\gamma_{\mathcal{P}}$-convergente a una función $h \in C_b(X)$.

Dados $\widehat{K} \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $Q_{n_0} \supset \widehat{K}$, y $\|g_n - h\|_{\widehat{K}} = \|f - h\|_{\widehat{K}} < \varepsilon$, para cada $Q_n \supset Q_{n_0}$, esto es, para cada $n \geqslant n_0$. Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, se deduce que $f|_{\widehat{K}} = h|_{\widehat{K}}$ y por la arbitrariedad de $\widehat{K}$ se tiene que $f = h \in C_b(X)$.

Finalmente aplicando el lema 2.6.4, se concluye que X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio. $\square$

Observación 2.6.13. *En general, el hecho que exista $\mathcal{P} \in \Gamma$, tal que $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ sea secuencialmente completo, no implica que $(C_b(X,E),\delta)$ sea secuencialmente completo.*

Demostración. Supongamos que $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{[-n,n] : n \in \mathbb{N}\}$ y E es un espacio Hausdorff, localmente convexo y secuencialmente completo. Luego X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio.

Aplicando el resultado 2.6.12.a, se obtiene que $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ es secuencialmente completo. Sin embargo, X no es un P-espacio. De este modo, por 2.6.10, se concluye que $(C_b(X, E), \delta)$ no es secuencialmente completo. $\square$

A continuación, presentamos una caracterización del tipo Arzela-Ascoli de los subconjuntos relativamente $\beta_{\mathcal{P}}$-compactos de $C_b(X, E)$. Además, generalizaremos una de las condiciones necesarias y suficientes presentadas en la proposición 4.5 de [31].

Proposición 2.6.14. *Supongamos que X es un $K_{\mathcal{P}}$-espacio y que E es cuasicompleto. Un subconjunto H de $C_b(X, E)$ es relativamente $\beta_{\mathcal{P}}$-compacto, si y solo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) H es τ_u-acotado.

(b) $H|_K := \{f|_K : f \in H\}$ es equicontinuo, para cada $K \in \mathcal{P}$.

(c) Para cada $x \in X$, el conjunto $H(x) = \{f(x) : f \in H\} \subset E$ es relativamente compacto.

Demostración. Supongamos que H es relativamente $\beta_{\mathcal{P}}$-compacto. Por la proposición 2.2.2 se deduce que H es τ_u-acotado. Ya que $\tau_{\mathcal{P}} \leqslant \beta_{\mathcal{P}}$, aplicando el teorema A.2, obtenemos que la $\tau_{\mathcal{P}}$-clausura de H es $\tau_{\mathcal{P}}$-precompacto, y de aquí, H también es $\tau_{\mathcal{P}}$-precompacto. De este modo, por el teorema de Ascoli (A.1), se tiene que, $H|_K$ es equicontinuo, para cada $K \in \mathcal{P}$ y que $H(x)$ es precompacto para cada $x \in X$. Ya que la clausura de todo subconjunto en E precompacto es precompacto, aplicando el teorema A.2 obtenemos (c).

Recíprocamente, supongamos que (a), (b) y (c) se cumplen. Por el teorema A.1, tenemos que H es $\tau_{\mathcal{P}}$-precompacto. Ya que, $\tau_{\mathcal{P}}$ y $\beta_{\mathcal{P}}$ coinciden en conjuntos acotados, se tiene que H también es $\beta_{\mathcal{P}}$-precompacto. En efecto, sea W una $\beta_{\mathcal{P}}$-vecindad de 0. Ya que $H-H$ es un τ_u-acotado que contiene a 0, por 2.2.3, existe una $\tau_{\mathcal{P}}$-vecindad de 0, digamos V, tal que, $V \cap (H-H) \subset W \cap (H-H)$. Como H es $\tau_{\mathcal{P}}$-precompacto, existen $f_1, \ldots, f_n$ en H, tales que, $H \subset \bigcup_{i=1}^n (f_i + V)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos el conjunto $H_i = \{f \in H : f - f_i \in V\}$. Luego se tiene que $H = \bigcup_{i=1}^n H_i$ y $\bigcup_{i=1}^n (H_i - f_i) \subset V$.

De este modo, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene que:

$$H_i - f_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} (H_i - f_i) \cap (H-H) \subset V \cap (H-H) \subset W \cap (H-H) \subset W \ .$$

Finalmente,

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} (f_i + W)$$

Por otro lado, el espacio $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})$ es cuasicompleto, esto por 2.6.5. De aquí, se tiene que H es relativamente $\beta_{\mathcal{P}}$-completo.

Finalmente por el teorema A.2, se concluye que H es relativamente $\beta_{\mathcal{P}}$-compacto. $\square$

2.7. Otras caracterizaciones de β_p en $C_b(X, E)$.

En esta sección, fijaremos una seminorma $p \in s(E)$ arbitraria y se caracterizará a la topología β_p sobre $C_b(X, E)$, a través de variadas bases de vecindades de 0, las cuales, facilitarán el trabajo en los capítulos siguientes para caracterizar la $\beta_{\mathcal{P}}$-continuidad de los operadores y funcionales sobre $C_b(X, E)$ y su caracterización como integrales.

Uno de los resultados más interesantes de esta sección, es que la topología β_p es la topología vectorial más fina que coincide con la topología τ_p en los conjuntos u_p-acotados, o equivalentemente, que la topología β_p coincide con la topología mixta $\gamma\left[u_p, \tau_p\right]$.

Todos los conceptos y resultados referentes a las topologías mixtas que ocuparemos en esta sección, están disponibles en el anexo D, basado en el paper [30] de A. Wiweger.

Se muestra en [30, example D, página 65] que si X es un espacio completamente regular Hausdorff, entonces en $C_b(X)$ la topología vectorial $\gamma\left[\tau_{\|\cdot\|}, \tau_p\right]$ posee una base de vecindades de 0 constituida por todos los conjuntos de la forma:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{f \in C_b(X) : \|f\|_{K_i} \leqslant a_i\}$$

donde $K_i \in \mathcal{P}$ y $0 < a_i \to +\infty$.

De forma análoga mostraremos la siguiente generalización:

Lema 2.7.1. *Dado $p \in s(E)$, en $C_b(X, E)$ la topología mixta $\gamma\,[u_p, \tau_p]$ posee una base de vecindades de 0 constituida por todos los conjuntos de la forma:*

$$W(K_i, a_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{f \in C_b(X, E) : \|f\|_{p,K_i} \leqslant a_i\}$$

donde $K_i \in \mathcal{P}$ y $0 < a_i \to +\infty$.

Demostración. Primero mostraremos que las topologías u_p y τ_p satisfacen las condiciones del teorema D.10. Para $f \in C_b(X, E)$, se tiene que, $\|f\|_p = \sup\limits_{K \in \mathcal{P}} \|f\|_{p,K}$. Sean $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{P}$, $f \in C_b(X, E)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $K \in \mathcal{P}$, tal que $\bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset K$ y $d := \|f\|_{p,K} + \varepsilon$. El conjunto $V = \{x \in X : p(f(x)) < d\}$ es abierto y $K \subset V$. Ya que F es compacto, por 2.4.1, existe $g \in C_b(X)$, tal que, $0 \leqslant g \leqslant \mathscr{X}_X$, $g(K) = \{0\}$ y $g(X \backslash V) = \{1\}$. Definimos $f_1 = gf$ y $f_2 = (1 - g)f$. Entonces $f = f_1 + f_2$, $\|f_2\|_{p,K_i} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y $\|f_1\|_p \leqslant d$. Luego, el resultado se obtiene al aplicar el teorema D.10. □

Además, por D.7, se tiene el siguiente lema.

Lema 2.7.2. *La topología $\gamma\,[u_p, \tau_p]$ es la topología vectorial más fina en $C_b(X, E)$ que coincide con la topología τ_p en los conjuntos u_p-acotados.*

Proposición 2.7.3. *Las topologías β_p y $\gamma\,[u_p, \tau_p]$ coinciden en $C_b(X, E)$.*

Demostración. Por el lema anterior junto con 2.2.4 se obtiene que $\beta_p \leqslant \gamma\,[u_p, \tau_p]$. Sea $U = W(K_i, a_i)$ una $\gamma\,[u_p, \tau_p]$-vecindad básica de 0. Definimos la función $w : X \to \mathbb{R}$, por

$$w(x) = \begin{cases} \sup\limits_{f \in U} \{p(f(x))\} & , \text{ si } x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \\ 0 & , \text{ si } x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \ . \end{cases}$$

Esta función está bien definida, en efecto, dado $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ existe i, tal que, $x \in K_i$ y $U \subset \{f \in C_b(X, E) : \|f\|_{p,K_i} \leqslant a_i\}$. De esto se concluye que $w(x) \leqslant a_i$.

Elegimos $N \in \mathbb{N}$, tal que, $a_n \geqslant 1$ para $n \geqslant N$ y definimos $a := \text{mín}\{1, a_1, \ldots, a_N\}$. Definimos la función $v : X \to [0, \infty)$ por

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{w(x) + a} & , \text{ si } x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \\ 0 & , \text{ si } x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \ . \end{cases}$$

Mostraremos que $v \in V_{\mathcal{P}}$. La función v es de rango acotado. En efecto, para cada $x \in X$, $v(x) \leqslant \frac{2}{a}$. A continuación mostraremos que v se $\mathcal{P}$-desvanece al infinito. Dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que, $\frac{1}{a_n} < \frac{\varepsilon}{4}$, para cada $n \geqslant M$. Luego,

$$\frac{2}{w(x) + a} \geqslant \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} \geqslant w(x) + a \geqslant w(x) \ .$$

Por lo tanto, $\{x \in X : v(x) \geqslant \varepsilon\} \subset \{x \in X : w(x) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\}$. Además

$$\{x \in X : w(x) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\} \subset \bigcup_{i=1}^{M} K_i \ .$$

En efecto, supongamos que existe $x \in X$, tal que, $w(x) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$ y que $x \notin \bigcup_{i=1}^{M} K_i$. Existe $f \in C_b(X)$, tal que, $0 \leqslant f \leqslant \mathscr{X}_X$, $f(x) = 1$ y $f(\bigcup_{i=1}^{M} K_i) = \{0\}$. Podemos elegir $e \in E$, tal que, $p(e) = \frac{4}{\varepsilon}$. Luego, $f \otimes e$ es tal que $\|f \otimes e\|_p \leqslant \frac{4}{\varepsilon}$ y $p(f(x)e) = \frac{4}{\varepsilon}$. Como $f \otimes e = 0$ en $\bigcup_{i=1}^{M} K_i$ y $\frac{4}{\varepsilon} < a_n$, para $n \geqslant M$, se tiene que, $f \otimes e \in U$. De lo anterior $\frac{4}{\varepsilon} = p(f \otimes e(x)) \leqslant w(x) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$, lo que es una contradicción.

Luego, ya que existe $K \in \mathcal{P}$, tal que, $\bigcup_{i=1}^{M} K_i \subset K$, se concluye que $\{x \in X : v(x) \geqslant \varepsilon\} \subset K$, mostrando que $\|v\|_{X \setminus K} \leqslant \varepsilon$ y por tanto, $v \in V_{\mathcal{P}}$.

Finalmente, se afirma que $\{f \in C_b(X, E) : \|f\|_{p,v} \leqslant 1\} \subset U$. En efecto, primero notemos que para $x \in K_i$, se tiene que: $a_i \geqslant \frac{a_i + a}{2} \geqslant \frac{w(x)+a}{2}$ y de aquí $\frac{1}{a_i} \leqslant \frac{2}{w(x)+a}$. Luego, si $\|f\|_{p,v} \leqslant 1$, entonces, dado $i \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_i}\|f\|_{p,K_i} = \sup_{x \in K_i} \frac{1}{a_i} p(f(x)) \leqslant \sup_{x \in K_i} \frac{2}{w(x) + a} p(f(x)) &\leqslant \sup_{x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i} \frac{2}{w(x) + a} p(f(x)) \\ &\leqslant \sup_{x \in X} v(x) p(f(x)) \\ &= \|f\|_{p,v} \\ &\leqslant 1 \end{aligned}$$

De este modo, $f \in U$. Por lo tanto $\gamma\,[u_p, \tau_p] \leqslant \beta_p$. $\square$

Corolario 2.7.4. *La topología β_p es la topología vectorial más fina en $C_b(X,E)$ que coincide con τ_p en todos los subconjuntos u_p-acotados. Además la colección de todos los conjuntos de la forma:*

$$W(K_i, a_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p,K_i} \leqslant a_i\}$$

donde $K_i \in \mathcal{P}$ y $0 < a_i \to +\infty$, es una base de vecindades de 0 para la topología β_p.

Demostración. Es inmediato de los resultados 2.7.1, 2.7.2 y 2.7.3. $\square$

Proposición 2.7.5. *En $C_b(X,E)$ la familia de subconjuntos*

$$\mathcal{V} = \left\{ U \subset C_b(X,E) : \begin{array}{c} U \textit{ es balanceado y absorbente, tal que,} \\ \textit{para cada } \varepsilon > 0, \textit{ existe } V \textit{ una } \tau_p\textit{-vecindad de } 0 \\ \textit{que cumple con } V \cap \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant \varepsilon\} \subset U \end{array} \right\}$$

es una base de vecindades de 0 para la topología β_p.

Demostración. La familia $\mathcal{V}$ determina una única topología localmente convexa τ en $C_b(X,E)$ que tiene a $\mathcal{V}$ como base de vecindades de 0. En efecto, es claro que la intersección finita de elementos de $\mathcal{V}$ pertenece a $\mathcal{V}$. Sean $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$ y $U \in \mathcal{V}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe V, una τ_p-vecindad de 0, tal que $V \cap \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\} \subset U$. Luego, $\alpha V \cap \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant \varepsilon\} \subset \alpha U$, mostrando que $\alpha U \in \mathcal{V}$.

Cada τ_p-vecindad de 0 balanceada pertenece a $\mathcal{V}$, por lo que $\tau_p \leqslant \tau$. Además, por la definición de $\mathcal{V}$, se tiene que $\tau \leqslant \tau_p$, en los conjuntos de la forma $\{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant \varepsilon\}$. De esto se concluye que las topologías τ y τ_p coinciden en los subconjuntos u_p-acotados de $C_b(X,E)$.

Sea $\tau*$ una topología vectorial en $C_b(X,E)$ que coincide con τ_p en los conjuntos u_p-acotados. Si U es una $\tau*$-vecindad de 0 balanceada, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe V una τ_p-vecindad de 0, tal que, $V \cap \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant \varepsilon\} \subset U \cap \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant \varepsilon\}$. Por lo tanto $U \in \mathcal{V}$ y así $\tau* \leqslant \tau$. De este modo, τ es la topología vectorial más fina en $C_b(X,E)$ que coincide con τ_p en los conjuntos u_p-cotados. Aplicando 2.7.4, se tiene que $\tau = \beta_p$. $\square$

Capítulo 3

Operadores y funcionales en $C_b(X,E)$.

3.1. La $\beta_{\mathcal{P}}$-continuidad de operadores y funcionales en $C_b(X,E)$.

En esta sección, caracterizaremos la $\beta_{\mathcal{P}}$-continuidad de operadores y funcionales lineales sobre $C_b(X,E)$.

Sean H y F dos espacios localmente convexos Hausdorff y consideremos q una seminorma continua en F. Para decir que un operador $T : H \to F$ es $(\tau_{_H}, \sigma(F,\{q\}))$-continuo, simplemente diremos que es $(\tau_{_H}, q)$-continuo. Además, para decir que una red en F es $\sigma(F,\{q\})$-convergente, diremos que es q-convergente.

Definición 3.1.1. *Sea F un espacio localmente convexo Hausdorff. Dados $p \in s(E)$ y $q \in s(F)$, un operador lineal $T : C_b(X,E) \to F$ es **$\mathcal{P}_p^q$-tight** si la restricción $T|_B$ es (τ_p, q)-continua, donde $B = \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant 1\}$ y τ_p es la topología de subespacio en B inducida por la topología τ_p definida en $C_b(X,E)$.*

*En caso que $F = \mathbb{K}$ y $s(F) = \{q\} = \{|\cdot|\}$, para decir que una funcional lineal $T : C_b(X,E) \to \mathbb{K}$ es $\mathcal{P}_p^q$-tight, diremos simplemente que T es **$\mathcal{P}_p$-tight**.*

*Además, si E es un espacio normado donde $s(E) = \{p\}$, entonces para referirnos a una funcional lineal $\mathcal{P}_p$-tight, simplemente diremos que es **$\mathcal{P}$-tight**.*

Por las distintas definiciones de continuidad para un operador lineal, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.1.2. *Sean $T : C_b(X,E) \to F$ un operador lineal, $p \in s(E)$ y $q \in s(F)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) T es $\mathcal{P}_p^q$-tight.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta > 0$ y $K \in \mathcal{P}$ tales que: $q(T(f)) < \varepsilon$, para cada $f \in C_b(X,E)$, tal que $\|f\|_p \leqslant 1$ y $\|f\|_{p,K} \leqslant \delta$.

(c) Para cada red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $C_b(X,E)$ tal que, $\|f_\alpha\|_p \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \Lambda$ y $\|f_\alpha\|_{p,K} \to 0$ para cada $K \in \mathcal{P}$, se tiene que $(T(f_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ es q-convergente a 0.

A continuación daremos una generalización del Teorema 3.2 presentado en [8, página 846] por Robert Fontenot, el cuál solo se refiere a funcionales sobre $(C_b(X,E), \beta_0)$ cuando E es normado.

Teorema 3.1.3. *Sea $T : C_b(X,E) \to F$ un operador lineal. Considere las siguientes proposiciones:*

1. *T es $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo.*

2. *Para todo $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$, tal que, T es (β_p, q)-continuo.*

3. *Para todo $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$, tal que, T es $\mathcal{P}_p^q$-tight.*

4. *Dados $\varepsilon > 0$ y $q \in s(F)$ existen $K \in \mathcal{P}$ y $p \in s(E)$, tales que, $q(T(f)) < \varepsilon$ para cada $f \in C_b(X,E)$ que cumple con $\|f\|_p \leqslant 1$ y $f|_K = 0$.*

5. *Toda red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$, tal que, es $\tau_{\mathcal{P}}$-convergente a 0, satisface con la siguiente condición: para cada $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$, tal que, $(T(f_\alpha g))_{\alpha\in\Lambda}$ es q-convergente a 0 de forma uniforme para $g \in \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant 1\}$.*

6. *Suponiendo que $\mathbb{K} = F = \mathbb{R}$, la aplicación $M : C_b(X) \to \mathbb{R}$ definida por $M(f) = \sup\{|T(g)| : g \in C_b(X,E)$ tal que $\forall p \in s(E), \forall x \in X, p(g(x)) \leqslant f(x)\}$*

para $f \geqslant 0$ *y definida por* $M(f) := M(f^+) - M(f^-)$ *para* $f \in C_b(X)$, *es una funcional lineal* $\mathcal{P}_p$*-tight.*

Se satisfacen las siguientes afirmaciones:

(a) Las proposiciones $1, 2$ *y* 3 *son equivalentes.*

(b) La proposición 3 *implica la proposición* 4.

(c) Al suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y que* T *es* (τ_u, τ_F)*-continuo, se tiene que:* $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$.

(d) Al suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y que* E *es normado con norma* p*, se tiene que:* $6 \Rightarrow 1$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$: Si T es $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo, entonces, dados $\varepsilon > 0$ y $q \in s(F)$, existen $\delta > 0$, $p_1, \ldots, p_n \in s(E)$ y $v_1, \ldots, v_n \in V_{\mathcal{P}}$, tales que, $q(T(f)) < \varepsilon$, para cada $f \in \{g \in C_b(X,E) : \|g\|_{p_i, v_i} < \delta, \forall i = 1, \ldots, n\}$. Ya que $s(E)$ y $V_{\mathcal{P}}$ son familias dirigidas existen $p \in s(E)$ y $v \in V_{\mathcal{P}}$ tales que $p_i \leqslant p$ y $v_i \leqslant v$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $\|f\|_{p,v} < \delta \Rightarrow q(T(f)) < \varepsilon$, mostrando la (β_p, q)-continuidad de T.

$2 \Rightarrow 3$: Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en $\{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant 1\}$ que sea τ_p-convergente a 0. Luego, por 2.2.4, la red es β_p-convergente a 0. Finalmente por la continuidad de T se tiene que $(T(f_\alpha))$ es q-convergente a 0. Por lo tanto T es $\mathcal{P}_p^q$-tight.

$3 \Rightarrow 1$: Sea $q \in s(F)$. Existe $p \in s(E)$, tal que, T es $\mathcal{P}_p^q$-tight. Consideremos $W = \{f \in C_b(X,E) : q(T(f)) \leqslant 1\}$. Aplicando 3.1.2, dado $r > 0$, existen $K \in \mathcal{P}$ y $\delta > 0$ tales que: $q(T(f)) \leqslant \frac{1}{r}$ para cada $f \in C_b(X,E)$ que cumpla con $\|f\|_p \leqslant 1$ y $\|f\|_{p,K} \leqslant \delta$. De este modo

$$\{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p,K} \leqslant \delta r\} \cap \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant r\} \subset W$$

mostrando que W es una β_p-vecindad de 0; esto por 2.7.5. Así, T es (β_p, q)-continua y por ende $(\beta_{\mathcal{P}}, q)$-continua. La conclusión se obtiene de la arbitrariedad de q en $s(F)$.

$3 \Rightarrow 4$: Dados $q \in s(F)$ y $\varepsilon > 0$, existen $p \in s(E)$ y $K \in \mathcal{P}$ tales que $q(T(f)) < \varepsilon$, para cada $f \in C_b(X,E)$ que cumpla con $\|f\|_p \leqslant 1$ y $\|f\|_{p,K} \leqslant \delta$. En particular, para $f \in C_b(X,E)$ tal que $\|f\|_p \leqslant 1$ y $f|_K = 0$. De este modo, hemos probado (b).

Mostremos $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$, suponiendo que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y que T es (τ_u, τ_F)-continuo. Para $4 \Rightarrow 5$, por (a), dado $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$, tal que, el operador T es (u_p, q)-continuo. Así, $\|T\|_p^q := \sup\{q(T(f)) : \|f\|_p \leqslant 1\} < \infty$. Supongamos que 4 se cumple y consideremos una red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$, que $\tau_{\mathcal{P}}$-converge a 0. Podemos asumir que $f_\alpha \geqslant 0$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $K \in \mathcal{P}$ mencionado en 4. Sea $\alpha_0 \in \Lambda$, tal que, $\|f_\alpha\|_K < \varepsilon' := \text{mín}\{1, \varepsilon\}$, para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$. Definimos $h_\alpha = \text{mín}\{f_\alpha, \varepsilon'\}$. Si $g \in \{f \in C_b(X, E) : \|f\|_p \leqslant 1\}$, entonces por 4, se tiene que $q(T(f_\alpha g - h_\alpha g)) < \varepsilon$ para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$, pues $f_\alpha - h_\alpha = 0$ en K. Luego, para $\alpha \geqslant \alpha_0$, se tiene:

$$q(T(f_\alpha g)) < \varepsilon + q(T(h_\alpha g)) \leqslant \varepsilon + \|T\|_p^q \|h_\alpha g\|_p < \varepsilon + \|T\|_p^q \varepsilon$$

cualquiera sea $g \in \{f \in C_b(X, E) : \|f\|_p \leqslant 1\}$.

Ahora probemos $5 \Rightarrow 6$. Supongamos que $\mathbb{K} = F = \mathbb{R}$. Como anteriormente hemos supuesto que T es, en este caso, una funcional τ_u-continua en $C_b(X, E)$, existe $p_1 \in s(E)$, tal que, T es u_{p_1}-continua. Supongamos que 5 se satisface, es decir, para cada red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$ que $\tau_{\mathcal{P}}$-converge a 0, existe $p_2 \in s(E)$, tal que, $(T(f_\alpha g))_{\alpha\in\Lambda}$ es convergente a 0 de forma uniforme para $g \in \{f \in C_b(X, E) : \|f\|_{p_2} \leqslant 1\}$. Elegimos $p' \in s(E)$, que cumpla $p_1, p_2 \leqslant p'$.

Luego, para cada red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$ que $\tau_{\mathcal{P}}$-converge a 0, existe $p' \in s(E)$, tal que, T es $u_{p'}$-continua y $(T(f_\alpha g))_{\alpha\in\Lambda}$ es convergente a 0 de forma uniforme para $g \in \{f \in C_b(X, E) : \|f\|_{p'} \leqslant 1\}$.

Mostremos que la aplicación M mencionada en 6 es lineal. Sean $f, g \in C_b(X)$, $f, g \geqslant 0$. Claramente $M(af) = aM(f)$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Consideremos $h \in C_b(X, E)$, tal que, $\forall p \in s(E), p \circ h \leqslant f + g$ y definamos las funciones:

$$h_1 : X \to E, \quad h_1(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{f(x) + g(x)} \cdot h(x) & , \text{ si } f(x) + g(x) > 0 \\ 0 & , \text{ si } f(x) + g(x) = 0 \end{cases}$$

y

$$h_2 : X \to E, \quad h_2(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{f(x)+g(x)} \cdot h(x) & , \text{ si } f(x)+g(x) > 0 \\ 0 & , \text{ si } f(x)+g(x) = 0 \, . \end{cases}$$

Notemos que $p \circ h_1 \leqslant f$ y que $p \circ h_2 \leqslant g$, para cada $p \in s(E)$. Por lo que $h_1, h_2 \in B(X,E)$. Si $y \in X$ es tal que $f(y)+g(y) > 0$, entonces, es claro que h_1 y h_2 son continuas en y. Si $y \in X$ es tal que $f(y)+g(y) = 0$, entonces, $f(y) = g(y) = 0$. Por la continuidad de f y g, dado $\varepsilon > 0$, los conjuntos $A_\varepsilon = f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ y $B_\varepsilon = g^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)$ son vecindades de y. Luego, para cada $p \in s(E)$ y $x \in A_\varepsilon$, se tiene que $p(h_1(x) - h_1(y)) = p(h_1(x)) \leqslant |f(x)| < \varepsilon$. Por otro lado, para cada $p \in s(E)$ y $x \in B_\varepsilon$, se tiene que $p(h_2(x) - h_2(y)) = p(h_2(x)) < \varepsilon$. De este modo $h_1, h_2 \in C_b(X,E)$. Ya que $|T(h)| = |T(h_1) + T(h_2)| \leqslant M(f) + M(g)$, se deduce que $M(f+g) \leqslant M(f) + M(g)$.

Para la otra desigualdad, tomemos $\varepsilon > 0$ y $h_1, h_2 \in C_b(X,E)$, tales que, $p \circ h_1 \leqslant f$, $p \circ h_2 \leqslant g$ para cada $p \in s(E)$ y $0 \leqslant T(h_1) \leqslant M(f) \leqslant T(h_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ junto con $0 \leqslant T(h_2) \leqslant M(g) \leqslant T(h_2) + \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, $M(f) + M(g) \leqslant T(h_1) + T(h_2) + \varepsilon = T(h_1 + h_2) + \varepsilon \leqslant M(f+g) + \varepsilon$. Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, se tiene que $M(f) + M(g) \leqslant M(f+g)$ y de aquí se concluye que $M(f) + M(g) = M(f+g)$.

Dada $f \in C_b(X)$, consideremos $g, h \in C_b(X)$, $g, h \geqslant 0$, tales que, $f = g - h$. Luego,

$$\begin{aligned} f^+ - f^- = &\Rightarrow M(f^+) + M(h) = M(f^-) + M(g) \\ &\Rightarrow M(f) = M(g) - M(h) \end{aligned}$$

mostrando que M es bien definida y lineal en $C_b(X)$.

Ahora resta probar que M es $\mathcal{P}$-tight. Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$ que $\tau_{\mathcal{P}}$-converge a 0. Podemos asumir que $f_\alpha \geqslant 0$, para cada $\alpha \in \Lambda$. Por 5, existe $p' \in s(E)$, tal que, T es $u_{p'}$-continua y $(T(f_\alpha g))_{\alpha \in \Lambda}$ es convergente a 0 de forma uniforme para $g \in \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p'} \leqslant 1\}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\alpha_0 \in \Lambda$, tal que, $|T(f_\alpha g)| < \varepsilon$, para todo $g \in \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p'} \leqslant 1\}$ y para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Sea $\alpha \geqslant \alpha_0$ fijo. Consideremos $g \in C_b(X,E)$, tal que, $p \circ g \leqslant f_\alpha$, para todo $p \in s(E)$.

Luego, definimos la función

$$h : X \to E, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{f_\alpha(x)} & , \text{ si } f_\alpha(x) > 0 \\ 0 & , \text{ si } f_\alpha(x) = 0 \ . \end{cases}$$

Esta función es acotada, en efecto, $p(h(x)) \leqslant \dfrac{p(g(x))}{f_\alpha(x)} \leqslant 1$, para cada $p \in s(E)$ y para todo $x \in X$. En particular $\|h\|_{p'} \leqslant 1$. Si $y \in X$, es tal que, $f_\alpha(y) > 0$, entonces es claro que h es continua en y. Si $y \in X$, es tal que, $f_\alpha(y) = 0$, entonces $h(y) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $C_\varepsilon = f_\alpha^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ es una vecindad de y, tal que, $p(h(x) - h(y)) = p(h(x)) \leqslant f_\alpha(x) < \varepsilon$, para todo $x \in C_\varepsilon$ y cada $p \in s(E)$. Por lo tanto, $h \in C_b(X,E)$. Luego, $f_\alpha h \in \{f \in C_b(X,E) : |T(f)| \leqslant \varepsilon\}$ y ya que T es $u_{p'}$-continua, existe $\delta > 0$, tal que, $f_\alpha h + \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p'} < \delta\} \subset \{f \in C_b(X,E) : |T(f)| \leqslant \varepsilon\}$. Si $f_\alpha(x) > 0$, entonces $f_\alpha(x)h(x) - g(x) = 0$, por lo que $\|f_\alpha h - g\|_{p'} = \sup\{p'(f_\alpha(x)h(x) - g(x)) : f_\alpha(x) = 0\} \leqslant \sup\{p'(g(x)) : f_\alpha(x) = 0\} = 0$, esto último debido a que $p' \circ g \leqslant f_\alpha$. Por lo tanto, $\|f_\alpha h - g\|_{p'} < \delta$ y de aquí $|T(g)| < \varepsilon$.

Por la arbitrariedad de g, se deduce que $M(f_\alpha) \leqslant \varepsilon$, para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$. Es decir, M es $\mathcal{P}$-tight.

Ahora mostremos que (d) se satisface. Supongamos que $\mathbb{K} = F = \mathbb{R}$ y que E es normado con norma p. Si 6 se satisface, entonces M es una funcional lineal $\mathcal{P}$-tight.

Aplicando (a), de deduce que M es $\gamma_{\mathcal{P}}$-continua en $C_b(X)$. De este modo existe $v \in V_{\mathcal{P}}$, tal que, para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $\{f \in C_b(X,E) : \|f\|_v < \varepsilon\} \subset \{f \in C_b(X,E) : |M(f)| < \varepsilon\}$. Por lo tanto, para cada $f \in C_b(X,E)$, se cumple que $|M(f)| \leqslant \|f\|_v$. Sea $f \in C_b(X,E)$. Se tiene que: $|T(f)| \leqslant M(p \circ f) \leqslant \|p \circ f\|_v = \|f\|_{p,v}$, por lo tanto la funcional lineal T es $\beta_{\mathcal{P}}$-continua, cumpliéndose 1. $\square$

Como consecuencia directa de 3.1.3.a, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.1.4. $\mathscr{L}^{\tau_F}_{\beta_{\mathcal{P}}}(C_b(X,E),F) = \bigcap\limits_{q \in s(F)} \mathscr{L}^{q}_{\beta_{\mathcal{P}}}(C_b(X,E),F)$

$$= \bigcap_{q \in s(F)} \left(\bigcup_{p \in s(E)} \mathscr{L}^{q}_{\beta_p}(C_b(X,E),F) \right).$$

De hecho, por la demostración de 3.1.3.a, podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 3.1.5. *Sean $T : C_b(X,E) \to F$ una aplicación lineal, $p \in s(E)$ y $q \in s(F)$.*

(a) La aplicación T, es (β_p, q)-continua, si y solo si, es $\mathcal{P}_p^q$-tight.

En caso que $F = \mathbb{K}$, tenemos la siguiente equivalencia.

(b) La funcional T, es β_p-continua, si y solo si, es $\mathcal{P}_p$-tight.

De forma análoga, para funcionales lineales sobre $C_b(X,E)$, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.1.6. *Sea $T : C_b(X,E) \to \mathbb{K}$ una funcional lineal. Considere las siguientes proposiciones:*

1. *T es $\beta_{\mathcal{P}}$-continua.*
2. *Existe $p \in s(E)$, tal que, T es β_p-continua.*
3. *Existe $p \in s(E)$, tal que, T es $\mathcal{P}_p$-tight.*
4. *Dado $\varepsilon > 0$, existen $K \in \mathcal{P}$ y $p \in s(E)$, tales que, $|T(f)| < \varepsilon$ para cada $f \in C_b(X,E)$ que cumple con $\|f\|_p \leqslant 1$ y $f|_K = 0$.*
5. *Toda red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$, tal que, es $\tau_{\mathcal{P}}$-convergente a 0, satisface con la siguiente condición: existe $p \in s(E)$, tal que, $(T(f_\alpha g))_{\alpha\in\Lambda}$ es convergente a 0 de forma uniforme para $g \in \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant 1\}$.*
6. *Suponiendo que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la aplicación $M : C_b(X) \to \mathbb{R}$ definida por $M(f) = \sup\{|T(g)| : g \in C_b(X,E)$ tal que $\forall p \in s(E), \forall x \in X, p(g(x)) \leqslant f(x)\}$ para $f \geqslant 0$ y definida por $M(f) := M(f^+) - M(f^-)$ para $f \in C_b(X)$, es una funcional lineal $\mathcal{P}_p$-tight.*

Se satisfacen las siguientes afirmaciones:

(a) Las proposiciones $1, 2$ y 3 son equivalentes.

(b) La proposición 3 *implica la proposición* 4.

(c) Al suponer que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *y que* T *es* τ_u*-continua, se tiene que:* $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$.

(d) Al suponer que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *y que* E *es normado con norma* p*, se tiene que:* $6 \Rightarrow 1$.

Como consecuencia directa de 3.1.6.a, se tiene que el siguiente:

Corolario 3.1.7. $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})' = \bigcup\limits_{p\in s(E)} (C_b(X,E),\beta_p)'$.

En particular, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.8. *Suponga que* E *es un espacio vectorial real con norma* p*. Sea* $T : C_b(X,E) \to \mathbb{R}$ *una funcional lineal* τ_u*-continua. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. T *es* $\beta_{\mathcal{P}}$*-continua.*
2. T *es* β_p*-continua.*
3. T *es* $\mathcal{P}$*-tight.*
4. *Dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $K \in \mathcal{P}$*, tal que,* $|T(f)| < \varepsilon$ *para cada* $f \in C_b(X,E)$ *que cumple con* $\|f\|_p \leqslant 1$ *y* $f|_K = 0$.
5. *Toda red* $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *en* $\{f \in C_b(X) : \|f\| \leqslant 1\}$*, tal que, es* $\tau_{\mathcal{P}}$*-convergente a* 0*, satisface con la siguiente condición:* $(T(f_\alpha g))_{\alpha\in\Lambda}$ *es convergente a* 0 *de forma uniforme para* $g \in \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leqslant 1\}$.
6. *La aplicación* $M : C_b(X) \to \mathbb{R}$ *definida por* $M(f) = \sup\{|T(g)| : g \in C_b(X,E)$ *tal que* $\forall x \in X, p(g(x)) \leqslant f(x)\}$ *para* $f \geqslant 0$ *y por* $M(f) := M(f^+) - M(f^-)$ *para* $f \in C_b(X)$*, es una funcional lineal* $\mathcal{P}$*-tight.*

3.2. Integración en $C_b(X, E)$.

En esta sección, definiremos el concepto de integral para una función del espacio $C_b(X, E)$, respecto de una medida vectorial $m : \mathcal{B} \to E'$, que cumple ciertas condiciones.

Esta integral será una generalización de la integral definida para funciones en $C_b(X)$ respecto de las medidas de Baire.

También desarrollaremos los resultados de integración que emplearemos en las secciones siguientes, para estudiar una representación integral de las funcionales y los operadores $\beta_{\mathcal{P}}$-continuos sobre $C_b(X, E)$.

Durante esta sección, supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Para $A \in \mathcal{B}$, denotaremos por $\Pi(A)$ a la familia de todas las $\mathcal{B}$-particiones finitas de A. Notemos que $\Pi(A)$ es un conjunto dirigido con la relación $\preceq$ definida como sigue: $\mathscr{C} \preceq \mathscr{D}$ si y solo si, $\mathscr{D}$ es un refinamiento de $\mathscr{C}$.

Definición 3.2.1. *Se define $S(X)$ como el espacio de todas las funciones simples respecto a $\mathcal{B}$, con valores en $\mathbb{R}$. Dicho de otro modo:*

$$S(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mathscr{X}_{B_i} : n \in \mathbb{N}, \{B_i\}_{i=1}^{n} \in \Pi(X), a_i \in \mathbb{R} \right\} .$$

Dados $f \in C_b(X)$, $f \geqslant 0$ y $\mu \in M^+(X)$, siguiendo a [2], [1] y [12], se define la integral de f en X respecto a μ, por:

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X h \, d\mu : h \in S(X), 0 \leqslant h \leqslant f \right\}.$$

Se puede probar que:

$$\int_X f \, d\mu = \inf \left\{ \int_X h \, d\mu : h \in S(X), f \leqslant h \right\} = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \, ,$$

donde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones arbitrarias de funciones simples respecto a $\mathcal{B}$, no negativas, *pw*-convergentes a f, tales que, $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$ y $f \leqslant g_{n+1} \leqslant g_n$.

Si $\mu \in M^+(X)$, $f \in C_b(X)$ y $f_1, f_2 \in C_b(X)$ son tales que $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$ y $f = f_1 - f_2$, entonces, se define la integral de f en X respecto a μ, por:

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f_2 \, d\mu \, .$$

Esta integral está bien definida, independientemente de la elección de las funciones f_1 y f_2.

Dados $f \in C_b(X)$, $\mu \in M(X)$ y $\mu_1, \mu_2 \in M^+(X)$ tales que $\mu = \mu_1 - \mu_2$, se define la integral de f en X respecto a μ como:

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f\,d\mu_1 - \int_X f\,d\mu_2\,.$$

Esta integral está bien definida, independientemente de la elección de las medidas μ_1 y μ_2.

A continuación, daremos una definición equivalente para la integral de $f \in C_b(X)$ respecto de una medida $\mu \in M(X)$. Luego, esta definición se extenderá a elementos de $C_b(X, E)$.

Definición 3.2.2. *Sea $G \in \mathcal{B}$, $G \neq \emptyset$. Se define la colección Ω_G como:*

$$\Omega_G := \left\{ \{B_1, \ldots, B_n, x_1, \ldots, x_n\} : n \in \mathbb{N}, \{B_i\}_{i=1}^n \in \Pi(G) \ y \ x_i \in B_i \right\}.$$

Esta familia es dirigida con la relación $\preceq$, definida como sigue: dados $\alpha_1 = \{B_1, \ldots, B_n, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\alpha_2 = \{C_1, \ldots, C_m, y_1, \ldots, y_m\}$ en Ω_G, $\alpha_1 \preceq \alpha_2$ si y solo si, la partición $\{C_j\}_{j=1}^m$ es un refinamiento de $\{B_i\}_{i=1}^n$, esto es, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que, $C_j \subset B_i$.

Para cada $f \in C_b(X)$, $\mu \in M(X)$ y $\alpha = \{B_1, \ldots, B_n, x_1, \ldots, x_n\} \in \Omega_X$ se define la integral

$$\omega_\alpha(f) := \omega_\alpha(f, \mu) := \sum_{i=1}^n f(x_i)\mu(B_i) = \int_X \sum_{i=1}^n f(x_i)\mathscr{X}_{B_i}\,d\mu.$$

Lema 3.2.3. *Dados $f \in C_b(X)$ y $\mu \in M(X)$ se tiene que*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{\alpha \in \Omega_X} \omega_\alpha(f)\,.$$

Demostración. Es suficiente probar el lema para $f \in C_b(X)$, $f \geq 0$ y $\mu \in M^+(X)$. Para cada $A \in \mathcal{B}$, definimos $l(f, A) := \inf\{f(x) : x \in A\}$ y $u(f, A) := \sup\{f(x) : x \in A\}$. Para cada $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \in \Pi(X)$ definimos $l(f, \mathscr{C}) := \sum_{i=1}^n l(f, C_i)\mu(C_i)$ y $u(f, \mathscr{C}) := \sum_{i=1}^n u(f, C_i)\mu(C_i)$.

<u>PASO 1:</u> Mostremos que, para $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in \Pi(X)$ tales que $\mathscr{C} \preceq \mathscr{D}$, se tiene que: $l(f,\mathscr{C}) \leqslant l(f,\mathscr{D})$ y $u(f,\mathscr{D}) \leqslant l(f,\mathscr{C})$.

Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in \Pi(X)$ tales que $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \preceq \mathscr{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$. Existe una partición $\{J_1, \ldots, J_n\}$ del conjunto $\{1, \ldots, m\}$, tal que:

$$C_i = \bigcup_{j \in J_i} D_j,$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego,

$$\begin{aligned} l(f,\mathscr{C}) = \sum_{i=1}^{n} l(f,C_i)\mu(C_i) &= \sum_{i=1}^{n} l(f,C_i)\left(\sum_{j\in J_i}\mu(D_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_i} l(f,C_i)\mu(D_j)\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_i} l(f,D_j)\mu(D_j)\right) = \sum_{j=1}^{m} l(f,D_j)\mu(D_j) = l(f,\mathscr{D})\,. \end{aligned}$$

Además, se tiene que:

$$\begin{aligned} u(f,\mathscr{D}) = \sum_{j=1}^{m} u(f,D_i)\mu(D_j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_i} u(f,D_j)\mu(D_j)\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_i} u(f,C_i)\mu(D_j)\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} u(f,C_i)\left(\sum_{j\in J_i}\mu(D_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} u(f,C_i)\mu(C_i) = u(f,\mathscr{C})\,. \end{aligned}$$

Notemos que, para cada $\mathscr{C} \in \Pi(X)$, $\ l(f,\mathscr{C}) \leqslant \|f\|\mu(X)$. Por lo tanto, $\text{ínf}\{u(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\}$ y $\sup\{l(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\}$ existen.

<u>PASO 2:</u> Mostraremos que $\int_X f\,d\mu = \text{ínf}\{u(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\} = \lim_{\mathscr{C}\in\Pi(X)} u(f,\mathscr{C})\,.$

Sea $g \in S(X)$, tal que, $f \leq g$. Digamos $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathscr{X}_{D_i}$ y $\mathscr{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$. Se tiene que:

$$\text{ínf}\{u(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\} \leq u(f,\mathscr{D}) = \sum_{i=1}^{n} u(f,D_i)\mu(D_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu(D_i) = \int_X g\,d\mu\,.$$

Luego,

$$\text{ínf}\{u(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\} \leq \text{ínf}\left\{\int_X g\, d\mu : g \in S(X), f \leq g\right\} = \int_X f\, d\mu\,.$$

Por otro lado, si $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \in \Pi(X)$, entonces, $f \leq \sum_{i=1}^n u(f, C_i)\mathscr{X}_{C_i}$. Luego,

$$\int f\, d\mu \leq \sum_{i=1}^n u(f, C_i)\mu(C_i) = u(f, \mathscr{C}).$$

Por lo tanto,

$$\int f\, d\mu \leq \text{ínf}\{u(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\}.$$

Ahora consideremos $\varepsilon > 0$. Existe $\mathscr{C} \in \Pi(X)$, tal que

$$\text{ínf}\{u(f,\mathscr{H}) : \mathscr{H} \in \Pi(X)\} + \varepsilon > u(f,\mathscr{C}).$$

Debido al paso 1, para $\mathscr{D} \in \Pi(X)$, $\mathscr{C} \preceq \mathscr{D}$, se tiene que $u(f,\mathscr{D}) \leq u(f,\mathscr{C})$. Luego, $|u(f,\mathscr{D}) - inf\{u(f,\mathscr{H}) : \mathscr{H} \in \Pi(X)\}| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\int_X f\, d\mu = \lim_{\mathscr{C} \in \Pi(X)} u(f,\mathscr{C})\,.$

<u>Paso 3:</u> Mostraremos que $\int_X f\, d\mu = \sup\{l(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\} = \lim_{\mathscr{C} \in \Pi(X)} l(f,\mathscr{C})\,.$

Sea $g \in S(X)$, tal que, $g \leq f$. Digamos $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathscr{X}_{D_i}$ y $\mathscr{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$. Se tiene que:

$$\int_X g\, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(D_i) \leq \sum_{i=1}^n l(f, D_i)\mu(D_i) = l(f,\mathscr{D}) \leq \sup\{l(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\}\,.$$

Luego,

$$\sup\{l(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\} \geq \sup\left\{\int_X g\, d\mu : g \in S(X), g \leq f\right\} = \int_X f\, d\mu\,.$$

Por otro lado, si $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \in \Pi(X)$, entonces, $\sum_{i=1}^n l(f, C_i)\mathscr{X}_{C_i} \leq f$. Luego,

$$l(f,\mathscr{C}) = \sum_{i=1}^n l(f, C_i)\mu(C_i) \leq \int f\, d\mu.$$

Por lo tanto,

$$\sup\{l(f,\mathscr{C}) : \mathscr{C} \in \Pi(X)\} \leq \int f\, d\mu.$$

Ahora consideremos $\varepsilon > 0$. Existe $\mathscr{C} \in \Pi(X)$, tal que

$$\sup\{l(f,\mathscr{H}) : \mathscr{H} \in \Pi(X)\} - \varepsilon < l(f,\mathscr{C}).$$

Debido al paso 1, para $\mathscr{D} \in \Pi(X)$, $\mathscr{C} \preceq \mathscr{D}$, se tiene que $l(f,\mathscr{C}) \leq l(f,\mathscr{D})$. Luego, $|sup\{l(f,\mathscr{H}) : \mathscr{H} \in \Pi(X)\} - l(f,\mathscr{D})| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{\mathscr{C}\in\Pi(X)} l(f,\mathscr{C})$.

<u>Paso 4:</u> Mostraremos que $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{\alpha\in\Omega_X} \omega_\alpha(f)$.

Sea $\alpha = \{C_1,\ldots,C_n,x_1,\ldots,x_n\} \in \Omega_X$ y $\mathscr{C} = \{C_1,\ldots,C_n\}$. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} l(f,C_i)\mu(C_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(C_i) \leq \sum_{i=1}^{n} u(f,C_i)\mu(C_i)\,,$$

esto es, $l(f,\mathscr{C}) \leq \omega_\alpha(f) \leq u(f,\mathscr{C})$. Luego,

$$|\omega_\alpha(f)-l(f,\mathscr{C})| \leq |u(f,\mathscr{C})-l(f,\mathscr{C})| \leq \left|u(f,\mathscr{C})-\int_X f\,d\mu\right|+\left|\int_X f\,d\mu-l(f,\mathscr{C})\right|. \quad (3.1)$$

Debido a los pasos 2 y 3, dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathscr{H} = \{H_1,\ldots,H_n\} \in \Pi(X)$, tal que

$$\left|u(f,\mathscr{D}) - \int_X f\,d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left|\int_X f\,d\mu - l(f,\mathscr{D})\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para cada $\mathscr{D} \in \Pi(X)$, tal que $\mathscr{H} \preceq \mathscr{D}$.

Para cada $i = 1,\ldots,n$, elegimos $y_i \in H_i$ y escribimos $\alpha_0 = \{H_1,\ldots,H_n,y_1,\ldots,y_n\} \in \Omega_X$. Para $\alpha = \{D_1,\ldots,D_m,x_1,\ldots,x_m\} \in \Omega_X$, tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$, tenemos que $\mathscr{D} = \{D_1,\ldots,D_m\}$ es tal que $\mathscr{H} \preceq \mathscr{D}$.

De este modo, aplicando (3.1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f\,d\mu - \omega_\alpha(f)\right| &\leq \left|\int_X f\,d\mu - l(f,\mathscr{D})\right| + |l(f,\mathscr{D}) - \omega_\alpha(f)| \\
&\leq \left|\int_X f\,d\mu - l(f,\mathscr{D})\right| + \left|u(f,\mathscr{D}) - \int_X f\,d\mu\right| + \left|\int_X f\,d\mu - l(f,\mathscr{D})\right| \\
&< \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Dado $p \in s(E)$ denotaremos por E'_p al espacio dual $(E,\sigma(E,\{p\}))'$.

Definición 3.2.4. *Para cada $p \in s(E)$ se define el espacio $M_p(X,E'_p)$, como el conjunto de todas las funciones conjunto $m : \mathcal{B} \to E'_p$, finitamente aditivas que satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Para cada $s \in E$, la función conjunto $ms : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, definida por $ms(G) := \langle m(G), s\rangle$, es una medida de Baire. Es decir, $\forall s \in E$, $ms \in M(X)$.

(b) $m_p(X) < \infty$, donde para cada $G \in \mathcal{B}$, se define

$$m_p(G) := \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), s_i\rangle \right| : \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \{G_i\}_{i=1}^{n} \in \Pi(G), s_i \in E, \\ p(s_i) \leq 1, i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

Observación 3.2.5. *Si una función conjunto $m : \mathcal{B} \to E'$ satisface 3.2.4.a, entonces, m es una medida vectorial, es decir, $m(\emptyset) = 0$ y $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, para $A, B \in \mathcal{B}$ disjuntos. En efecto, para cada $s \in E$, $\langle m(\emptyset), s\rangle = ms(\emptyset) = 0$, pues $ms \in M(X)$. Ahora consideremos $A, B \in \mathcal{B}$ disjuntos. Para cada $s \in E$, $\langle m(A \cup B), s\rangle = ms(A \cup B) = ms(A) + ms(B) = \langle m(A), s\rangle + \langle m(B), s\rangle$.*

Observación 3.2.6. *Sea $p \in s(E)$. Si una función conjunto $m : \mathcal{B} \to E'$ satisface 3.2.4.b, entonces, la función conjunto m_p es acotada y la imagen de la función m está contenida en E'_p.*

En efecto, dados $G \in \mathcal{B}$, $\{G_i\}_{i=1}^{n} \in \Pi(G)$ y $s_i \in E$, $p(s_i) \leq 1$ $(i = 1, \dots, n)$, se tiene que $\left|\sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), s_i\rangle\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), s_i\rangle + \langle m(X \backslash G), 0\rangle\right| \leq m_p(X)$. Por lo tanto, $\|m(G)\| := \sup\{|\langle m(G), s\rangle| : p(s) \leq 1\} \leq m_p(G) \leq m_p(X) < \infty$, para cada $G \in \mathcal{B}$.

Observación 3.2.7. *Sean $p \in s(E)$, $m \in M_p(X, E'_p)$ y $G \in \mathcal{B}$. Notemos que:*

$$m_p(G) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left|\langle m(G_i), s_i\rangle\right| : \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \{G_i\}_{i=1}^{n} \in \Pi(G), s_i \in E, \\ p(s_i) \leq 1, i = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

En efecto, es claro que

$$m_p(G) \leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left|\langle m(G_i), s_i\rangle\right| : \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \{G_i\}_{i=1}^{n} \in \Pi(G), s_i \in E, \\ p(s_i) \leq 1, i = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

Para la otra desigualdad, consideremos $\{G_i\}_{i=1}^n \in \Pi(G)$ *y* $s_i \in E$, $p(s_i) \leq 1$. *Para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *definimos*

$$t_i = \begin{cases} s_i & , \ si \ \ \langle m(G_i), s_i \rangle \geq 0 \\ -s_i & , \ si \ \ \langle m(G_i), s_i \rangle < 0 \end{cases}$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} \big| \langle m(G_i), s_i \rangle \big| = \sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), t_i \rangle = \left| \sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), t_i \rangle \right| \leq m_p(G) \,.$$

Por lo tanto,

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \big| \langle m(G_i), e_i \rangle \big| : \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \{G_i\}_{i=1}^n \in \Pi(G), e_i \in E, \\ p(e_i) \leq 1, i = 1, \ldots, n \end{array} \right\} \leq m_p(G) \,.$$

Lema 3.2.8. *Si* $p \in s(E)$ *y* $m \in M_p(X, E_p')$, *entonces la función conjunto* $m_p : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, *definida en 3.2.4.b, es una medida de Baire positiva, esto es* $m_p \in M^+(X)$.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{B}$ disjuntos. Podemos asumir que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Sean $\{C_i\}_{i=1}^n \in \Pi(A \cup B)$ y $s_i \in E$, $p(s_i) \leq 1$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideremos los conjuntos

$$A_i := A \cap C_i \quad \text{y} \quad B_i := B \cap C_i$$

y escribimos $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : A_i \neq \emptyset\}$ y $J = \{j \in \{1, \ldots, n\} : B_j \neq \emptyset\}$. Por construcción, se tiene que $\{A_i\}_{i \in I} \in \Pi(A)$, $\{B_j\}_{j \in J} \in \Pi(B)$ y $C_i = C_i \cap (A \cup B) = A_i \cup B_i$. Luego, por la observación 3.2.7,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \big| \langle m(C_i), s_i \rangle \big| &= \sum_{i=1}^{n} \big| \langle m(A_i \cup B_i), s_i \rangle \big| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big| \langle m(A_i), s_i \rangle + \langle m(B_j), s_j \rangle \big| \\ &\leq \sum_{i \in I} \big| \langle m(A_i), s_i \rangle \big| + \sum_{j \in J} \big| \langle m(B_j), s_j \rangle \big| \\ &\leq m_p(A) + m_p(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto $m_p(A\cup B)\leq m_p(A)+m_p(B)$.

Sea $\varepsilon>0$. Consideremos $\{A_i\}_{i=1}^n\in\Pi(A)$, $s_i\in E$, $p(s_i)\leq 1$, $\{B_j\}_{j=1}^m\in\Pi(B)$, $e_j\in E$, $p(e_j)\leq 1$, tales que:

$$m_p(A)<\sum_{i=1}^n\left|\langle m(A_i),s_i\rangle\right|+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{y}\quad m_p(B)<\sum_{j=1}^m\left|\langle m(B_i),e_j\rangle\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego,

$$m_p(A)+m_p(B)<\varepsilon+\sum_{i=1}^n\left|\langle m(A_i),s_i\rangle\right|+\sum_{j=1}^m\left|\langle m(B_i),e_j\rangle\right|\leq\varepsilon+m_p(A\cup B)$$

Sea $A\in\mathcal{B}$. Ya que m_p es no-negativa y finitamente aditiva, aplicando 1.3.1.7, se tiene que m_p es monótona. Por ende, tenemos que $\sup\{m_p(Z):Z\in\mathcal{Z},Z\subset A\}\leq m_p(A)$.

Para la otra desigualdad, consideremos $\varepsilon>0$. Existen, $\{A_i\}_{i=1}^n\in\Pi(A)$, $s_i\in E$, $p(s_i)\leq 1$, para $i=1,\ldots,n$, tales que,

$$m_p(A)<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^n\left|ms_i(A_i)\right|=\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^n mt_i(A_i),$$

donde, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$,

$$t_i=\begin{cases}s_i & ,\ \text{si}\quad\langle m(G_i),s_i\rangle\geq 0\\ -s_i & ,\ \text{si}\quad\langle m(G_i),s_i\rangle<0\ .\end{cases}$$

Por la regularidad de las medidas $(mt_i)^+$, podemos elegir para cada $i\in\{1\ldots,n\}$, un conjunto $Z_i\subset A_i$, tal que

$$\begin{aligned}(mt_i)^+(A_i)-\frac{\varepsilon}{2n}&=\sup\{(mt_i)^+(Z):Z\in\mathcal{Z},Z\subset A_i\}-\frac{\varepsilon}{2n}\\&<(mt_i)^+(Z_i).\end{aligned}$$

Notemos que, $(mt_i)^-(Z_i) \leq (mt_i)^-(A_i)$. Luego,

$$\begin{aligned} m_p(A) &< \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n}(mt_i)^+(A_i) - \sum_{i=1}^{n}(mt_i)^-(A_i) \\ &< \varepsilon + \sum_{i=1}^{n}(mt_i)^+(Z_i) - \sum_{i=1}^{n}(mt_i)^-(Z_i) \\ &= \varepsilon + \sum_{i=1}^{n}(mt_i)(Z_i) \\ &\leq \varepsilon + m_p\left(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i\right) \\ &\leq \varepsilon + \sup\{m_p(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\} \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que: $m_p(A) = \sup\{m_p(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset A\}$ y por lo tanto, $m_p \in M^+(X)$. $\square$

Definición 3.2.9. *Una medida $\mu \in M(X)$ es **$\mathcal{P}$-tight** si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathcal{P}$, tal que, $|\mu|(G) < \varepsilon$, para cada $G \in \mathcal{B}$, $G \subset X \backslash K$.*

*Si $\mathcal{P} = K(X)$, entonces, para decir que una medida de Baire μ es $\mathcal{P}$-tight, diremos simplemente que μ es **tight**.*

Se define el espacio $M_{\mathcal{P},t}(X) := \{\mu \in M(X) : \mu$ es $\mathcal{P}$-tight$\}$ y denotaremos por $M_t(X)$ al espacio $M_{K(X),t}$.

Notemos que $M_{\mathcal{P},t}(X) \subset M_t(X)$, pues $\mathcal{P} \subset K(X)$.

Lema 3.2.10. *Sea $\mu \in M(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) La medida μ es $\mathcal{P}$-tight.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathcal{P}$, tal que, $|\mu|(Z) < \varepsilon$, para cada $Z \in \mathcal{Z}$, $Z \subset X \backslash K$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Es inmediato. $(b) \Rightarrow (a)$: Sea $\varepsilon > 0$. Existe $K \in \mathcal{P}$, tal que, $|\mu|(Z) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $Z \in \mathcal{Z}$, $Z \subset X \backslash K$. Tomemos $G \in \mathcal{B}$, $G \subset X \backslash K$. Ya que $|\mu|(Z) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $Z \in \mathcal{Z}$, $Z \subset G$ y por la regularidad de μ, se tiene que $|\mu|(G) = \sup\{|\mu|(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset G\} < \varepsilon$. $\square$

Lema 3.2.11. *Sean $\mu \in M(X)$, $\varepsilon > 0$ y $K \in K(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\sup\{|\mu|(Z) : Z \in \mathcal{Z}, Z \subset X \backslash K\} \leq \varepsilon$,

(b) Para cada $U \in \mathcal{U}$, tal que, $K \subset U$, se tiene que $|\mu|(X) \leq |\mu|(U) + \varepsilon$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Sea $U \in \mathcal{U}$, tal que, $K \subset U$. Luego, $X \backslash U \subset X \backslash K$ y por (a) se tiene que $|\mu|(X \backslash U) \leq \varepsilon$. De este modo, $|\mu|(X) = |\mu|(U) + |\mu|(X \backslash U) \leq |\mu|(U) + \varepsilon$, concluyendo (b).

$(b) \Rightarrow (a)$: Si $Z \in \mathcal{Z}$, es tal que $Z \subset X \backslash K$, entonces, por (b) se tiene que, $|\mu|(X) = |\mu|(Z) + |\mu|(X \backslash Z) \leq |\mu|(X \backslash Z) + \varepsilon$ y de aquí se concluye que $|\mu|(Z) \leq \varepsilon$.

Por la arbitrariedad de Z, se deduce (a). □

Lema 3.2.12. *Sean $p \in s(E)$ y $m \in M_p(X, E'_p)$. Si para cada $s \in E$, $ms \in M_t(X)$, entonces $m_p \in M_t(X)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la observación 3.2.7 y por un argumento análogo al empleado en 3.2.8, existe una colección $\{Z_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{Z}$, tal que, $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y una colección $\{t_i\}_{i=1}^n \subset E$, tal que, $p(t_i) \leq 1$ y

$$m_p(X) < \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{n} |mt_i(Z_i)|.$$

De acuerdo al lema anterior y a la hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, podemos elegir un conjunto $H_i \in \mathcal{P}$, tal que, $|mt_i|(X) < \frac{\varepsilon}{6n} + |mt_i|(U)$, para cada $U \in \mathcal{U}$, $H_i \subset U$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $K_i := H_i \cap Z_i$. Si $W \in \mathcal{U}$, es tal que $K_i \subset W$, entonces $H_i \subset W \cup (X \backslash Z_i) \in \mathcal{U}$, y de aquí se deduce que:

$$\begin{aligned} |mt_i|(Z_i) + |mt_i|(X \backslash Z_i) = |mt_i|(X) &< \frac{\varepsilon}{6n} + |mt_i|(W \cup (X \backslash Z_i)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6n} + |mt_i|(W) + |mt_i|(X \backslash Z_i). \end{aligned}$$

Luego, $|mt_i|(Z_i) < \frac{\varepsilon}{6n} + |mt_i|(W)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por la regularidad de cada $|mt_i|$ y por el resultado 1.3.3.3, existe $U_i \in \mathcal{U}$, tal que: $Z_i \subset U_i$ y $|mt_i|(U_i) < \frac{\varepsilon}{6n} + |mt_i|(Z_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Aplicando el lema 1.3.2.7, podemos elegir una colección $\{O_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{U}$, tal que, $Z_i \subset O_i \subset U_i$ y $O_i \cap O_j = \emptyset$ para $i \neq j$. De esto, obtenemos que: $|mt_i|(O_i) \leq |mt_i|(U_i) < \frac{\varepsilon}{6n} + |mt_i|(Z_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Sea $K = \bigcup_{i=1}^n K_i \in K(X)$ y $W \in \mathcal{U}$, tal que, $K \subset W$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomemos $V_i := O_i \cap W \in \mathcal{U}$ y definamos $V := \bigcup_{i=1}^n V_i$. Ya que $K_i \subset V_i \subset O_i$, tenemos que: $|mt_i|(V_i) \leq |mt_i|(O_i) \leq |mt_i|(Z_i) + \frac{\varepsilon}{6n} \leq |mt_i|(V_i) + \frac{\varepsilon}{3n}$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Luego, $|mt_i(O_i \backslash V_i)| \leq |mt_i|(O_i \backslash V_i) \leq \frac{\varepsilon}{3n}$ y de este modo: $|mt_i(O_i)| \leq |mt_i(V_i)| + \frac{\varepsilon}{3n}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Como $|mt_i|(O_i \backslash Z_i) \leq \frac{\varepsilon}{6n}$, se tiene que $|mt_i(O_i) - mt_i(Z_i)| = |mt_i(O_i \backslash Z_i)| \leq |mt_i|(O_i \backslash Z_i) < \frac{\varepsilon}{3n}$, y de aquí se concluye que, $|mt_i(Z_i)| < \frac{\varepsilon}{3n} + |mt_i(O_i)|$, para $i = 1, \ldots, n$.

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} m_p(X) < \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^n |mt_i(Z_i)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^n |mt_i(O_i)| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n |mt_i(V_i)| \\ &\leq \varepsilon + m_p(V) \\ &\leq \varepsilon + m_p(W)\,. \end{aligned}$$

Concluimos la demostración, aplicando los lemas 3.2.11 y 3.2.10. □

Lema 3.2.13. *Sean $p \in s(E)$ y $m \in M_p(X, E_p')$. Si $m_p \in M_{\mathcal{P},t}(X)$, entonces, $ms \in M_{\mathcal{P},t}(X)$, para cada $s \in E$.*

Demostración. Sea $s \in E$. Si $p(s) \leq 1$, entonces, $ms(G) \leq m_p(G)$, para todo $G \in \mathcal{B}$. Por otro lado si $p(s) \geq 1$, entonces, $\frac{1}{p(s)} ms(G) \leq m_p(G)$, para todo $G \in \mathcal{B}$.

Luego, en cualquiera de los casos anteriores, si $m_p \in M_{\mathcal{P},t}(X)$, entonces, $ms \in M_{\mathcal{P},t}(X)$. □

Definición 3.2.14. *Para cada $p \in s(E)$, definimos el espacio*

$$M_{\mathcal{P},p,t}(X, E_p') := \{m \in M_p(X, E_p') : m_p \in M_{\mathcal{P},t}(X)\}.$$

Adicionalmente, se definen los espacios:

$$M(X,E') := \bigcup_{p\in s(E)} M_p(X,E'_p)$$

$$M_{\mathcal{P},t}(X,E') := \bigcup_{p\in s(E)} M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p)\,.$$

Sean $p \in s(E)$, $m \in M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p)$, $G \in \mathcal{B}$, $G \neq \emptyset$ y $f : X \to E$ una función arbitraria. Para $\alpha = \{G_1,\ldots,G_n,x_1,\ldots,x_n\} \in \Omega_G$, escribimos

$$\omega_\alpha(f) := \omega_\alpha(f,m) := \sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), f(x_i)\rangle.$$

Definición 3.2.15. *Sean $p \in s(E)$, $m \in M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p)$, $G \in \mathcal{B}$, $G \neq \emptyset$ y f una función arbitraria de X en E. Diremos que f es **m-integrable en G** si existe $\lim_{\alpha\in\Omega_G} \omega_\alpha(f)$.*

*En este caso se define la **integral de f en G respecto a m**, por*

$$\int_G f\,dm := \lim_{\alpha\in\Omega_G} \omega_\alpha(f).$$

Adicionalmente, denotaremos $\int_\emptyset f\,dm := 0$.

Lema 3.2.16. *Sean $p \in s(E)$, $m \in M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p)$, $G \in \mathcal{B}$, $G \neq \emptyset$ y $f \in C_b(X,E)$. La red $(\omega_\alpha(f))_{\alpha\in\Omega_G}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto convergente.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $r > 0$, tal que, $\|f\|_p < r$. Tomemos $K \in \mathcal{P}$, tal que, $m_p(H) \leq \frac{\varepsilon}{r}$, para cada $H \in \mathcal{B}$, $H \subset X\backslash K$.

Ya que $f(K)$ es compacto, existen $x_1,\ldots,x_n \in K$ tales que:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{e \in E : p(e - f(x_i)) \leq \varepsilon\}.$$

Para cada $i = 1,\ldots,n$,

$$V_i := f^{-1}(\{e \in E : p(e - f(x_i)) \leq \varepsilon\}) = \{x \in X : p(f(x) - f(x_i)) \leq \varepsilon\} \in \mathcal{Z}.$$

De este modo, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos $G'_i := V_i \cap G$.

<u>CASO 1:</u> Existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que, $V_i \cap G \neq \emptyset$.

Al definir $G_1 = G'_1$, $G_i = G'_i \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} G_i\right)$, para $i = 2, \ldots, n$, y manteniendo aquellos $G_i \neq \emptyset$, obtenemos una colección de conjuntos de Baire disjuntos a pares, $\{G_1, \ldots, G_k\}$. Definimos $G_{k+1} := G \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{k} G_j\right)$.

<u>CASO 1.1:</u> $G_{k+1} \neq \emptyset$.

La colección $\{G_1, \ldots, G_{k+1}\}$ una $\mathcal{B}$-partición de G, tal que, $G_{k+1} \subset X \backslash K$ y $p(f(x) - f(y)) \leq 2\varepsilon$, para $x, y \in G_i$, con $i = 1, \ldots, k$. Tomemos $y_i \in G_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ y consideremos $\alpha_0 := \{G_1, \ldots, G_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1}\} \in \Omega_G$.

Dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_G$, tales que, $\alpha_0 \preceq \alpha_1, \alpha_2$, se tiene

$$|\omega_{\alpha_1}(f) - \omega_{\alpha_2}(f)| \leq |\omega_{\alpha_1}(f) - \omega_{\alpha_0}(f)| + |\omega_{\alpha_0}(f) - \omega_{\alpha_2}(f)|.$$

Si $\alpha_1 = \{A_1, \ldots, A_n, x_1, \ldots, x_n\}$, entonces, existe una partición $\{J_1, \ldots, J_{k+1}\}$ del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, tal que:

$$G_i = \bigcup_{j \in J_i} A_j,$$

para cada $i \in \{1, \ldots, k+1\}$.

De este modo,

$$\begin{aligned}
|\omega_{\alpha_1}(f) - \omega_{\alpha_0}(f)| &\leq \left| \sum_{j=1}^{n} \langle m(A_j), f(x_j) \rangle - \sum_{i=1}^{k+1} \langle m(G_i), f(y_i) \rangle \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left| \sum_{j \in J_i} \langle m(A_j), f(x_j) \rangle - \langle m(G_i), f(y_i) \rangle \right| \\
&\qquad + \left| \sum_{j \in J_{k+1}} \langle m(A_j), f(x_j) \rangle - \langle m(G_{k+1}), f(y_{k+1}) \rangle \right| \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left| \sum_{j \in J_i} \langle m(A_j), f(x_j) \rangle - \sum_{j \in J_i} \langle m(A_j), f(y_i) \rangle \right| \\
&\qquad + \left| \sum_{j \in J_{k+1}} \langle m(A_j), f(x_j) \rangle - \sum_{j \in J_{k+1}} \langle m(A_j), f(y_{k+1}) \rangle \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\varepsilon \sum_{i=1}^{k} \left| \sum_{j\in J_i} \left\langle m(A_j), \frac{f(x_j)-f(y_i)}{2\varepsilon} \right\rangle \right| \\
&\qquad\qquad\qquad + 2r \left| \sum_{j\in J_{k+1}} \left\langle m(A_j), \frac{f(x_j)-f(y_{k+1})}{2r} \right\rangle \right| \\
&\leq 2\varepsilon \sum_{i=1}^{k} m_p(G_i) + 2r\cdot m_p(G_{k+1}) \\
&\leq 2\varepsilon \sum_{i=1}^{k} m_p(G_i) + 2\varepsilon \\
&= 2\varepsilon \left(m_p\left(\bigcup_{i=1}^{k} G_i \right) + 1 \right) \\
&\leq 2\varepsilon(m_p(X)+1).
\end{aligned}
$$

Análogamente, $|\omega_{\alpha_0}(f)-\omega_{\alpha_2}(f)| \leq 2\varepsilon(m_p(X)+1)$. Luego, $|\omega_{\alpha_1}(f)-\omega_{\alpha_2}(f)| \leq 4\varepsilon(m_p(X)+1)$.

<u>Caso 1.2:</u> $G_{k+1}=\emptyset$, esto es, $G=\bigcup_{i=1}^{k} G_k$.

En este caso, la colección $\{G_1,\ldots,G_k\}$ es una $\mathcal{B}$-partición de G y para cada $i\in\{1,\ldots,k\}$ consideramos $y_i\in G_i$. Definimos $\alpha_0=\{G_1,\ldots,G_k,y_1,\ldots,y_k\}\in\Omega_G$ y procedemos de forma análoga al caso 1.1, concluyendo que, para $\alpha_1,\alpha_2\in\Omega_G$, tales que, $\alpha_0\preceq\alpha_1,\alpha_2$, se tiene $|\omega_{\alpha_1}(f)-\omega_{\alpha_2}(f)|\leq 4\varepsilon(m_p(X)+1)$.

<u>Caso 2:</u> Para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, $V_i\cap G=\emptyset$.

En este caso, $K\cap G\subset(\bigcup_{i=1}^{n} V_i)\cap G=\emptyset$, por tanto, $G\subset X\backslash K$. Luego, $m_p(G)\leq\frac{\varepsilon}{r}$. Elegimos $x\in G$ y definimos $\alpha_0=\{G,x\}\in\Omega_G$. Para $\alpha_1=\{G_i,\ldots,G_n,x_1,\ldots,x_n\}\in\Omega_G$, tal que $\alpha_0\preceq\alpha_1$, se tiene

$$
\begin{aligned}
|\omega_{\alpha_0}(f)-\omega_{\alpha_1}(f)| &= |\langle m(G), f(x)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle m(G_i), f(x_i)\rangle| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n}\langle m(G_i), f(x)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle m(G_i), f(x_i)\rangle \right| \\
&= 2r\sum_{i=1}^{n}\left| \left\langle m(G_i), \frac{f(x)-f(x_i)}{2r} \right\rangle \right| \\
&\leq 2r\cdot m_p(G)\leq 2\varepsilon\leq 2\varepsilon(m_p(X)+1).
\end{aligned}
$$

De este modo, hemos probado que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \Omega_G$, tal que, para $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_G$, tales que, $\alpha_0 \preceq \alpha_1, \alpha_2$, se tiene $|\omega_{\alpha_1}(f) - \omega_{\alpha_2}(f)| \leq 4\varepsilon(m_p(X) + 1)$. $\square$

Proposición 3.2.17. *Sean $p \in s(E)$, $m \in M_{\mathcal{P},p,t}(X, E'_p)$, $G, G_1, G_2 \in \mathcal{B}$ y $f \in C_b(X, E)$. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) f es m-integrable en G.

(b) Si G_1, G_2 son disjuntos, entonces, $\displaystyle\int_{G_1 \cup G_2} f\, dm = \int_{G_1} f\, dm + \int_{G_2} f\, dm$.

(c) $\displaystyle\left|\int_G f\, dm\right| \leq m_p(G) \sup_{x \in G}\{p(f(x))\}$

Demostración. La afirmación (a) es consecuencia del resultado anterior.

Probemos (b). El caso en que G_1 o G_2 es el conjunto vacío, es inmediato. Supongamos que G_1 y G_2 son distintos del conjunto vacío. Dado $\varepsilon > 0$, existen $\alpha_{1,0} = \{V_1, \ldots, V_n, x_1, \ldots, x_n\} \in \Omega_{G_1}, \alpha_{2,0} = \{W_1, \ldots, W_m, y_1, \ldots, y_m\} \in \Omega_{G_2}$, tales que:

$$\left|\int_{G_1} f\, dm - \omega_{\alpha_1}(f)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left|\int_{G_2} f\, dm - \omega_{\alpha_2}(f)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para $\alpha_1 \in \Omega_{G_1}, \alpha_2 \in \Omega_{G_2}$, tales que, $\alpha_{1,0} \preceq \alpha_1$ y $\alpha_{2,0} \preceq \alpha_2$.

Consideremos

$$\alpha_{1,0} \cup \alpha_{2,0} := \{V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_m, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\} \in \Omega_{G_1 \cup G_2}.$$

Si $\alpha := \{S_1, \ldots, S_k, s_1, \ldots, y_m\} \in \Omega_{G_1 \cup G_2}$, es tal que, $\alpha_{1,0} \cup \alpha_{2,0} \preceq \alpha$, entonces, podemos realizar una descomposición de la forma $\alpha = \alpha'_1 \cup \alpha'_2$, donde $\alpha'_1 \in \Omega_{G_1}$, $\alpha'_2 \in \Omega_{G_2}$, tales que, $\alpha_{1,0} \preceq \alpha'_1$ y $\alpha_{2,0} \preceq \alpha'_2$.

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{G_1} f\, dm + \int_{G_2} f\, dm - \omega_\alpha(f)\right| &= \left|\int_{G_1} f\, dm + \int_{G_2} f\, dm - (\omega_{\alpha'_1}(f) + \omega_{\alpha'_2}(f))\right| \\
&\leq \left|\int_{G_1} f\, dm - \omega_{\alpha'_1}(f)\right| + \left|\int_{G_2} f\, dm - \omega_{\alpha'_2}(f)\right| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ya que la red $(\omega_\alpha(f))_{\alpha\in\Omega_{G_1\cup G_2}}$ converge a un único valor real, se concluye que,

$$\int_{G_1\cup G_2} f\,dm = \lim_{\alpha\in\Omega_{G_1\cup G_2}} \omega_\alpha(f) = \int_{G_1} f\,dm + \int_{G_2} f\,dm\,.$$

Probemos (c): Sea $\alpha = \{G_1, \ldots, G_n, x_1, \ldots, x_n\} \in \Omega_G$. Se tiene que:

$$\left|\left|\int_G f\,dm\right| - \left|\omega_\alpha(f)\right|\right| \leq \left|\int_G f\,dm - \omega_\alpha(f)\right|.$$

Por lo tanto, $\lim_{\alpha\in\Omega_G} |\omega_\alpha(f)| = \left|\int_G f\,dm\right|$. Ponemos $s = \sup\{p(f(x)) : x \in G\}$.

Si $s = 0$, entonces, se tiene que:

$$|\omega_\alpha(f)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle m(G_i), f(x_i)\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} \|m(G_i)\| p(f(x_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} \|m(G_i)\| s = 0 = m_p(G)\cdot s,$$

donde $\|m(G_i)\| = \sup\{|\langle m(G_i), s\rangle| : p(s) \leq 1\} < \infty$, pues $m(G_i) \in E'_p$.

Si $s \neq 0$, entonces

$$|\omega_\alpha(f)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle m(G_i), f(x_i)\rangle| = s\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle m(G_i), \frac{f(x_i)}{s}\right\rangle\right| \leq s\cdot m_p(G).$$

Por la arbitrariedad de α, en ambos casos se deduce que $\left|\int_G f\,dm\right| \leq s\cdot m_p(G)$. □

Observación 3.2.18. *Notar que si $E = \mathbb{R}$, entonces, debido al lema 3.2.3, la integral definida en 3.2.15 coincide con la definida en [2], [1] y [12].*

Proposición 3.2.19. *Sean $\varepsilon > 0$, $K \in K(X)$ y $p \in s(E)$. Ponemos $W = \{f \in C_b(X, E) : \|f\|_p \leq 1$ y $f|_K = 0\}$. Para $m \in M_p(X, E'_p)$, tal que $m_p \in M_t(X)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $m_p(G) \leq \varepsilon$, para cada $G \in \mathcal{B}$, tal que, $G \subset X\backslash K$.

(b) $\left|\int_X f\,dm\right| \leq \varepsilon$, para cada $f \in W$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Sean $\varepsilon_1 > 0$ y $f \in W$. Consideremos el conjunto $Z := \{x \in X : p(f(x)) \geq \varepsilon_1\}$. Se tiene que $Z \in \mathcal{Z}$ y $Z \subset X\backslash K$. De este modo, aplicando la proposición anterior, obtenemos:

$$\left|\int_X f\,dm\right| \leq \left|\int_Z f\,dm\right| + \left|\int_{X\backslash Z} f\,dm\right| \leq m_p(Z) + \varepsilon_1\cdot m_p(X\backslash Z) \leq \varepsilon + \varepsilon_1\cdot m_p(X).$$

Como $\varepsilon_1 > 0$ es arbitrario, tenemos que $\left|\int_X f\, dm\right| \leq \varepsilon$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Por la regularidad de m_p, es suficiente probar que: $m_p(Z) \leq \varepsilon$, para cada $Z \in \mathcal{Z}$, tal que, $Z \subset X \backslash K$. Sea $Z \in \mathcal{Z}$, tal que, $Z \subset X \backslash K$. Existe $h \in C_b(X)$, tal que, $0 \leq h \leq \mathscr{X}_X$, $h(Z) = \{0\}$ y $h(K) = \{1\}$. Si escribimos $U = \{x \in X : h(x) < \frac{1}{2}\}$, entonces $U \in \mathcal{U}$ y $Z \subset U \subset X \backslash K$. Para $\varepsilon_1 > 0$, existe $\{G_1, \ldots, G_n\} \in \Pi(Z)$ y $\{s_i\}_{i=1}^n \subset E$, tales que, $p(s_i) \leq 1$ y

$$m_p(Z) < \sum_{i=1}^n ms_i(G_i) + \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Por la regularidad de las medidas ms_i^+ $(i = 1, \ldots, n)$, existen $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{Z}$, tales que, $Z_i \subset G_i$ y

$$\begin{aligned} ms_i(G_i) - \frac{\varepsilon_1}{2n} &= ms_i^+(G_i) - ms_i^-(G_i) - \frac{\varepsilon_1}{2n} \\ &\leq ms_i^+(Z_i) - ms_i^-(Z_i) \\ &= ms_i(Z_i) \end{aligned}$$

Así,

$$m_p(Z) \leq \sum_{i=1}^n ms_i(Z_i) + \varepsilon_1.$$

Nuevamente por la regularidad de m_p, por el lema 1.3.3.3 y por 1.3.2.7, existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ disjuntos a pares, tales que: $Z_i \subset U_i \subset U$ y

$$m_p(U_i) < \frac{\varepsilon_1}{n} + m_p(Z_i).$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^n m_p(U_i \backslash Z_i) < \varepsilon_1.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, aplicamos el lema 1.3.2.6 y tomamos $h_i \in C_b(X)$, tal que, $0 \leq h_i \leq \mathscr{X}_X$, $h_i(Z_i) = \{1\}$ y $h_i(X \backslash U_i) = \{0\}$. Si consideramos la función $f = \sum_{i=1}^n h_i \otimes s_i$, entonces, $f \in W$. En efecto, si $x \in X$ es tal que $f(x) \neq 0$, entonces, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, para el cual, $x \in U_i$. Ya que los conjuntos U_j son disjuntos a pares, se tiene que $h_j(x) = 0$, para $j \neq i$. De este modo, $p(f(x)) = p(h_i(x)s_i) \leq p(s_i) \leq 1$.

Luego, por hipótesis, $\left|\int_X f\,dm\right| \leq \varepsilon$. Como $f = 0$ en $X\backslash(\bigcup_{i=1}^n U_i)$ y $f = s_i$ en Z_i, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f\,dm\right| = \left|\int_{\bigcup_{i=1}^n U_i} f\,dm\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{U_i} f\,dm\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{Z_i} f\,dm + \sum_{i=1}^n \int_{U_i\backslash Z_i} f\,dm\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n ms_i(Z_i) + \sum_{i=1}^n \int_{U_i\backslash Z_i} f\,dm\right| \\
&\geq \left|\sum_{i=1}^n ms_i(Z_i)\right| - \left|\sum_{i=1}^n \int_{U_i\backslash Z_i} f\,dm\right| \\
&\geq m_p(Z) - \varepsilon_1 - \sum_{i=1}^n ms_i(U_i\backslash Z_i) \\
&\geq m_p(Z) - 2\varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\varepsilon_1 > 0$ es arbitrario, se concluye que $m_p(Z) \leq \varepsilon$. □

3.3. Representación integral de funcionales lineales $\beta_{\mathcal{P}}$-continuas sobre $C_b(X,E)$.

En esta sección mostraremos que cada funcional lineal $\beta_{\mathcal{P}}$-continua sobre $C_b(X,E)$, tiene una representación de operador integral con respecto a una única medida en $M_{\mathcal{P},t}(X,E')$. Este trabajo es mencionado por J. Zafarani en [31] y está basado en el trabajo de A. Katsaras presentado en [14].

El siguiente teorema es uno de los primeros resultados de representación integral de funcionales sobre $C_b(X)$ y fue presentado al inicio de los años 40' por A. Alexandroff.

Teorema 3.3.1 (Teorema de representación de Alexandroff).

La aplicación lineal $T : (M(X), \|\cdot\|_*) \to (C_b(X), \tau_{\|\cdot\|})'$ *definida por*

$$T(\mu)(f) = \int_X f\,d\mu,$$

es un isomorfismo isométrico, es decir, satisface la igualdad:

$$\|\mu\|_* = \|T\|_\infty := \sup\{|T(f)| : \|f\| \leq 1\}.$$

Puede encontrarse una demostración autocontenida de este teorema en [29, página 115, 5.1]. En el año 1965, V. Varadarajan mostró en [28, página 179, teorema 29], el siguiente resultado:

Teorema 3.3.2. *Sean $\psi \in (C_b(X), \tau_{\|\cdot\|})'$ y $\mu \in M(X)$ tales que, $\psi(f) = \int_X f\, d\mu$, para cada $f \in C_b(X)$. Entonces, la funcional ψ es tight, si y solo si, μ es una medida tight.*

Luego, en el año 1972, F. Sentilles definió en [24] la topología γ_0 (llamándola topología subestricta y denotándola por β_0) y probó que $(C_b(X), \gamma_0)' = M_t(X)$ ([24, página 320, teorema 4.4]). Utilizando estos tres resultados, podemos enunciar el siguiente corolario:

Corolario 3.3.3 (Teorema de representación para funcionales γ_0-continuas en $C_b(X)$)**.**

La aplicación lineal $T : M_t(X) \to (C_b(X), \gamma_0)'$ *definida por*

$$T(\mu)(f) = \int_X f\, d\mu.$$

es biyectiva y satisface la igualdad $\|\mu\|_* = \|T\|_\infty$.

Denotaremos por $C_{rc}(X, E)$, al espacio de funciones

$$\{f \in C_b(X, E) : f(X) \text{ es relativamente compacto}\}.$$

En el año 1974, A. Katsaras presentó en [13], la siguiente generalización del teorema de representación de Alexandroff:

Teorema 3.3.4.

La aplicación lineal $T : M(X, E') \to (C_{rc}(X, E), \tau_u)'$ *definida por*

$$T(m)(f) = \int_X f\, dm,$$

es biyectiva.

Dos años después, A.Katsaras en [14], define sobre el espacio $C_{rc}(X,E)$ la topología $\beta_{\mathscr{F}}$, la cuál resulta ser la topología de subespacio inducida por la topología $\beta_{\mathcal{P}}$. Denotaremos a la topología $\beta_{\mathscr{F}}$ simplemente por $\beta_{\mathcal{P}}$. En dicho artículo, se demuestra el siguiente teorema de representación.

Teorema 3.3.5.

La aplicación lineal $T : M_{\mathcal{P},t}(X,E') \to (C_{rc}(X,E),\beta_{\mathcal{P}})'$ *definida por*

$$T(m)(f) = \int_X f\,dm,$$

es biyectiva.

A continuación, generalizaremos este resultado al espacio dual $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})'$.

Sean $\psi : C_b(X,E) \to \mathbb{R}$ una funcional lineal τ_u-continua y $p \in s(E)$. Denotaremos $\|\psi\|_{p,\infty} := \sup\{|\psi(f)| : \|f\|_p \leq 1\}$.

Proposición 3.3.6. *Si* $m \in M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p)$ *y* $D \in \mathcal{B}$*, entonces la aplicación* $\psi_m : C_b(X,E) \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$\psi_m(f) := \int_D f\,dm,$$

pertenece al dual $(C_b(X,E),\beta_p(\mathcal{P}))'$*. Además,*

$$\|\psi_m\|_{p,\infty} = m_p(D).$$

Demostración. La aplicación ψ_m claramente es lineal. Mostraremos que ψ_m es β_p-continua. Sean $\varepsilon > 0$ y $r > 0$, tales que, $r \cdot m_p(X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $K \in \mathcal{P}$, tal que, $m_p(G) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $G \in \mathcal{B}$, $G \subset X\backslash K$. Tomemos $f \in C_b(X,E)$, tal que, $\|f\|_p \leq 1$ y $\|f\|_{p,K} \leq r$. El conjunto $G := \{x \in X : p(f(x)) \leq r\} \in \mathcal{Z}$, contiene a K. Por tanto, $D\backslash G \subset X\backslash G \subset X\backslash K$.

Aplicando el lema 3.2.17, tenemos que:

$$\left|\int_{D\cap G} f\,dm\right| \leq \sup_{x\in D\cap G}\{p(f(x))\} \cdot m_p(D\cap G) \leq r \cdot m_p(X) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Análogamente,

$$\left|\int_{D\setminus G} f\,dm\right| \leq \|f\|_p \cdot m_p(X\setminus G) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

De este modo,

$$|\psi_m(f)| \leq \left|\int_{D\cap G} f\,dm\right| + \left|\int_{D\setminus G} f\,dm\right| \leq \varepsilon.$$

Luego, por lema 3.1.2, la aplicación ψ_m es $\mathcal{P}_p$-tight. Aplicando el corolario 3.1.5, se concluye la β_p-continuidad de ψ_m.

Ahora probaremos la igualdad $\|\psi_m\|_{p,\infty} = m_p(D)$. Si $f \in C_b(X,E)$, es tal que, $\|f\|_p \leq 1$, entonces

$$|\psi_m(f)| = \left|\int_D f\,dm\right| \leq \|f\|_p \cdot m_p(D) \leq m_p(D)\,.$$

Por lo tanto, $\|\psi_m\|_{p,\infty} \leq m_p(D)$. Para probar que $m_p(D) \leq \|\psi_m\|_{p,\infty}$, debido a la definición de la medida m_p y la regularidad de las medidas $|me|$ para $e \in E$, es suficiente mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$, $\sum_{i=1}^n me_i(Z_i) \leq \|\psi_m\|_{p,\infty} + \varepsilon$, donde $\{Z_i\}_i^n$ es una colección finita y arbitraria de elementos de $\mathcal{Z}$, disjuntos a pares, tales que, $Z_i \subset D$ y donde $\{e_i\}_i^n$ es una colección finita y arbitraria en E, tal que, $p(e_i) \leq 1$ y $me_i(Z_i) \geq 0$ para $i = 1,\ldots,n$.

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos colecciones $\{Z_i\}_i^n$ y $\{e_i\}_i^n$ como las mencionadas arriba. Por la regularidad de m_p y por los lemas 1.3.3.3 y 1.3.2.7, podemos elegir una colección $\{U_i\}_i^n \subset \mathcal{U}$, disjunta a pares, tales que: $Z_i \subset U_i$ y $m_p(U_i) < \frac{\varepsilon}{n} + m_p(Z_i)$ para $i = 1,\ldots,n$.

Definimos $D_i := D \cap U_i$. Luego, $m_p(D_i\setminus Z_i) \leq m_p(U_i\setminus Z_i) < \frac{\varepsilon}{n}$. Por el lema 1.3.2.6, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, podemos tomar $f_i \in C_b(X)$, tal que, $0 \leq f \leq \mathscr{X}_X$, $f_i(Z_i) = \{1\}$ y $f_i(X\setminus U_i) = \{0\}$.

Como $\sum_{i=1}^n f_i \otimes e_i = 0$ en $X\setminus(\bigcup_{i=1}^n U_i)$ y ya que los U_i son disjuntos, se tiene que $\|\sum_{i=1}^n f_i \otimes e_i\|_p \leq 1$. De este modo, ya que $\sum_{i=1}^n f_i \otimes e_i = 0$ en $D\setminus(\bigcup_{i=1}^n D_i)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left|\psi_m\left(\sum_{i=1}^n f_i\otimes e_i\right)\right| &= \left|\int_D \sum_{i=1}^n f_i\otimes e_i\,dm\right| \\
&= \left|\int_{\bigcup_{i=1}^n D_i} \sum_{i=1}^n f_i\otimes e_i\,dm\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{D_i} f_i\otimes e_i\,dm\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{Z_i} f_i\otimes e_i\,dm + \sum_{i=1}^n \int_{D_i\setminus Z_i} f_i\otimes e_i\,dm\right| \\
&\geq \left|\sum_{i=1}^n \int_{Z_i} f_i\otimes e_i\,dm\right| - \left|\sum_{i=1}^n \int_{D_i\setminus Z_i} f_i\otimes e_i\,dm\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n me_i(Z_i)\right| - \left|\sum_{i=1}^n \int_{D_i\setminus Z_i} f_i\otimes e_i\,dm\right|
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n me_i(Z_i) &\leq \left|\psi_m\left(\sum_{i=1}^n f_i\otimes e_i\right)\right| + \left|\sum_{i=1}^n \int_{D_i\setminus Z_i} f_i\otimes e_i\,dm\right| \\
&\leq \|\psi_m\|_{p,\infty} + \sum_{i=1}^n m_p(D_i\setminus Z_i) \\
&\leq \|\psi_m\|_{p,\infty} + \varepsilon \\
&\leq \|\psi_m\|_{p,\infty} + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.3.7. *Si $\psi\in(C_b(X,E),\beta_p(\mathcal{P}))'$, entonces, existe $m\in M_{\mathcal{P},p,t}(X,E_p')$ tal que*

$$\psi(f)=\int_X f\,dm\,.$$

Demostración. Sea $\psi\in(C_b(X,E),\beta_p(\mathcal{P}))'$. Luego, ψ es u_p-continua, es decir, $\|\psi\|_{p,\infty}<\infty$.

<u>Paso 1:</u> Definiremos una aplicación $m:\mathcal{B}\to E_p'$.

Para cada $e\in E$, consideramos la funcional lineal $\psi_e:C_b(X)\to\mathbb{R}$, definida por $\psi_e(f):=\psi(f\otimes e)$. Si definimos la aplicación $S:C_b(X)\to C_b(X,E)$, $S(f)=f\otimes e$, entonces, por el lema 2.3.6.b, la funcional $\psi_e=\psi\circ S$ es $\gamma_{\mathcal{P}}$-continua.

Por lo tanto, $\psi_e \in (C_b(X),\gamma_0)'$. Aplicando el corolario 3.3.3, existe $m_e \in M_t(X)$, talque, $\psi_e(f) = \int_X f\,dm_e$, para cada $f \in C_b(X)$.

Notar que, para $f \in C_b(X)$, $\|f\| \le 1$, se tiene

$$|\psi_e(f)| = |\psi(f \otimes e)| \le \|\psi\|_{p,\infty}\|f\|p(e) \le \|\psi\|_{p,\infty}p(e).$$

Luego,

$$|m_e|(X) = \|m_e\|_* = \|\psi_e\| \le \|\psi\|_{p,\infty}p(e). \tag{3.2}$$

Para cada $A \in \mathcal{B}$, definimos la aplicación $m(A) : E \to \mathbb{R}$ por $\langle m(A), e\rangle := m_e(A)$. Mostremos que $m(A) \in E'_p$. Sean $e_1, e_2 \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Para cada $f \in C_b(X)$, se tiene que $\psi_{e_1+\lambda e_2}(f) = \psi(f \otimes (e_1+\lambda e_2)) = \psi(f\otimes e_1) + \lambda\psi(f \otimes e_2) = \psi_{e_1}(f) + \lambda\psi_{e_2}(f)$.

De este modo, para cada $f \in C_b(X)$,

$$\int_X f\,dm_{e_1+\lambda e_2} = \int_X f\,dm_{e_1} + \lambda\int_X f\,dm_{e_2}\,.$$

Ocuparemos las siguientes abreviaciones: $m_1 = m_{e_1}$, $m_2 = m_{e_2}$ y $m_3 = m_{e_1+\lambda e_2}$. Sean $Z \in \mathcal{Z}$ y $\varepsilon > 0$. Por la regularidad de las medidas $|m_1|, |m_2|$ y $|m_3|$, existen U_1, U_2 y U_3 en $\mathcal{U}$, tales que, $Z \subset U_i$ y $|m_i|(U_i\backslash Z) < \varepsilon$ $(i = 1,2,3)$. Consideremos $U := U_1 \cap U_2 \cap U_3$ y $g \in C_b(X)$, tal que, $0 \le g \le \mathscr{X}_X$, $Z = g^{-1}(\{1\})$ y $X\backslash U = g^{-1}(\{0\})$.

Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\int_X g\,dm_3 &= \int_X g\,dm_1 + \lambda\int_X g\,dm_2\\
\Longrightarrow \int_U g\,dm_3 &= \int_U g\,dm_1 + \lambda\int_U g\,dm_2\\
\Longrightarrow \int_Z g\,dm_3 + \int_{U\backslash Z} g\,dm_3 &= \int_Z g\,dm_1 + \int_{U\backslash Z} g\,dm_1 + \lambda\int_Z g\,dm_2 + \lambda\int_{U\backslash Z} g\,dm_2\\
\Longrightarrow m_3(Z) - m_1(Z) - \lambda m_2(Z) &= \int_{U\backslash Z} g\,dm_1 + \lambda\int_{U\backslash Z} g\,dm_2 - \int_{U\backslash Z} g\,dm_3
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |m_3(Z) - m_1(Z) - \lambda m_2(Z)| \le |m_1|(U\backslash Z) + |\lambda||m_2|(U\backslash Z) + |m_3|(U\backslash Z)$$

$$\Longrightarrow |m_3(Z) - m_1(Z) - \lambda m_2(Z)| \le \varepsilon + |\lambda|\varepsilon + \varepsilon.$$

Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, se tiene que, $m_3(Z) = m_1(Z) + \lambda m_2(Z)$, para cada $Z \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto, $m_3 = m_1 + \lambda m_2$, es decir, $m_{e_1+\lambda e_2} = m_{e_1} + \lambda m_{e_2}$.

Luego, $\langle m(A), e_1 + \lambda e_2\rangle = \langle m(A), e_1\rangle + \lambda\langle m(A), e_2\rangle$, mostrando la linealidad de $m(A)$. Afirmamos que $m(A)$ es p-continua. En efecto, por (3.2), se tiene que $|\langle m(A), e\rangle| = |m_e(A)| \leq |m_e|(A) \leq |m_e|(X) \leq \|\psi\|_{p,\infty} p(e)$.

Definimos la aplicación $m : \mathcal{B} \to E'_p$, $A \mapsto m(A)$.

<u>Paso 2:</u> Mostraremos que $m \in M_p(X, E'_p)$.

Por construcción, para cada $e \in E$, se tiene $me = m_e \in M_t(X) \subset M(X)$.

Primero probaremos que $m_p(X) \leq \|\psi\|_{p,\infty}$. Debido a la definición de la medida m_p y a la regularidad de las medidas $|me|$ para $e \in E$, es suficiente mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$, $\sum_{i=1}^n me_i(Z_i) \leq \|\psi\|_{p,\infty} + \varepsilon$, donde $\{Z_i\}_i^n$ es una colección finita y arbitraria de elementos de $\mathcal{Z}$ disjuntos a pares y $\{e_i\}_i^n$ es una colección finita y arbitraria en E, tal que, $p(e_i) \leq 1$ y $me_i(Z_i) \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Sean $\{Z_i\}_{i=1}^n$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$, colecciones como las mencionadas arriba. Sea $\varepsilon > 0$. Por la regularidad de m_p y por los lemas 1.3.3.3 y 1.3.2.7, podemos elegir una colección $\{U_i\}_i^n \subset \mathcal{U}$, disjunta a pares, tales que: $Z_i \subset D_i$ y $m_p(U_i) < \frac{\varepsilon}{n} + m_p(Z_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.

Luego, $m_p(U_i \backslash Z_i) < \frac{\varepsilon}{n}$. Por el lema 1.3.2.6, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, podemos tomar $f_i \in C_b(X)$, tal que, $0 \leq f \leq \mathscr{X}_X$, $f_i(Z_i) = \{1\}$ y $f_i(X \backslash U_i) = \{0\}$.

Como $\sum_{i=1}^n f_i = 0$ en $X \backslash (\bigcup_{i=1}^n U_i)$ y ya que los U_i son disjuntos, se tiene que $\|\sum_{i=1}^n f_i \otimes e_i\|_p \leq 1$. De este modo,

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n \psi_{e_i}(f_i)\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_X f_i \, dm_{e_i}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{U_i} f_i \, dm_{e_i}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{Z_i} f_i \, dm_{e_i} + \sum_{i=1}^n \int_{U_i \backslash Z_i} f_i \, dm_{e_i}\right| \\
&\geq \left|\sum_{i=1}^n \int_{Z_i} f_i \, dm_{e_i}\right| - \left|\sum_{i=1}^n \int_{U_i \backslash Z_i} f_i \, dm_{e_i}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n me_i(Z_i)\right| - \left|\sum_{i=1}^n \int_{U_i \backslash Z_i} f_i \, dme_i\right|
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} me_i(Z_i) &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} \psi_{e_i}(f_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{U_i\setminus Z_i} f_i\, dme_i\right| \\ &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} \psi(f_i\otimes e_i)\right| + \sum_{i=1}^{n} |me_i|(U_i\setminus Z_i) \\ &\leq \|\psi\|_{p,\infty} + \varepsilon\end{aligned}$$

Por la observación 3.2.5, se tiene que m es finitamente aditiva. Luego, se concluye que $m \in M_p(X, E'_p)$.

<u>Paso 3:</u> Mostremos que $\psi(f) = \int_X f\, dm$, para cada $f \in C_b(X,E)$.

Sean $f \in C_b(X)$, $e \in E$ y $\alpha = \{A_1,\ldots,A_n,s_1,\ldots,s_n\} \in \Omega_X$. Se satisface la igualdad

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(f,m_e) = \sum_{i=1}^{n} m_e(A_i)f(s_i) &= \sum_{i=1}^{n}\langle m(A_i),e\rangle f(s_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle m(A_i), f(s_i)e\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle m(A_i),(f\otimes e)(s_i)\rangle = \omega_\alpha(f\otimes e, m).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\psi(f\otimes e) = \psi_e(f) = \int_X f\, dm_e = \int_X f\otimes e\, dm\,.$$

Luego, podemos concluir que

$$\psi(g) = \int_X g\, dm\,,$$

para cada $g \in C_b(X)\otimes E$.

Ya que $me \in M_t(X)$, para cada $e \in E$, por el resultado 3.2.12, se tiene que $m_p \in M_t(X)$ y por 3.3.6, la funcional $\psi_m : C_b(X,E) \to \mathbb{R}$, $\psi_m(f) = \int_X f\, dm$ es $\beta_p(K(X))$-continua. Debido a que el espacio $C_b(X)\otimes E$ es $\beta_p(K(X))$-denso en $C_b(X,E)$ y $\psi(g) = \psi_m(g)$ para cada $g \in C_b(X)\otimes E$, se deduce que $\psi(f) = \int_X f\, dm$, para todo $f \in C_b(X,E)$.

<u>Paso 4</u>: Mostraremos que $m_p \in M_{\mathcal{P},t}(X)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $V := \{f \in C_b(X,E) : |\int_X f\,dm| \leq \varepsilon\}$. Por la $\beta_p(\mathcal{P})$-continuidad de ψ, se deduce que V es una $\beta_p(\mathcal{P})$-vecindad de 0. Ya que las topologías $\beta_p(\mathcal{P})$ y $\tau_p(\mathcal{P})$ coinciden en los conjuntos u_p-acotados, existen $K \in \mathcal{P}$ y $\delta > 0$ tales que:

$$\{f \in C_b(X,E) : \|f\|_{p,K} \leq \delta, \|f\|_p \leq 1\} \subset V.$$

Como el conjunto W del lema 3.2.19 esta contenido en V, tenemos que $m_p(G) \leq \varepsilon$, para cada $G \in \mathcal{B}$, $G \subset X \backslash K$. Por lo tanto $m_p \in M_{\mathcal{P},t}(X)$. □

En consecuencia de los dos resultados anteriores, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.8. *La aplicación lineal* $T : M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p) \to (C_b(X,E),\beta_p(\mathcal{P}))'$*, definida por*

$$T(m)(f) = \int_X f\,dm$$

es biyectiva y satisface la igualdad

$$m_p(X) = \|T(m)\|_{p,\infty}.$$

Demostración. Por 3.3.6, la aplicación T está bien definida y satisface la igualdad $m_p(X) = \|T(m)\|_{p,\infty}$ para cada $m \in M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p)$. La sobreyectividad de T se debe a 3.3.7. La linealidad de T es clara.

Mostremos que T es inyectiva. Sea $m \in M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p)$, tal que $T(m) = 0$, es decir, $\int_X f\,dm = 0$, para cada $f \in C_b(X,E)$. Luego, $0 = \|T(m)\|_{p,\infty} = m_p(X)$. Sea $G \in \mathcal{B}$ y $s \in E$. Si $p(s) = 0$, entonces, $|\langle m(G), s\rangle| \leq m_p(G) \leq m_p(X) = 0$. Si $p(s) \neq 0$, entonces $|\langle m(G), \frac{s}{p(s)}\rangle| \leq m_p(G) \leq m_p(X) = 0$.

Por lo tanto, para cada $s \in E$, se tiene que $\langle m(G), s\rangle = 0$. De este modo, $m(G) = 0$. El resultado se sigue de la arbitrariedad de $G \in \mathcal{B}$. □

Finalmente podemos caracterizar el dual de $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ como un espacio de medidas.

Corolario 3.3.9. $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})' = \bigcup_{p \in s(E)} M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p) = M_{\mathcal{P},t}(X,E')$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los corolarios 3.1.7 y 3.3.8. □

3.4. Equicontinuidad en el espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})'$.

En esta sección caracterizaremos a los subconjuntos $\beta_{\mathcal{P}}$-equicontinuos de $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})'$.

Definición 3.4.1. *Un subconjunto H de $M(X)$ es llamado $\mathcal{P}$-tight si satisface las siguientes condiciones:*

(a) H es acotado por la norma en $M(X)$.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathcal{P}$, tal que, $|\mu|(G) < \varepsilon$ para cada $\mu \in H$ y cada $G \in \mathcal{B}$, $G \subset X \backslash K$.

Esta definición, se relaciona con la definición de medida $\mathcal{P}$-tight en la siguiente forma: para $\mu \in M(X)$, μ es $\mathcal{P}$-tight, si y solo si, $\{\mu\}$ es $\mathcal{P}$-tight.

Definición 3.4.2. *Un subconjunto H de $M(X,E')$ es llamado $\mathcal{P}$-tight, si existe $p \in s(E)$, tal que:*

(a) $H \subset M_p(X,E'_p)$ y

(b) El conjunto $H_p := \{m_p : m \in H\}$ es $\mathcal{P}$-tight en $M(X)$.

Notemos que para $m \in M(X,E')$, el conjunto $\{m\}$ es $\mathcal{P}$-tight, si y solo si, existe $p \in s(E)$, tal que, $m \in M_{\mathcal{P},p,t}(X,E'_p)$. En otras palabras, el espacio $M_{\mathcal{P},t}(X,E')$ es el conjunto de todas las medidas $m \in M(X,E')$, tales que $\{m\}$ es $\mathcal{P}$-tight.

Teorema 3.4.3. *Para todo subconjunto H de $M_{\mathcal{P},t}(X,E') = (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})'$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) H es $\beta_{\mathcal{P}}$-equicontinuo.

(b) H es $\mathcal{P}$-tight.

(c) Existen $p \in s(E)$ y $r > 0$, tales que:

(i) $H \subset M_p(X,E'_p)$,

(ii) $\|m_p\|_* \leq r$, para cada $m \in H$ y

(iii) *Dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $K \in \mathcal{P}$*, tal que,* $|\int_X f, dm| \leq \varepsilon$*, para cada* $m \in H$ *y cada* $f \in C_b(X,E)$*, con* $\|f\|_p \leq 1$ *y* $f = 0$ *en* K*.*

Demostración. Debido a 3.2.19, las afirmaciones (b) y (c) son equivalentes.

$(a) \Rightarrow (b)$: Supongamos que H es $\beta_{\mathcal{P}}$-equicontinuo. Luego, existe $p \in s(E)$, tal que, H es β_p-equicontinuo y de este modo se deduce que $H \subset M_p(X,E'_p)$. Sea $H_0 = \{f \in C_b(X,E) : |\psi(f)| \leq 1, \forall \psi \in H\}$ el polar de H, respecto a la dualidad $\langle (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}}), M_{\mathcal{P},t}(X,E')\rangle$.

Luego, H_0 es una β_p-vecindad de 0. Sea $\varepsilon > 0$. Por 2.7.5, existen $K \in \mathcal{P}$ y $\delta > 0$, tales que:

$$V := \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leq 1, \|f\|_{p,K} \leq \delta\} \subset \varepsilon H_0.$$

De esto, se deduce que $|\int_X f\, dm| \leq \varepsilon$, para cada $m \in H$, y cada $f \in C_b(X,E)$, tal que, $\|f\|_p \leq 1$ y $f = 0$ en K. Aplicando 3.2.19, se tiene que $m_p(G) \leq \varepsilon$, para $G \in \mathcal{B}$, $G \subset X\backslash K$ y cada $m \in H$. Ahora resta probar que $\sup\{\|m_p\|_* : m \in H\} < \infty$.

Sean $K_0 \in \mathcal{P}$ y $0 < \delta_0$ tales que:

$$W := \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leq 1, \|f\|_{p,K_0} \leq \delta_0\} \subset H_0.$$

Notemos que si $\|f\|_p \leq \delta_0$, entonces $f \in W$ y de aquí, se tiene que $|\int_X f\, dm| \leq 1$ para cada $m \in H$. De este modo, para cada $m \in H$ se tiene

$$\|m_p\|_* = m_p(X) = \sup\left\{\left|\int_X f\, dm\right| : \|f\|_p \leq 1\right\} \leq \frac{1}{\delta_0}.$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Sea $p \in s(E)$, tal que $H \subset M_p(X,E'_p)$ y $\{m_p : m \in H\}$ es $\mathcal{P}$-tight. Sea $d = \sup\{\|m_p\|_* : m \in H\}$. Dado $r > 0$, existe $K \in \mathcal{P}$, tal que: $m_p(G) \leq \frac{1}{2r}$, para cada $m \in H$ y cada $G \in \mathcal{B}$, $G \subset X\backslash K$.

Sea $V := \{f \in C_b(X,E) : \|f\|_p \leq r, \|f\|_{p,K} \leq \frac{1}{2d}\}$. Si $f \in V$ y $m \in H$, entonces, $|\int_X f\, dm| \leq 1$. En efecto, sea $N := \{x \in X : p(f(x)) > \frac{1}{2d}\}$. Se tiene que $N \in \mathcal{U}$ y $N \subset X\backslash K$. Luego, $m_p(N) \leq \frac{1}{2r}$. De este modo,

$$\left|\int_X f\, dm\right| \leq \left|\int_N f\, dm\right| + \left|\int_{X\backslash N} f\, dm\right| \leq \|f\|_p m_p(N) + \frac{1}{2d} m_p(X\backslash N) \leq r \cdot \frac{1}{2r} + \frac{1}{2d} \cdot d = 1.$$

Esto prueba que $V \subset H_0$ y luego por 2.7.5, H_0 es una β_p-vecindad de 0. Por lo tanto, H_0 es una $\beta_{\mathcal{P}}$-vecindad de 0, completando la demostración. $\square$

3.5. Operadores lineales en $(C_b(X), \gamma_{\mathcal{P}})$.

Sea F un espacio Frechet cuya topología se denotará por τ_F. Sea τ una topología vectorial en $C_b(X)$.

Definición 3.5.1. *Un operador $T : C_b(X) \to F$ es débilmente (τ, τ_F)-compacto si existe una τ-vecindad V de cero, tal que, $T(V)$ es relativamente $\sigma(F, F')$-compacto. Diremos simplemente que T es débilmente compacto si es $(\tau_{\|\cdot\|}, \tau_F)$-débilmente compacto.*

Proposición 3.5.2. *Para un operador lineal $T : C_b(X) \to F$ son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) T es débilmente compacto y $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continua.

(b) T es débilmente $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Existe una $\tau_{\|\cdot\|}$-vecindad V de 0 en $C_b(x)$, tal que, $T(V)$ es relativamente $\sigma(F, F')$-compacto. Si $B \subset C_b(X)$ es $\tau_{\|\cdot\|}$-acotado, entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(B) \subset T(nV)$. Luego, $T(B)$ es relativamente $\sigma(F, F')$-compacto. De este modo, T lleva conjuntos $\gamma_{\mathcal{P}}$-acotados en conjuntos relativamente $\sigma(F, F')$-compactos. Aplicando 2.5.8, obtenemos que $(C_b(X), \gamma_{\mathcal{P}})$ es un gDF-espacio, pues $\mathbb{R}$ es un gDF-espacio. Luego, por [19, página 435, Teorema 3.1] se concluye que T es un operador débilmente $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto.

$(b) \Rightarrow (a)$: Si T es débilmente $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto, entonces existe una $\gamma_{\mathcal{P}}$-vecindad V de cero, tal que $T(V)$ es relativamente $\sigma(F, F')$-compacto. Como $\gamma_{\mathcal{P}} \leq \tau_{\|\cdot\|}$, entonces T es débilmente compacto. Es claro que T es $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continua. □

De forma análoga y aplicando el resultado [19, página 436, nota (a)], tenemos:

Proposición 3.5.3. *Para un operador lineal $T : C_b(X) \to E$ son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) T es compacto y $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continua.

(b) T es $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto.

3.6. Representación integral de operadores $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-debilmente compactos.

En esta sección se presentará una definición de operador debilmente compacto más general que la entregada en la sección 3.5 y mostraremos que cada operador $T : C_b(X, E) \to F$ lineal, debilmente $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto y $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo, tiene una única representación de operador integral con respecto a una única medida en cierto espacio de medidas.

Sea F un espacio localmente convexo Hausdorff. Consideremos el espacio $\mathscr{L}(E, F)$ de todos los operadores lineales y (τ_E, τ_F)-continuos de E en F. Para cada $q \in s(F)$, denotaremos por F'_q al espacio dual $(F, \{q\})'$. Luego para cada $x' \in F'$, existe $q \in s(F)$, tal que $x' \in F'_q$. Para cada $q \in s(F)$ y cada $x' \in F'_q$, se define la seminorma $\|x'\|^{q,\infty} := \sup\{|\langle x', s\rangle| : q(s) \leq 1\}$. La familia de todos los subconjuntos acotados de E se denotará por $Bd(E)$.

Definición 3.6.1. *Se define el espacio $M_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E, F))$, como la familia de todas las funciones de conjuntos $m : \mathcal{B} \to \mathscr{L}(E, F)$, finitamente aditivas que satisfacen las siguientes condiciones:*

(I) Para cada $x' \in F'$, la función conjunto $x'm : \mathcal{B} \to E'$, definida por $\langle (x'm)(G), s\rangle := \langle x', m(G)(s)\rangle$, pertenece a $M_{\mathcal{P},t}(X, E')$.

(II) Dado $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$, tal que:

i. Para cada $x' \in F'$, con $\|x'\|^{q,\infty} \leq 1$, se tiene que $x'm \in M_{\mathcal{P},p,t}(X, E'_p)$ y

ii. $m_p^q(X) < \infty$, donde para cada $G \in \mathcal{B}$ se define:

$$m_p^q(G) := \sup\{(x'm)_p(G) : \|x'\|^{q,\infty} \leq 1\}.$$

Definición 3.6.2. *Se define el espacio $\mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E, F))$, como la familia de todas las funciones de conjuntos $m \in M_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E, F))$ que satisfacen la condición (R), definida por:*

(R): Para cada $S \in Bd(E)$, el conjunto

$$V_{m,S} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} m(G_i)(s_i) : n \in \mathbb{N}, \{G_i\}_{i=1}^{n} \in \Pi(X), s_i \in S \right\}$$

es relativamente débilmente compacto en F.

Definición 3.6.3. *Sean $m \in M_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F))$, $G \in \mathcal{B}$ y $f : X \to E$ una función arbitraria. Diremos que f es **m-integrable en G** si satisface las siguientes condiciones:*

(a) Para cada $x' \in F'$, existe la integral $\int_G f\, d(x'm)$,

(b) Existe un vector en F denotado por $\int_G f\, dm$, tal que, para cada $x' \in F'$, se tiene que

$$\left\langle x', \int_G f\, dm \right\rangle = \int_G f\, d(x'm).$$

*Diremos que **f es m-integrable**, si f es m-integrable en cada $G \in \mathcal{B}$.*

Observación 3.6.4. *Notar que cada función de la forma $e\mathscr{X}_G$, con $e \in E$, $G \in \mathcal{B}$ es m-integrable. Por otro lado, ya que F es un espacio Hausdorff, por el teorema de Hahn-Banach, se concluye que: si el vector $\int_G f\, dm$ existe, entonces es único.*

Lema 3.6.5. *Dados $G \in \mathcal{B}$, $m \in M_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F))$ y $f \in C_b(X,E)$ se tiene la existencia de $\int_G f d\,(x'm)$ para cada $x' \in F'$.*

Demostración. Sea $x' \in F'$. Luego, existe $p \in s(E)$ tal que $x'm \in M_{\mathcal{P},p,t}(X, E'_p)$.

Aplicando 3.2.17, obtenemos que f es $(x'm)$-integrable en G, es decir, la integral $\int_G f d\,(x'm)$ existe. □

Lema 3.6.6. *Sean $G \in \mathcal{B}$, $m \in M_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F))$ y $f \in C_b(X,E)$. La función f es m-integrable en G, si solo si, existe $z \in F$, tal que, $x'(z) = \int_G f d(x'm)$, $\forall x' \in F'$.*

Demostración. Por lema anterior. □

Definición 3.6.7. *Sean A y B espacios vectoriales topológicos y sea $Bd(A)$ la familia de todos los subconjuntos τ_A-acotados de A. Diremos que un operador lineal $T : A \to B$ es **débilmente (τ_A, τ_B)-compacto**, si $T(S)$ es relativamente $\sigma(B, B')$-compacto, para cada $S \in Bd(A)$.*

Lema 3.6.8. *Sea $T : A \to B$ un operador lineal entre espacios vectoriales topológicos. Si $i : B \to B''$ es la inyeccción canónica, entonces, son equivalentes:*

(i) T es débilmente (τ_A, τ_B)-compacto

(ii) $T''(A'') \subset i(B)$

(iii) $T' : B' \to A'$ es $(\tau(B', B), \beta(A', A))$-continua.

Demostración. Por [11, página 131, lemme 1]. □

Lema 3.6.9. *Sean $f_0 \in C_b(X, E)$ y $G \in \mathcal{B}$. La aplicación $\phi : M_{\mathcal{P},t}(X, E') \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\phi(m) = \int_G f_0 \, dm$$

es $\beta((C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})', (C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}}))$-continua. Es decir, $\phi \in (C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})''$.

Demostración. Sea $A = \{f \in C_b(X, E) : ||f||_p \le ||f_0||_p, \forall p \in s(E)\}$. Entonces A es un conjunto τ_u-acotado y por lo tanto, se tiene que A es $\beta_{\mathcal{P}}$-acotado. Luego, el polar A^0 en $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})'$ es una $\beta((C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})', (C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}}))$-vecindad de cero.

Mostraremos que ϕ es acotado en A^0. Sean $m \in A^0$ y $\varepsilon > 0$. Existe $\{G_1, \ldots, G_n, x_1, \ldots, x_n\} \in \Omega_X$, tal que,

$$\left| \int_X f_0 \, dm \right| \le \left| \sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), s_i \rangle \right| + \varepsilon,$$

donde $s_i = f(x_i)$. Por la regularidad de cada ms_i, podemos elegir $\{Z_1, \ldots, Z_n\} \subset \mathcal{Z}$, tal que, $Z_i \subset G_i$ y

$$\left| \left| \sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), s_i \rangle \right| - \left| \sum_{i=1}^{n} \langle m(Z_i), s_i \rangle \right| \right| \le \left| \sum_{i=1}^{n} ms_i(G_i \backslash Z_i) \right| \le \sum_{i=1}^{n} |ms_i(G_i \backslash Z_i)| \le \varepsilon.$$

Luego,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \langle m(G_i), s_i \rangle \right| \le \left| \sum_{i=1}^{n} ms_i(Z_i) \right| + \varepsilon$$

Ahora, por la regularidad de cada $|ms_i|$, podemos elegir $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$, tal que, $Z_i \subset U_i$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\sum_{i=1}^{n} |ms_i|(U_i - Z_i) < \varepsilon$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos $h_i \in C_b(X)$ con $0 \leq h_i \leq \mathscr{X}_X$, $h_i^{-1}\{1\} = Z_i$ y $h_i^{-1}\{0\} = X \backslash U_i$. Si $h = \sum_{i=1}^n h_i \otimes s_i$, entonces, tenemos que $h \in A$, por lo tanto, $|\int_X h\, dm| \leq 1$.

Por lo anterior deducimos que

$$\left|\sum_{i=1}^n m(Z_i)(s_i)\right| - \varepsilon \geq \left|\int_X f_0\, dm\right| - 3\varepsilon.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 1 \geq \left|\int_X h\, dm\right| &\geq \left|\sum_{i=1}^n \int_{Z_i} h_i \otimes s_i\, dm\right| - \left|\sum_{i=1}^n \int_{U_i - Z_i} h_i \otimes s_i\, dm\right| \\ &\geq \left|\sum_{i=1}^n m(Z_i)(s_i)\right| - \sum_{i=1}^n \left|\int_{U_i - Z_i} h_i \otimes s_i\, dm\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n m(Z_i)(s_i)\right| - \sum_{i=1}^n \left|\int_{U_i - Z_i} h_i\, d(ms_i)\right| \\ &\geq \left|\sum_{i=1}^n m(Z_i)(s_i)\right| - \sum_{i=1}^n |ms_i|(U_i - Z_i) \\ &\geq \left|\sum_{i=1}^n m(Z_i)(s_i)\right| - \varepsilon \end{aligned}$$

Luego, $|\int_X f_0\, dm| - 3\varepsilon \leq 1$. De este modo, por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, se concluye que

$$|\phi(m)| = \left|\int_X f_0\, dm\right| \leq 1,$$

probando la continuidad de ϕ. $\square$

En lo que sigue, la aplicación $i : F \to F''$ será la inyección canónica y $j : i(F) \to F$ será la aplicación, tal que, $j \circ i = Id_F$ y la aplicación $i_0 : (C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}}) \to (C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})''$ será la inyección canónica.

Teorema 3.6.10. *Si $T : C_b(X, E) \to F$ es un operador $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo y débilmente $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto, entonces, existe una única $m \in \mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E, F))$, tal que, cada $f \in C_b(X, E)$ es m-integrable y $T(f) = \int_X f\, dm$.*

Además, esta medida m satisface las siguientes condiciones:

(a) Si $p \in s(E)$ y $q \in s(F)$ son tales que $\|T\|_p^q := sup\{q(T(f)) : ||f||_p \leq 1\} < \infty$, entonces, $m_p^q(X) = ||T||_p^q$.

(b) $\forall x' \in F'$, $T'x' = x'm$.

Recíprocamente, si $m \in \mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F))$, entonces cada $f \in C_b(X,E)$ es m-integrable y el operador $T : C_b(X,E) \to F$, definido por $T(f) = \int_X f\, dm$, es $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo y débilmente $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto.

Demostración. Cuando se haga mención de las condiciones (I), (II) y (R), nos estaremos refiriendo a las condiciones de la definiciónes 3.6.1 y 3.6.2. Supongamos que T es un operador $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo y $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-debilmente compacto. Por el lema 3.6.8, tenemos que $T''((C_b(X,E), \beta_{\mathcal{P}})'') \subset i(F)$.

Por el lema 3.6.9, si $f \in C_b(X,E)$ y $G \in \mathcal{B}$, entonces, la función $f\mathscr{X}_G$ define un elemento de $(C_b(X,E), \beta_{\mathcal{P}})''$ en la forma siguiente:

$$\langle m, f\mathscr{X}_G\rangle := \int_G f\, dm\,,$$

para cada $m \in M_{\mathcal{P},t}(X, E') = (C_b(X,E), \beta_{\mathcal{P}})'$.

<u>PASO 1:</u> Construiremos una función conjunto $m : \mathcal{B} \to \mathscr{L}(E,F)$.

Definimos $m(G) : E \to F$ por $m(G)(s) := j(T''(s\mathscr{X}_G))$. Se tiene que $m(G) \in \mathscr{L}(E,F)$. En efecto, la linealidad de $m(G)$ es inmediata. Por hipótesis y por 3.1.3, dado $q \in s(F)$, existe $p \in s(E)$ tal que, el operador T es (β_p, q)-continuo. Luego $\|T\|_p^q < \infty$.

- Para $x' \in (C_b(X,E), u_p)'$, definimos $\|x'\|_{p,\infty} := \sup\{|\langle x', f\rangle| : \|f\|_p \leq 1\}$.
- Para $x'' \in ((C_b(X,E), u_p)', \|\cdot\|_{p,\infty})' =: (C_b(X,E), u_p)''$, definimos $\|x''\|_{p,*} := \sup\{|\langle x'', x'\rangle| : x' \in (C_b(X,E), u_p)', \|x'\|_{p,\infty} \leq 1\}$.
- Para $y' \in F_p'$, definimos $\|y'\|^{q,\infty} := \sup\{|\langle y', s\rangle| : q(s) \leq 1\}$.
- Para $y'' \in (F_q', \|\cdot\|^{q,\infty})' =: F_q''$, definimos $\|y''\|^{q,*} := \sup\{|\langle y'', y'\rangle| : y' \in F', \|y'\|^{q,\infty} \leq 1\}$.

Aplicando el teorema de Hahn-Banach, obtenemos que:

- $\|x'\|_{p,\infty} = \sup\{|\langle x'', x'\rangle| : x'' \in (C_b(X,E), u_p)'', \|x''\|_{p,*} \leq 1\}$.

- $q(s) = \sup\{|\langle y', s\rangle| : y' \in F'_q, \|y'\|^{q,\infty} \leq 1\} = \sup\{|\langle y', s\rangle| : y' \in F', \|y'\|^{q,\infty} \leq 1\}$.

- $\|y'\|^{q,\infty} = \sup\{|\langle y'', y'\rangle| : y'' \in F''_q, \|y''\|^{q,*} \leq 1\}$.

De este modo, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\|T\|_p^q &= \sup\{q(T(f)) : f \in C_b(X,E), \|f\|_p \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle y', T(f)\rangle| : f \in C_b(X,E), \|f\|_p \leq 1, y' \in F'_q, \|y'\|^{q,\infty} \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle T'(y'), f\rangle| : f \in C_b(X,E), \|f\|_p \leq 1, y' \in F'_q, \|y'\|^{q,\infty} \leq 1\} \\
&= \sup\{\|\langle T'(y')\|_{p,\infty} : y' \in F'_q, \|y'\|^{q,\infty} \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle x'', T'(y')\rangle| : y' \in F'_q, \|y'\|^q \leq 1, x'' \in (C_b(X,E), u_p)'', \|x''\|_{p,*} \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle T''(x''), y'\rangle| : y' \in F'_q, \|y'\|^q \leq 1, x'' \in (C_b(X,E), u_p)'', \|x''\|_{p,*} \leq 1\} \\
&= \sup\{\|T''(x'')\|^{q,*} : x'' \in (C_b(X,E), u_p)'', \|x''\|_{p,*} \leq 1\} \\
&=: \|T''\|_p^q.
\end{aligned}$$

Notemos que $||j||^q := sup\{q(j(y'')) : y'' \in i(F), ||y''||^q \leq 1\} = 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
q(m(G)(s)) &= q(j(T''(s\mathscr{X}_G))) \\
&\leq ||j||^q \cdot ||T''(s\mathscr{X}_G)||^{q,\infty} \\
&= ||T''(s\mathscr{X}_G)||^{q,\infty} \\
&\leq ||T''||_p^q \cdot ||s\mathscr{X}_G||_{p,*} \\
&\leq ||T''||_p^q \cdot p(s).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $m(G) \in \mathscr{L}(E,F)$. Así podemos definir $m : \mathcal{B} \to L(E,F)$ la cual es finitamente aditiva.

<u>Paso 2:</u> Probaremos que $m \in M_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F))$.

Si $x' \in F'$ y $s \in E$, entonces

$$\begin{aligned}\langle (x'm)(G), s\rangle &= \langle x', m(G)(s)\rangle \\ &= \langle x', j(T''(s\mathscr{X}_G))\rangle \\ &= \langle T''(s\mathscr{X}_G), x'\rangle \\ &= \langle s\mathscr{X}_G, T'(x')\rangle \\ &= \int_G s\, d(T'(x')) = \langle T'x'(G), s\rangle\end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de $s \in E$ y $G \in \mathcal{B}$ se concluye que $x'm = T'x' \in M_{\mathcal{P},t}(X, E')$. Hemos probado (b) y la condición (I).

Sea $x' \in F'$, tal que $\|x'\|^{q,\infty} \leq 1$. Para $f \in C_b(X, E)$ con $\|f\|_p \leq 1$, tenemos $|\langle x'm, f\rangle| = |\langle T'x', f\rangle| = |\langle x', T(f)\rangle| \leq q(T(f)) \leq ||T||_p^q$.

De este modo $(x'm)_p(X) = \|(x'm)_p\|_* = \|x'm\|_{p,\infty} \leq \|T\|_p^q$. Por lo tanto, se tiene que $m_p^q(X) \leq \|T\|_p^q < \infty$. Además, $x'm \in M_p(X, E_p')$, para cada $x' \in F'$, tal que, $\|x'\|^{q,\infty} \leq 1$. Para probar la condición (II), resta probar que $(x'm)_p \in M_{\mathcal{P},t}(X)$, para cada $x' \in F'$, tal que, $\|x'\|^{q,\infty} \leq 1$. Sea $x' \in F'$, tal que, $\|x'\|^{q,\infty} \leq 1$. Por la condición (I), existe $p_0 \in s(E)$, tal que, $x'm \in M_{\mathcal{P},p_0,t}(X, E_{p_0}')$. Es decir, $(x'm)_{p_0} \in M_{\mathcal{P},t}(X)$. Por el lema 3.2.13, para cada $s \in E$ se tiene que $(x'm)s \in M_{\mathcal{P},t}(X) \subset M_t(X)$. Luego, por 3.2.12, obtenemos que $(x'm)_p \in M_t(X)$. Ya que T es (β_p, q)-continuo, dado $\varepsilon > 0$, existe una β_p-vecindad de 0, digamos V, tal que, $\sup\{|\langle x', T(f)\rangle| : x' \in F', \|x'\|^{q,\infty} \leq 1\} = q(T(f)) < \varepsilon$, para cada $f \in V$.

Por 2.7.5, existe $K \in \mathcal{P}$, tal que, $\{f \in C_b(X, E) : \|f\|_p \leq 1, \|f\|_{p,K} = 0\} \subset V$. Luego, por el resultado 3.2.19, se tiene que $(x'm)_p \in M_{\mathcal{P},t}(X)$. Así, hemos finalizado la prueba de (II) y por lo tanto, $m \in M_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E, F))$.

<u>Paso 3:</u> Probaremos que cada $f \in C_b(X, E)$ es m-integrable y que $T(f) = \int_X f\, dm$.

Sean $G \subset \mathcal{B}$ y $f \in C_b(X, E)$. Para $x' \in F'$ tenemos

$$\langle x', j(T''(f\mathscr{X}_G))\rangle = \langle x', T''(f\mathscr{X}_G)\rangle = \langle T'x', f\mathscr{X}_G\rangle = \langle x'm, f\mathscr{X}_G\rangle = \int_G f\, d(x'm).$$

Esto muestra que f es m-integrable y que $\int_G f\, dm = j(T''(f\mathscr{X}_G))$. Tomando $G = X$, obtenemos $\int_X f\, dm = j(T''(f\mathscr{X}_X)) = j(T''(i_0(f))) = T(f)$.

<u>PASO 4:</u> Probaremos que $\|T\|_p^q = m_p^q(X)$, considerando p y q mencionados anteriormente.

Para esto, falta mostrar que $\|T\|_p^q \leq m_p^q(X)$. Sea $f \in C_b(X,E)$ con $\|f\|_p \leq 1$ y $x' \in F'$ con $\|x'\|^{q,\infty} \leq 1$. Tenemos que

$$|\langle x', T(f)\rangle| = |\langle T'x', f\rangle| = |\langle x'm, f\rangle| = \left|\int_X f\, d(x'm)\right| \leq \|x'm\|_{p,\infty} \leq m_p^q(X).$$

De este modo,

$$\sup\{|\langle x', T(f)\rangle| : x' \in F', \|x'\|^{q,\infty} \leq 1\} = q(T(f)) \leq m_p^q(X)$$

y por ende $\|T\|_p^q \leq m_p^q(X)$. Así, hemos probado (a).

<u>PASO 5:</u> Probaremos que $m \in \mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F))$.

Para para esto, resta probar que m satisface la condición (R). Sea $S \in Bd(E)$. Ponemos $A = \{f \in C_b(X,E) : f(X) \subset \overline{co}(S)\}$. Tenemos que A es un conjunto τ_u-acotado y por lo tanto, es $\beta_{\mathcal{P}}$-acotado. Luego, por hipótesis, $T(A)$ es relativamente $\sigma(F,F')$-compacto. Para satisfacer la condición (R), es suficiente mostrar que $V_{m,S}$ está contenido en la clausura de $T(A)$ respecto a la topología $\sigma(F,F')$.

Sea $\{G_1,...,G_n\}$ una $\mathcal{B}$-partición de X y $s_1,...,s_n \in S$. Sea $\{x_j'\}_{i=1}^k \subset F'$. Sea $q \in s(F)$. Consideremos $M > 0$, tal que, $\|x_j'\|^{q,\infty} \leq M$ para cada $1 \leq j \leq k$. Existe $p \in s(E)$ tal que $\frac{1}{M}x_j'm \in M_{\mathcal{P},p,t}(X, E_p')$, para cada $1 \leq j \leq k$, y por lo tanto $x_j'm \in M_{\mathcal{P},p,t}(X, E_p')$, para cada $1 \leq j \leq k$. Ya que S es un subconjunto acotado de E, podemos definir $d = \sup\{p(s) : s \in S\} < \infty$. Sea $j \in \{1,...,k\}$ fijo. Por regularidad de $(x_j'm)_p$, dado $\varepsilon > 0$ existen $Z_1,...,Z_n \in \mathcal{Z}$, tales que, $Z_i \subset G_i$ y $\sum_{i=1}^n (x_j'm)_p(G_i - Z_i) < \dfrac{\varepsilon}{2d}$.

Nuevamente por regularidad, existen $U_1,...,U_n \in \mathcal{U}$ disjuntos de a pares, tales que, $Z_i \subset U_i$ y $\sum_{i=1}^n (x_j'm)_p(U_i - Z_i) < \dfrac{\varepsilon}{2d}$. Para cada $i \in \{1,...,n\}$, elegimos $h_i \in C_b(x)$, tal que, $0 \leq h_i \leq \mathscr{X}_X$, $h_i^{-1}(\{1\}) = Z_i$ y $h_i^{-1}(\{0\}) = X - U_i$. Consideremos la función $h = \sum_{i=1}^n h_i \otimes s_i$, la cual pertenece a A. Luego $T(h) \in T(A)$. Además,

$$\left|x_j'\left(T(h) - \sum_{i=1}^n m(G_i)(s_i)\right)\right| = \left|x_j'\left(\sum_{i=1}^n \int_X h_i \otimes s_i\, dm - \sum_{i=1}^n m(G_i)(s_i)\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} h_i \otimes s_i \, dm - \sum_{i=1}^{n} m(G_i)(s_i) \right) \right| \\
&= \left| x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{Z_i} h_i \otimes s_i \, dm - \sum_{i=1}^{n} m(G_i)(s_i)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i \setminus Z_i} h_i \otimes s_i \, dm \right) \right| \\
&= \left| x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} m(Z_i)(s_i) - \sum_{i=1}^{n} m(G_i)(s_i) + \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i \setminus Z_i} h_i \otimes s_i \, dm \right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left| x'_j \left(m(G_i \setminus Z_i)(s_i) \right) \right| + \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{U_i \setminus Z_i} h_i \otimes s_i \, d(x'_j m) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (x'_j m)_p (G_i \setminus Z_i) \cdot d + \sum_{i=1}^{n} (x'_j m)_p (U_i \setminus Z_i) \cdot d \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}
$$

cualquiera sea $j \in \{1, ..., m\}$. Por lo tanto, $V_{m,S}$ está contenido por la clausura de $T(A)$ respecto a la topología $\sigma(F, F')$.

<u>Paso 6:</u> Probaremos la unicidad de m.

Supongamos que $m_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E, F))$ es una función conjunto tal que, cada $f \in C_b(X, E)$ es m_1-integrable y $T(f) = \int_X f \, dm_1$. Entonces, para cada $x' \in F'$, $\int_X f d(x'm) = \langle x', T(f) \rangle = \int_X f \, d(x'm_1)$, $\forall f \in C_b(X, E)$. Luego, para cada $x' \in F'$ tenemos $x'm = T'x' = x'm_1$ y de aquí $m = m_1$, pues F es un localmente convexo Housdorff.

<u>Paso 7:</u> Mostremos el recíproco: si $m \in \mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E, F))$, entonces cada $f \in C_b(X, E)$ es m-integrable y el operador $T : C_b(X, E) \to F$, definido por $T(f) = \int_X f \, dm$, es $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo y débilmente $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto.

Sea $m \in \mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E, F))$. Consideremos $G \in \mathcal{B}$ y $f \in C_b(X, E)$. Para $\alpha = \{G_1, \ldots, G_n, x_1, \ldots, x_n\} \in \Omega_G$, tenemos $\omega_\alpha(f, m) = \sum_{i=1}^{n} m(G_i)(f(x_i))$. Si ponemos $S = f(X)$, entonces, para cada $\alpha \in \Omega_G$, $\omega_\alpha(f, m) \in V_{m,s}$.

Por hipótesis, $V_{m,S}$ es relativamente $\sigma(F, F')$-compacto, luego, existen una subred $(\omega_{\alpha_\delta}(f, m))_{\delta \in \Lambda}$ de $(\omega_\alpha(f, m))_{\alpha \in \Omega_G}$ y un vector $z \in F$, tales que, para cada $x' \in F'$, $\langle x', \omega_{\alpha_\delta}(f, m) \rangle \to \langle x', z \rangle$. Por otro lado, para cada $x' \in F'$, $x'm \in M_{\mathcal{P},p,t}(X, E'_p)$ y $(\langle x', \omega_\alpha(f, m) \rangle)_{\alpha \in \Omega_G} = (\omega_\alpha(f, x'm))_{\alpha \in \Omega_G}$ es convergente a $\int_X f \, d(x'm)$. Ya que $\mathbb{R}$ es Hausdorff, tenemos que $\langle x', z \rangle = \int_X f \, d(x'm)$. Por lo tanto, cada $f \in C_b(X, E)$ es

m-integrable y $z = \int_X f\, dm$.

Definimos $T : C_b(X, E) \to F$ por $T(f) = \int_X f\, dm$.

El operador lineal T es $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo. En efecto, dado $q \in s(F)$, elegimos $p \in s(E)$ tal que, $m_p^q(X) < \infty$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x' \in F'$, tal que $\|x'\|^{q,\infty} \leq 1$. Entonces, existe $r > 0$ talque $r \cdot (x'm)_p(X) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $K \in \mathcal{P}$ tal que, $(x'm)_p(G) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $G \subset X \backslash K$.

Sea $f \in C_b(X, E)$, tal que $\|f\|_p \leq 1$ y $\|f\|_{p,K} \leq r$. Consideremos $G = \{x \in X : p(f(x)) \leq r\}$. Se tiene que $G \in \mathcal{Z}$ y $X \backslash G \subset X \backslash K$. Luego,

$$\begin{aligned}
|\langle x', T(f)\rangle| =& \left|\int_X f\, d(x'm)\right| \\
\leq& \left|\int_G f\, d(x'm)\right| + \left|\int_{X\backslash G} f\, d(x'm)\right| \\
\leq& \sup_{x\in G}\{p(f(x))\} \cdot (x'm)_p(G) + \|f\|_p m_p(X\backslash G) \\
\leq& r \cdot (x'm)_p(X) + \frac{\varepsilon}{2} \\
\leq& \varepsilon
\end{aligned}$$

Como $x' \in F'$, $\|x'\|^{q,\infty} \leq 1$, es arbitrario, se concluye que $q(T(f)) \leq \varepsilon$. De este modo, hemos probado que T es $\mathcal{P}_p^q$-tight. Por 3.1.3, T es $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continua.

El operador T es débilmente $(\beta_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto. En efecto, sea $A \subset C_b(X, E)$, un conjunto $\beta_{\mathcal{P}}$-acotado. Luego, el polar A^o es una $\beta((C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})', (C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}}))$-vecindad de 0 en $(C_b(X, E), \beta_{\mathcal{P}})'$.

Definimos el acotado $S = \overline{co}(\bigcup\{f(X) : f \in A\})$. Mostremos que $V_{m,S}$ es convexo. Sean $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ y $\sum_{i=1}^n m(G_i)(s_i)$, $\sum_{j=1}^k m(H_i)(t_i) \in V_{m,S}$. Notemos que $\alpha s_i + \beta t_j \in S$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{i=1}^n m(G_i)(s_i) + \beta \sum_{i=1}^k m(H_i)(t_i) &= \int_X \sum_{i=1}^n \alpha s_i \mathscr{X}_{G_i}\, dm + \int_X \sum_{j=1}^k \beta t_j \mathscr{X}_{H_i}\, dm \\
&= \int_X \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\alpha s_i + \beta t_j) \mathscr{X}_{G_i \cap H_j}\, dm \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m(G_i \cap H_j)(\alpha s_i + \beta t_j) \in V_{m,S}
\end{aligned}$$

Mostremos ahora que $V_{m,S}$ es balanceado. Sean $\lambda \in [-1,1]$ y $\sum_{i=1}^n m(G_i)(s_i) \in V_{m,S}$. Se tiene que, $\lambda(\sum_{i=1}^n m(G_i)(s_i)) = \sum_{i=1}^n m(G_i)(\lambda s_i) \in V_{m,S}$.

Así, $V_{m,S}$ es absolutamente convexo y relativamente $\sigma(F,F')$-compacto, por lo tanto, el polar $V_{m,S}^o$ es una $\tau(F',F)$-vecindad de 0 en F'. Deseamos probar que T' es $(\tau(F',F), \beta((C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})', (C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})))$-continua. Para esto, basta mostrar que $T'(V_{m,S}^o) \subset A^o$. Sean $x' \in V_{m,S}^o$ y $f \in A$. Si $\{G_1,\ldots,G_n,x_1,\ldots,x_n\} \in \Omega_X$, entonces $\sum_{i=1}^n m(G_i)(f(x_i)) \in V_{m,S}$ y por ende $|\langle x', \sum_{i=1}^n m(G_i)(f(x_i))\rangle| \leq 1$.

Esto implica que $|\langle x', \int_X f\, dm\rangle| \leq 1$. De este modo $|\langle T'x', f\rangle| = |\langle x', T(f)\rangle| \leq 1$, lo que prueba que $T'x' \in A^o$. La conclusión se obtiene al aplicar el lema 3.6.8. $\square$

Definición 3.6.11. *Definimos el espacio*

$$\mathscr{L}_{\beta_{\mathcal{P}},w}(C_b(X,E),F) := \left\{ T : C_b(X,E) \to F : \begin{array}{l} T \textit{ es un operador lineal } (\beta_{\mathcal{P}},\tau_F)\textit{-continuo} \\ y\ (\beta_{\mathcal{P}},\tau_F)\textit{-debilmente compacto} \end{array} \right\}$$

El resultado anterior puede reformularse en la siguiente forma.

Teorema 3.6.12 (de representación de operadores débilmente compactos y continuos)**.**

La aplicación $\Phi : \mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X,\mathscr{L}(E,F)) \to \mathscr{L}_{\beta_{\mathcal{P}},w}(C_b(X,E),F)$, definida por $\Phi(m)(f) = \int_X f\, dm$, es biyectiva y es tal que: $\forall x' \in F', x'm = \Phi(m)'x'$. Además, si $p \in s(E)$ y $q \in s(F)$ son tales que $m_p^q(X) < \infty$, entonces $m_p^q(X) = \|\Phi(m)\|_p^q$.

Anexo A

Estructuras uniformes.

En [3, 17] se pueden encontrar las principales definiciones y propiedades de espacios uniformes. Este anexo pretende enunciar los resultados extraídos de [3, 17] que son necesarios para este documento.

Sean $\mathcal{X}$ un conjunto, G un cubrimiento de $\mathcal{X}$, un espacio uniforme $(\mathcal{Y}, \mathcal{V})$ y $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ el espacio de las funciones de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$ se define

$$W(V) = \{(f, g) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \times L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \forall x \in \mathcal{X}, (f(x), g(x)) \in V\} \ .$$

La colección $\{W(V) : V \in \mathcal{V}\}$ forma una base para una uniformidad sobre $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, denotada por $\mathscr{U}$. Decimos que $(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathscr{U})$ es la estructura uniforme de convergencia uniforme. La estructura uniforme de la G-convergencia es la estructura uniforme menos fina sobre $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, tal que, para cada $A \in G$, la aplicación $R_A : L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to L(A, \mathcal{Y})$, $R_A(f) = f|_A$, es uniformemente continua.

El siguiente resultado se muestra en [3, teorema 2, página 30].

Teorema A.1. *(Teorema de Ascoli)*

Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico, G un cubrimiento de $\mathcal{X}$, un espacio uniforme $(\mathcal{Y}, \mathcal{V})$ y un subconjunto H de $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Supongamos que, para cada $A \in G$ y $f \in H$, la restricción $f|_A$ es continua.

El conjunto H es precompacto respecto a la estructura uniforme de la G-convergencia, si y solo si, verifica las siguientes condiciones:

(a) Para cada $A \in G$*, el conjunto* $\{f|_A : f \in H\} \subset L(A, \mathcal{Y})$ *es equicontinuo.*

(b) Para cada $x \in \mathcal{X}$*, el conjunto* $H(x) := \{f(x) : f \in H\} \subset \mathcal{Y}$ *es precompacto.*

Si $(\mathcal{X}, \mathscr{U})$ es una estructura uniforme cualquiera, la topología en $\mathcal{X}$ inducida por la uniformidad $\mathscr{U}$ la denotaremos por $\tau_{\mathscr{U}}$.

El siguiente resultado se muestra en [17, theorem 6.7, página 46].

Teorema A.2. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathscr{U})$ *es una estructura uniforme. El espacio* $(\mathcal{X}, \tau_{\mathscr{U}})$ *es compacto, si y solo si,* $(\mathcal{X}, \mathscr{U})$ *es completo y precompacto.*

Anexo B

Convergencia.

Sean $\mathcal{X}$ un espacio topológico cualquiera, D un subespacio de $\mathcal{X}$ y $(\mathcal{E}, p)$ un espacio seminormado. Diremos que una función $f : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ es ***p*-acotada en *D*** si

$$\|f\|_{p,D} := \sup_{x \in D} p(f(x)) < \infty.$$

Consideremos una red $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de funciones p-acotadas en D. Diremos que dicha red es ***p*-uniformemente de Cauchy** si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$, tal que, $\|f_\alpha - f_\beta\|_{p,D} < \varepsilon$, para cada par $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$.

Si existe una función $f : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$, talque, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$, para el cuál, $\|f_\alpha - f\|_{p,D} < \varepsilon$, para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$, entonces, la función f es p-acotada en D, y diremos que $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es ***p*-uniformemente convergente a f en *D***.

Proposición B.1. *Sean $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red de funciones p-acotadas en D y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) La red $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es p-uniformemente de Cauchy en D y puntualmente convergente a f en D.

(b) La red $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es p-uniformemente convergente a f en D.

Demostración. Es evidente que $(b) \Rightarrow (a)$. Mostremos que $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la condición p-uniformemente Cauchy, existe $\alpha_0 \in \Lambda$, tal que, para todo $x \in D$,

$$\begin{aligned} p(f_\alpha(x) - f(x)) &\leqslant p(f_\alpha(x) - f_\beta(x)) + p(f_\beta(x) - f(x)) \\ &\leqslant \|f_\alpha - f_\beta\|_{p,D} + p(f_\beta(x) - f(x)) \\ &\leqslant \varepsilon + p(f_\beta(x) - f(x)) \ , \end{aligned} \tag{B.1}$$

para $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$. Consideremos $y \in D$ fijo. Por convergencia puntual, para $r > 0$, existe $\beta_0 \in \Lambda$, $\beta_0 \geqslant \alpha_0$, talque: $p(f_{\beta_0}(y) - f(y)) \leqslant r$. De este modo, por (B.1) $p(f_\alpha(y) - f(y)) \leqslant \varepsilon + r$, donde $r > 0$ es arbitrario, por lo que $p(f_\alpha(y) - f(y)) \leqslant \varepsilon$. Como $y \in D$ es arbitrario, se concluye que $\|f_\alpha - f\|_{p,D} \leqslant \varepsilon$, para cada $\alpha \geqslant \alpha_0$. $\square$

Proposición B.2. *Sean $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red de funciones continuas p-acotadas en D y $f : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ una función. Si la red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es p-uniformemente convergente a f en D, entonces, la restricción $f|_D$ es continua, o dicho de otra forma, $p \circ f|_D$ es continua.*

Demostración. Sea $x_0 \in D$. Dado $x \in D$ y $\alpha \in \Lambda$ se tiene que:

$$\begin{aligned} p(f(x) - f(x_0)) &\leqslant p(f(x) - f_\alpha(x)) + p(f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)) + p(f_\alpha(x_0) - f(x_0)) \\ &\leqslant \|f - f_\alpha\|_{p,D} + p(f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)) + \|f_\alpha - f\|_{p,D} \ . \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$, tal que,

$$p(f(x) - f(x_0)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + p(f_{\alpha_0}(x) - f_{\alpha_0}(x_0)) + \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Por la continuidad de f_{α_0}, existe una vecindad V de x_0, tal que, $p(f(x) - f(x_0)) \leqslant \varepsilon$, para cada $x \in V \cap D$. Por lo tanto, $f|_D$ es continua en x_0. $\square$

Anexo C

Espacios barrelados, cuasibarrelados, bornológicos, ultrabornológicos, angelicales y (DF)-espacios.

Las definiciones clásicas y principales propiedades de estos espacios, a excepción de los ultrabornológicos, angelicales y los (DF)-espacios, se pueden encontrar en [26].

Uno de los objetivos de este anexo, es probar equivalencias entre las definiciones que se ocuparán en este documento y las definiciones entregadas en [26]. Para una definición alternativa de los espacios barrelados, se utilizó [4], y de la misma idea se pudo deducir una definición alternativa para los espacios cuasibarrelados. En el caso de los (DF)-espacios, seguiremos la definición presentada por Grothendieck en [10]. No se encontró enunciada la equivalencia necesaria entre la definición de un espacio ultrabornológico que utiliza Schmets en [21] y lo propuesto en [10]. Sin embargo, se logró demostrar una equivalencia de, al menos, 22 definiciones para ese tipo de espacio. Todo lo que necesitamos de los espacios angelicales, se encuentra en [18] y recopilaremos los resultados que se utilicen en este documento.

C.1. Espacios cuasibarrelados y barrelados.

Definición C.1.1. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es* ***semi-continua inferiormente en un punto a de $\mathcal{X}$****, si para cada $h \in \mathbb{R}$, tal que, $h < f(a)$, existe una vecindad U de a, tal que, $h < f(x)$ para cada $x \in U$. Si f es semi-continua inferiormente para todo $x \in \mathcal{X}$, decimos que es* ***semi-continua inferiormente en $\mathcal{X}$****.*

Lema C.1.2. *Para que una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ sea semi-continua inferiormente en $\mathcal{X}$, es necesario y suficiente que, para cada $k \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(k, +\infty)$ sea abierto.*

Demostración. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(k, +\infty)$ es abierto en $\mathcal{X}$. Sea $a \in \mathcal{X}$ y $h \in \mathbb{R}$, $h < f(a)$. Ya que $f^{-1}(k, +\infty)$ es abierto en $\mathcal{X}$, se tiene la semi-continuidad inferior de f en a. Ahora supongamos que f es semi-continua inferiormente en $\mathcal{X}$ y que existe $k \in \mathbb{R}$, tal que, el conjunto $H := f^{-1}(k, +\infty)$ no es abierto. Por lo tanto, $H \neq \emptyset$. Dado $a \in \mathcal{X}$, tal que, $k < f(a)$, existe una vecindad U de a, tal que, $U \subset H$, por lo que, H es vecindad de todos sus elementos, llegando a una contradicción. □

Lema C.1.3. *Sea $\{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de funciones semi-continuas inferiormente en un punto $a \in \mathcal{X}$. Si podemos definir la función $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sup\{f_\alpha(x) : \alpha \in \Lambda\}$, entonces, es semi-continua inferiormente en a.*

Demostración. Sea $h \in \mathbb{R}$, tal que, $h < g(a)$. Existe $\alpha \in \Lambda$, tal que, $f < f_\alpha(a) \leqslant g(a)$.

Luego, existe una vecindad U de a, tal que, $h < f_\alpha(x) \leqslant g(x)$, para cada $x \in U$. □

Definición C.1.4. *Sean E un espacio localmente convexo Hausdorff y B un subconjunto de E. Decimos que B es un* ***borniovoro****, si y solo si, absorbe a todos los subconjuntos acotados de E. Decimos que B es un* ***barril****, si y solo si, es absolutamente convexo, cerrado y absorbente.*

Proposición C.1.5. *Sea B un subconjunto de E. Las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

(a) B es un barril y un bornivoro.

(b) Existe un subconjunto M de E', absolutamente convexo y $\beta(E', E)$-acotado, tal que, $M_o := \{e \in E : |\langle y, e\rangle| \leqslant 1, \forall y \in M\} = B$.

(c) Existe una seminorma p semi-continua inferiormente en E, acotada en subconjuntos acotados de E, tal que, $B = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\}$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Si B es un barril y un bornivoro, entonces, el conjunto $M = B^o$ es $\beta(E', E)$-acotado y absolutamente convexo, esto por [26, proposition 9, página 246].

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea M subconjunto de E', absolutamente convexo y $\beta(E', E)$-acotado, tal que $B = M_o$. Luego, podemos definir la seminorma p en cada $e \in E$, como sigue: $p(e) := \sup\{|f(e)| : f \in M\}$. Por el lema anterior, p es semi-continua inferiormente en X. Sea A un subconjunto acotado de E. Como M es $\beta(E', E)$-acotado, se tiene que, $\sup\{f(e) : e \in A, f \in M\} < \infty$. Es decir, p es acotada en A. Ademas, $B = M_o = \{e \in E : |f(e)| \leqslant 1, \forall f \in M\} = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\}$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sea p una seminorma semi-continua inferiormente en E, acotada en subconjuntos acotados de E, tal que $B = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\}$. Claramente B es absolutamente convexo y absorvente. Ya que $E \backslash B = p^{-1}(1, \infty)$ es abierto (C.1.2), se ha terminado de mostrar que B es un barril. Sea A un subconjunto acotado de E. Definimos $L = \sup\{p(e) : e \in A\}$. Luego, $A \subset LB$, mostrando que B es un bornivoro. $\square$

Corolario C.1.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Cada conjunto $\beta(E', E)$-acotado es equicontinuo.

(b) Cada barril bornivoro de E es vecindad de 0.

(c) Cada seminorma semi-continua inferiormente en E, acotada en cada subconjunto acotado de E, es continua.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Supongamos que (a) se cumple. Sea B un barril bornivoro de E. Por la proposición anterior, existe un $\beta(E', E)$-acotado, absolutamente convexo M, tal que, $M_o = B$. Como M es equicontinuo, se tiene que B es una vecindad de 0.

$(b) \Rightarrow (c)$: Ahora supongamos que (b) se cumple. Sea p una seminorma semi-continua inferiormente en E, acotada en cada subconjunto acotado de E. Por la proposición anterior, el conjunto $\{e \in E : p(e) \leqslant 1\}$ es barril bornivoro, luego, la continuidad se obtiene por (b).

$(c) \Rightarrow (a)$: Finalmente, supongamos que (c) se cumple. Sea B un conjunto $\beta(E', E)$-acotado. La cápsula convexa de B, $co(B)$, es también un conjunto $\beta(E', E)$-acotado.

En efecto, sean A un subconjunto acotado de E, $L = \sup\{f(e) : e \in A, f \in M\}$, $f_1, \ldots, f_n \in B$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{K}$, tales que $\sum_{i=1}^{n} |t_i| \leqslant 1$ y $e \in E$.

$$|\sum_{i=1}^{n} t_i f_i(e)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |t_i||f_i(e)| \leqslant \text{máx}\{|f_i(e)| : i = 1, \ldots, n\} \leqslant L$$

Aplicando la proposición anterior, existe una seminorma p semi-continua inferiormente en E, acotada en cada subconjunto acotado de E, tal que,

$$(co(B))_o = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\} \ .$$

Por hipótesis, p es continua y de aquí $(co(B))_o$ es una vecindad de 0. Aplicando [26, theorem 6, página 233] se obtiene que $co(B)$ es equicontinuo y por ende, también lo es B. $\square$

Definición C.1.7. *Un espacio localmente convexo Hausdorff es un* ***espacio cuasibarrelado*** *si y solo si cumple cualquiera de las afirmaciones equivalentes del corolario C.1.6.*

Proposición C.1.8. *Sea B un subconjunto de E. Las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

(a) B es un barril.

(b) Existe un subconjunto M de E', absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$-acotado, tal que, $M_o = B$.

(c) Existe una seminorma p semi-continua inferiormente en E, tal que, $B = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\}$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Si B es un barril, entonces, el conjunto $M = B^o$ es $\sigma(E', E)$-acotado y absolutamente convexo, esto por [26, proposition 4, página 296].

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea M subconjunto de E', absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$-acotado, tal que $B = M_o$. Luego, podemos definir la seminorma p en cada $e \in E$, como sigue: $p(e) := \sup\{|\langle f, e\rangle| : f \in M\}$. Por el lema C.1.3, p es semi-continua inferiormente en X. Es claro que, $B = M_o = \{e \in E : |f(e)| \leqslant 1, \forall f \in M\} = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\}$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sea p una seminorma semi-continua inferiormente en E, tal que $B = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\}$. Luego, siguiendo el mismo argumento de C.1.5, B es un barril. □

Corolario C.1.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Cada conjunto $\sigma(E', E)$-acotado es equicontinuo.

(b) Cada barril de E es vecindad de 0.

(c) Cada seminorma semi-continua inferiormente en E, es continua.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Supongamos que (a) se cumple. Sea B un barril de E. Por la proposición anterior, existe un $\sigma(E', E)$-acotado, absolutamente convexo M, tal que, $M_o = B$. Como M es equicontinuo, se tiene que B es una vecindad de 0.

$(b) \Rightarrow (c)$: Ahora supongamos que (b) se cumple. Sea p una seminorma semi-continua inferiormente en E. Por la proposición anterior, el conjunto $\{e \in E : p(e) \leqslant 1\}$ es barril, luego, la continuidad se obtiene por (b).

$(c) \Rightarrow (a)$: Finalmente, supongamos que (c) se cumple. Sea B un conjunto $\sigma(E', E)$-acotado. La cápsula convexa de B, $co(B)$, es también un conjunto $\sigma(E', E)$-acotado.

En efecto, sean $e \in E$, $L = \sup\{f(e) : f \in M\}$, $f_1, \ldots, f_n \in B$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{K}$, tales que $\sum_{i=1}^{n} |t_i| \leqslant 1$.

$$|\sum_{i=1}^{n} t_i f_i(e)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |t_i||f_i(e)| \leqslant \text{máx}\{|f_i(e)| : i = 1, \ldots, n\} \leqslant L$$

Luego, por la proposición anterior, existe una seminorma p semi-continua inferiormente en E, tal que,

$$(co(B))_o = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\} \ .$$

Por hipótesis, p es continua y de aquí $(co(B))_o$ es una vecindad de 0. Aplicando [26, theorem 6, página 233] se obtiene que $co(B)$ es equicontinuo y por ende, también lo es B. $\square$

Definición C.1.10. *Un espacio localmente convexo Hausdorff es un* ***espacio barrelado*** *si y solo si cumple cualquiera de las afirmaciones equivalentes del corolario C.1.9.*

C.2. (DF)-espacios.

Definición C.2.1. *Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff. Una familia $\mathscr{B}$ de subconjuntos acotados de E, es un* ***sistema fundamental de conjuntos acotados*** *si todo subconjunto acotado de E esta contenido en algún elemento de $\mathscr{B}$.*

Definición C.2.2. *Un espacio localmente convexo Hausdorff E es un (DF)-espacio si y solo si satisface las siguientes condiciones:*

(a) E admite un sistema fundamental de conjuntos acotados numerable.

(b) Toda sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecindades de 0, absolutamente convexas y cerradas, cuya intersección, es un bornivoro, tiene por intersección a una vecindad de 0.

Proposición C.2.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) E admite un sistema fundamental de conjuntos acotados numerable.

(b) $(E', \beta(E', E))$ es metrizable.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Si $\mathscr{B}$ es un sistema fundamental de conjuntos acotados en E numerable, entonces $\{B^o : B \in \mathscr{B}\}$ es una base de vecindades numerable de $(E', \beta(E', E))$. Luego, por el teorema de Kakutani ([26, Theorem 3, página 33]), $(E', \beta(E', E))$ es metrizable.

$(b) \Rightarrow (a)$: Si $(E', \beta(E', E))$ es metrizable, entonces tiene una base de vecindades de 0 numerable $\{B_n^o : n \in \mathbb{N}\}$, donde (B_n) es una sucesión de subconjuntos acotados de E, la cuál es un sistema fundamental de acotados. $\square$

Lema C.2.4. *Un subconjunto B de E' es $\beta(E',E)$-acotado si y solo si B_o es un bornivoro.*

Demostración. Sean A un subconjunto acotado de E y $n \in \mathbb{N}$. El resultado, se deduce de la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned}\sup\{|f(e)| : e \in A, f \in B\} \leqslant n &\Leftrightarrow \sup\{|f(\frac{1}{n}e)| : e \in A, f \in B\} \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n}A \subset B_o\end{aligned}$$

□

Proposición C.2.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Toda sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecindades de 0, absolutamente convexas y cerradas, cuya intersección, es un bornivoro, tiene por intersección a una vecindad de 0.

(b) Cada $\beta(E',E)$-acotado que es unión numerable de conjuntos equicontinuos, es equicontinuo.

(c) Toda sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de seminormas continuas en E, tal que, $p = \sup_{n\in\mathbb{N}} p_n$ es una seminorma en E, acotada en cada subconjunto acotado de E, cumple con que p es continua.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Sea H un conjunto $\beta(E',E)$-acotado y supongamos que $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos equicontinuos de E', tales que, $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = H$. Se tiene que, $H_o = \bigcap_{n=1}^{\infty}(H_n)_o$. Luego, $((H_n)_o)$ es una sucesión de vecindades de 0, absolutamente convexas y cerradas. Por el lema anterior y por (a), se tiene que H_o es una vecindad de 0. Por lo tanto $(H_o)^o = H$ es equicontinuo.

$(b) \Rightarrow (a)$: Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vecindades de 0, absolutamente convexas y cerradas, cuya intersección U, es un bornivoro. Luego, $U^o = \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n)^o$, donde $(U_n)^o$ es equicontinuo para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el lema anterior y por (b), se tiene que $(U^o)_o = U$ es una vecindad de 0.

$(a) \Rightarrow (c)$: Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de seminormas continuas en E, tal que, $p = \sup_{n\in\mathbb{N}} p_n$ es una seminorma en E, acotada en cada subconjunto acotado de E.

Definamos $K = \{e \in E : p(x) \leqslant 1\}$ y $K_n = \{e \in E : p_n(x) \leqslant 1\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, donde K_n es una vecindad cerrada de 0, absolutamente convexa para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea A un subconjunto acotado de E y definamos $L = \sup\{p(e) : e \in A\}$. Luego, $A \subset LK$. De este modo, K es un bornivoro y por hipótesis K es vecindad de 0.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vecindades de 0, absolutamente convexas y cerradas, cuya intersección U, es un bornivoro. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, p_n la funcional de Minskowski en U_n De este modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que p_n es continua en E y $U_n = \{e \in E : p_n(e) \leqslant 1\}$. Si denotamos por p a la funcional de Minskowski en U, entonces $U = \{e \in E : p(e) \leqslant 1\} = \{e \in E : \sup_{n\in\mathbb{N}} p_n(e) \leqslant 1\}$.

Luego, $p(e) = 0$ si y solo si $\sup_{n\in\mathbb{N}} p_n(e) = 0$. Si $p(e) \neq 0$, entonces $e/p(e) \in U$, y de aquí, $\sup_{n\in\mathbb{N}} p_n(e) \leqslant p(e)$. Por otro lado, $e/\sup_{n\in\mathbb{N}} p_n(e) \in U$, y de aquí, $p(e) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} p_n(e)$. Resumiendo, $p = \sup_{n\in\mathbb{N}} p_n$, y como U es un bornivoro, se deduce que p es acotada. Aplicando (c) se concluye que p es continua, y por lo tanto U es una vecindad de 0. □

De las proposiciones C.2.3 y C.2.5 se deduce que existen al menos 6 definiciones equivalentes para un (DF)-espacio. La definición que elegimos es la siguiente:

Definición C.2.6. *Un espacio localmente convexo Hausdorff E es un (DF)-espacio si y solo si satisface las siguientes condiciones:*

(a) E admite un sistema fundamental de conjuntos acotados numerable.

(b) Toda sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de seminormas continuas en E, tal que, $p = \sup_{n\in\mathbb{N}} p_n$ es una seminorma en E, acotada en cada subconjunto acotado de E, cumple con que p es continua.

C.3. Espacios bornológicos y ultrabornológicos.

Definición C.3.1. *Un espacio localmente convexo Hausdorff es **bornológico** si cada subconjunto bornivoro absolutamente convexo es una vecindad de* 0.

Sea E un espacio localmente convexo Hasudorff y sea B un subconjunto acotado y absolutamente convexo de E. Ponemos $\langle B\rangle = \operatorname{span}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$ y notamos que B es un subconjunto absolutamente convexo y absorbente de $\langle B\rangle$. Luego, la funcional de Minkowski p_B de B es una seminorma en $\langle B\rangle$. De hecho, p_B es una norma en $\langle B\rangle$. En efecto, sea $e \in E$, tal que, $p_B(e) = 0$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha > 0$ tal que, $\alpha < \frac{1}{n}$ y $e \in \alpha B \subset \frac{1}{n}B$. Si $e \neq 0$, entonces (ne) es una sucesión en B, tal que, $(\frac{1}{n}ne)$ no es convergente a 0. Por lo tanto, B no es acotado, lo que es una contradicción.

Sea $\omega_B = \sigma(\langle B\rangle, \{p_B\})$ la topología en $\langle B\rangle$ inducida por la norma p_B. Se afirma que, la topología de subespacio en $\langle B\rangle$ inducida por $\tau_{_E}$ es menos fina que ω_B. En efecto, notemos que $\{e \in E : p_B(e) < 1\} \subset B$ y que dada una $\tau_{_E}$-vecindad U de 0, existe $t > 0$, tal que, $B \subset tU$. Luego, $\{e \in E : p_B(e) < \frac{1}{t}\} \subset \frac{1}{t}B \subset U \cap \langle B\rangle$. Además, se deduce que la inyección canónica $j_B : \langle B\rangle \to E$ es $(\omega_B, \tau_{_E})$-continua.

Sea $\mathscr{B}$ la familia de todos los subconjuntos de E que son acotados y absolutamente convexos simultáneamente. Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, entonces, el límite inductivo producido por la familia $\{(j_B, \langle B\rangle) : B \in \mathscr{A}\}$ se denotará por $\operatorname{ind}_{B\in\mathscr{A}}(j_B, \langle B\rangle)$.

Teorema C.3.2. *Sea E un espacio localmente convexo Hasudorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *E es bornológico.*

(b) *Cada seminorma en E, acotada en cada subconjunto acotado de E, es continua.*

(c) *Dados F un espacio localmente convexo Hausdorff y $T : E \to F$ una aplicación lineal acotada, se tiene que T es continua.*

(d) *E es un límite inductivo de espacios normados.*

(e) $(E, \tau_{_E}) = \operatorname{ind}_{B\in\mathscr{B}}(j_B, \langle B\rangle)$.

Demostración. Inmediato de [26, Theorem 1, página 261],[26, Theorem 3, página 269] y de [26, Exercise 1, página 274] . □

Definición C.3.3. *Un espacio localmente convexo Hausdorff es* ***ultrabonológico*** *si y solo si es un límite inductivo de espacios de Banach.*

Definición C.3.4. *Sea B un subconjunto acotado y absolutamente convexo de E. Decimos que B es* ***completante*** *si y solo si el espacio $(\langle B\rangle, \omega_B)$ es Banach.*

Lema C.3.5. *Sean E un espacio localmente convexo Hausdorff y $B \subset E$ un cerrado, acotado y absolutamente convexo. Supongamos que (e_n) es una sucesión de Cauchy en $\langle B\rangle$. Se tiene que, (e_n) es ω_B-convergente en $\langle B\rangle$, si y solo si, es $\tau_{_E}$-convergente en E.*

Demostración. Supongamos que (e_n) es ω_B-convergente en $\langle B\rangle$. Como la inyección canónica j_B es continua, tenemos que (e_n) es $\tau_{_E}$-convergente en E. Ahora supongamos que (e_n) es $\tau_{_E}$-convergente en E. Existe una sucesión creciente de números enteros (n_k) tal que: $p_B(e_m - e_n) < \frac{1}{2^{k+1}}$, para cada $m, n \geqslant n_k$. Ya que B es cerrado, podemos definir la siguiente sucesión decreciente de conjuntos cerrados $(e_{n_k} + \frac{1}{2^k}B)$. Por la desigualdad anterior, dado $k \in \mathbb{N}$, $e_m \in e_{n_k} + \frac{1}{2^k}B$, para cada $m \geqslant n_k$. Luego, la convergencia de (e_m) implica que $y = \lim e_m \in e_{n_k} + \frac{1}{2^k}B$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} e_{n_k} + \frac{1}{2^k}B$ y de aquí (e_{n_k}) es ω_B-convergente a y en $\langle B\rangle$. $\square$

Lema C.3.6. *Si $B \subset E$ es un subespacio acotado, absolutamente convexo y secuencialmente completo, entonces B es completante.*

Demostración. Sea (e_n) una sucesión de Cauchy en $\langle B\rangle$. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset mB$. Notemos que mB también es secuencialmente completo. Por lo tanto, (e_n) es $\tau_{_E}$-convergente a un elemento y de mB. Aplicando el lema anterior, (e_n) es ω_B-convergente. Por lo tanto, el espacio $(\langle B\rangle, \omega_B)$ es Banach. $\square$

En consecuencia, tenemos el siguiente:

Corolario C.3.7. *Sea $B \subset E$ un subespacio acotado y absolutamente convexo. Si B es completo o compacto, entonces es completante.*

Ahora mostraremos una serie de definiciones equivalentes para un espacio ultrabornológico.

Teorema C.3.8. *Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff. Si $\mathcal{K}$ es la familia de todos los subconjuntos de E, que son absolutamente convexos y compactos simultaneamente, $\mathcal{C}$ la familia de todos los subconjuntos completantes de E y $\mathcal{V}$ es una familia de subconjuntos de E, tal que $\mathcal{K} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{C}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(u) *E es ultrabornológico.*

(c1) *Toda seminorma en E, acotada en cada conjunto completante, es continua.*

(v1) *Toda seminorma en E, acotada en cada elemento de $\mathcal{V}$, es continua.*

(k1) *Toda seminorma en E, acotada en cada conjunto absolutamente convexo y compacto, es continua.*

(c2) *Todo subconjunto absolutamente convexo de E, que absorbe a cada subconjunto completante de E, es vecindad de 0.*

(v2) *Todo subconjunto absolutamente convexo de E, que absorbe a cada elemento de $\mathcal{V}$, es vecindad de 0.*

(k2) *Todo subconjunto absolutamente convexo de E, que absorbe a cada subconjunto absolutamente convexo y compacto de E, es vecindad de 0.*

(c3) $(E, \tau_{_E}) = \operatorname{ind}_{B \in \mathcal{C}}(j_B, \langle B \rangle)$.

(v3) $(E, \tau_{_E}) = \operatorname{ind}_{B \in \mathcal{V}}(j_B, \langle B \rangle)$.

(k3) $(E, \tau_{_E}) = \operatorname{ind}_{B \in \mathcal{K}}(j_B, \langle B \rangle)$.

Demostración. Demostraremos el teorema probando las implicaciones del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(c1) \arrow[r, Rightarrow] & (c2) \arrow[r, Rightarrow] & (c3) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(v1) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (v2) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (v3) \arrow[r, Rightarrow] & (u) \arrow[dll, Rightarrow] \\
(k1) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (k2) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (k3) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[ll, Rightarrow, bend left] &
\end{tikzcd}$$

Es inmediato que: $(k3) \Rightarrow (u)$, $(v3) \Rightarrow (u)$ y que $(c3) \Rightarrow (u)$. Ya que $\mathcal{K} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{C}$, también es inmediato que $(k1) \Rightarrow (v1) \Rightarrow (c1)$ y $(k2) \Rightarrow (v2) \Rightarrow (c2)$.

Supongamos que (c1) (respectivamente (v1))(respectivamente (k1)) se satisface.

Sea H un subconjunto absolutamente convexo de E que absorbe a cada elemento de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{V}$)(resp. $\mathcal{K}$). Notemos que H es absorbente. Luego, podemos definir p_H la funcional de Minkowski de H. Sea $B \in \mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{V}$)(resp. $\mathcal{K}$). Existe $r > 0$ tal que $B \subset rH \subset \{e \in E : p_H(e) \leqslant r\}$. Así, p_H es acotada en B y por hipótesis, es continua.

De este modo H es una vecindad de 0, pues $\{e \in E : p_H(e) < 1\} \subset H$. Así hemos probado $(c1) \Rightarrow (c2)$ (resp. $(v1) \Rightarrow (v2)$)(resp. $(k1) \Rightarrow (k2)$)

Ahora supongamos que (c2) (resp. (v2))(resp. (k2)) se cumple. Se tiene que la colección $\mathscr{U}_{\mathcal{C}}$ (resp. $\mathscr{U}_{\mathcal{V}}$)(resp. $\mathscr{U}_{\mathcal{K}}$) de todos los subconjuntos absolutamente convexos de E, que absorben a cada elemento de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{V}$)(resp. $\mathcal{K}$), es una base de τ_E-vecindades de 0. Consideremos el espacio $(E, \tau_{\mathcal{C}}) := \mathrm{ind}_{B \in \mathcal{C}}(j_B, \langle B \rangle)$ (resp. $(E, \tau_{\mathcal{V}}) := \mathrm{ind}_{B \in \mathcal{V}}(j_B, \langle B \rangle)$) (resp. $(E, \tau_{\mathcal{K}}) := \mathrm{ind}_{B \in \mathcal{K}}(j_B, \langle B \rangle)$).

Recordemos que la colección $\mathscr{U}^*_{\mathcal{C}}$ $(\mathscr{U}^*_{\mathcal{V}})(\mathscr{U}^*_{\mathcal{K}})$ definida por

$$\left\{ U \subset E : \begin{array}{c} U \text{ es absolutamente convexo, tal que, } j_B^{-1}(U) \\ \text{es una } \omega_B\text{-vecindad de 0 en } \langle B \rangle, \forall B \in \mathcal{C}(\mathcal{V})(\mathcal{K}) \end{array} \right\}$$

es una base de $\tau_{\mathcal{C}}(\tau_{\mathcal{V}})(\tau_{\mathcal{K}})$-vecindades de 0 en E.

Mostraremos que $\tau_E \leqslant \tau_{\mathcal{C}}$ (resp. $\tau_E \leqslant \tau_{\mathcal{V}}$)(resp. $\tau_E \leqslant \tau_{\mathcal{K}}$). Sea $H \in \mathscr{U}_{\mathcal{C}}$ $(\mathscr{U}_{\mathcal{V}})(\mathscr{U}_{\mathcal{K}})$.

Para $B \in \mathcal{C}(\mathcal{V})(\mathcal{K})$, existe $r > 0$, tal que, $B \subset rH$. Así, $B \subset rH \cap \langle B \rangle$. Por lo tanto $rH \cap \langle B \rangle$ es una ω_B-vecindad de 0 en $\langle B \rangle$, y de aquí, también lo es $j_B^{-1}(H) = H \cap \langle B \rangle$. De este modo $H \in \mathscr{U}^*_{\mathcal{C}}$ $(\mathscr{U}^*_{\mathcal{V}})(\mathscr{U}^*_{\mathcal{K}})$.

Ahora mostraremos que $\tau_{\mathcal{C}} \leqslant \tau_{E}$ (resp. $\tau_{\mathcal{V}} \leqslant \tau_{E}$)(resp. $\tau_{\mathcal{K}} \leqslant \tau_{E}$). Sea $H \in \mathscr{U}_{\mathcal{C}}^{*}$ $(\mathscr{U}_{\mathcal{V}}^{*})(\mathscr{U}_{\mathcal{K}}^{*})$. Ya que cada $B \in \mathcal{C}(\mathcal{V})(\mathcal{K})$ es ω_B-acotado en $\langle B\rangle$, existe $r > 0$, tal que, $B \subset r(U \cap \langle B\rangle) = rU \cap \langle B\rangle \subset rU$. Por lo tanto, $U \in \mathscr{U}_{\mathcal{C}}$ $(\mathscr{U}_{\mathcal{V}})(\mathscr{U}_{\mathcal{K}})$. Así, hemos mostrado que (c3)(resp. (v3))(resp. (k3)) se cumple.

Ahora probemos que $(k3) \Rightarrow (k1)$. Supongamos que (k3) se satisface. Sea q una seminorma en E, acotada en cada elemento de $\mathcal{K}$. Consideremos el conjunto $U = \{e \in E : q(e) \leqslant 1\}$. Dado $B \in \mathcal{C}$, existe $r > 0$, tal que, $B \subset rU$. Para cada $e \in \langle B\rangle$, se tiene que

$$\{c > 0 : e \in cB\} \subset \{c > 0 : e \in crU\}.$$

Luego, para todo $e \in \langle B\rangle$, $\frac{1}{r}q(e) = \frac{1}{r}p_U(e) \leqslant p_B(e)$, donde p_U y p_B son las funcionales de Minkowski de U y B respectivamente, ambas definidas en $\langle B\rangle$. De este modo, $\frac{1}{r}q \circ j_B \leqslant p_B$ en $\langle B\rangle$, por lo que $\frac{1}{r}q \circ j_B$ es ω_B-continua en $\langle B\rangle$.

Recordemos que $\tau_{\mathcal{K}} = \sigma(E, P)$, donde P es la familia de seminormas en E definida por $\{p : p \circ j_B$ es ω_B-continua en $\langle B\rangle, \forall B \in \mathcal{K}\}$. Por lo tanto q es $\tau_{\mathcal{K}}$-continua y por hipótesis, es τ_{E}-continua. Así hemos probado que (k1) se cumple.

Ahora basta probar que $(u) \Rightarrow (k2)$. Supongamos que $(E, \tau_{E}) = \mathrm{ind}_{\alpha\in\Lambda}(T_\alpha, E_\alpha)$, donde $(E_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de espacios de Banach y para cada $\alpha \in \Lambda$, T_α es una aplicación lineal de E_α a E. Sea $V \in \mathscr{U}_{\mathcal{K}}$. Dadas $\alpha \in \Lambda$ y B_α una bola cerrada de E_α, V absorbe a $T_\alpha(B_\alpha)$. En caso contrario, existe $\alpha \in \Lambda$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_\alpha$, tal que, $T_\alpha(x_n) \notin n^2V$, esto es, $T_\alpha(\frac{1}{n}x_n) \notin nV$. Como B_α es acotado en E_α, se tiene que la sucesión $(\frac{1}{n}x_n)$ es convergente a 0. Luego, el conjunto $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto en E_α. Ya que el conjunto $K = \overline{co(\{0\} \cup \{\frac{1}{n}x_n : n \in \mathbb{N}\})}$ es precompacto y el espacio E_α es completo, por A.2 se concluye que K es compacto absolutamente convexo. Por la continuidad y linealidad de T_α se tiene que $T_\alpha(K)$ es un subconjunto compacto absolutamente convexo de E y por lo tanto es absorbido por V. Es decir, existe $r > 0$, tal que $T_\alpha(\frac{1}{n}x_n) \in rV$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Elegimos $n > r$ y obtenemos que $T_\alpha(\frac{1}{n}x_n) \in nV$ llegando a una contradicción contradicción. De este modo, para todo $\alpha \in \Lambda$, existe $r > 0$, tal que, $T_\alpha(B_\alpha) \subset rV$. Así, $\frac{1}{r}B_\alpha \subset T_\alpha^{-1}(V)$. Por lo tanto,

$T_\alpha^{-1}(V)$ es una vecindad de 0 en E_α, para cada $\alpha \in \Lambda$. Así V es vecindad de 0 en $(E, \tau_{_E}) = \mathrm{ind}_{\alpha\in\Lambda}(T_\alpha, E_\alpha)$. $\square$

Ahora, para obtener al menos 22 equivalencias en el teorema anterior basta explicitar la familia $\mathcal{V}$. Por ejemplo, podemos considerar $\mathcal{V}_1(\mathcal{V}_2)(\mathcal{V}_2')(\mathcal{V}_3)(\mathcal{V}_3')$ como la familia de todos los subconjuntos de E, que son acotados, absolutamente convexos y completos (resp. secuencialmente completos y cerrados)(resp. secuencialmente completos ,cerrados y precompactos)(resp. secuencialmente completos)(resp. secuencialmente completos y precompactos) simultaneamente. De este modo, $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_3 \subset \mathcal{C}$ y $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2' \subset \mathcal{V}_3' \subset \mathcal{C}$.

C.4. Espacios Angelicales.

Un subespacio A de un espacio topológico S es:

- **relativamente numerablemente compacto (resp. numerablemente compacto)** si cada sucesión en A tiene un punto de acumulación en S (resp. en A).
- **relativamente secuencialmente compacto (resp. secuencialmente compacto)** si cada sucesión en A tiene una sucesión convergente a un punto en S (resp. en A).
- **σ-compacto** si este es la unión numerable de subespacios compactos.

La siguiente definición es debida a D.H. Fremlin.

Definición C.4.1. *Un espacio topológico Hausdorff S es un* ***espacio angelical*** *si satisface las siguientes tres propiedades:*

(a) Para cualquier subconjunto A de S son equivalentes:

(i) A es relativamente compacto.

(ii) A es relativamente numerablemente compacto.

(iii) A es relativamente secuencialmente compacto.

(b) similarmente son equivalentes:

(i) A es compacto.

(ii) A es numerablemente compacto.

(iii) A es secuencialmente compacto.

(c) Si A es un subespacio relativamente compacto, cada punto en $\overline{A}$ es el límite de una sucesión en A.

En [18] se exponen las demostraciones de las siguientes proposiciones:

Proposición C.4.2. *Si existe una función continua e inyectiva f desde un espacio regular S en un espacio angelical T, entonces S es también angelical.*

Proposición C.4.3. *Si T tiene un subespacio σ-compacto denso, entonces $(C(T), pw)$ es angelical.*

Proposición C.4.4. *Si $(C(T), pw)$ es angelical, entonces $(C(T, Z), pw)$ es angelical para cualquier espacio métrico Z.*

Corolario C.4.5. *Si T tiene un subespacio σ-compacto denso y Z es metrizable, entonces $(C(T, Z), pw)$ es angelical.*

Anexo D

Topologías mixtas en espacios vectoriales.

Este anexo está basado en el documento [30] de A. Wiweger. En todo el anexo denotaremos por F a un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ no trivial. Si τ es una topología vectorial en F (no necesariamente Hausdorff), entonces, denotaremos por $\mathcal{U}(\tau)$ a una base de vecindades balanceadas de 0 para τ, tal que, para cada $U \in \mathcal{U}(\tau)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, se tiene que, $\lambda U \in \mathcal{U}(\tau)$. Además, si Z es un subconjunto de F, entonces, la topología en Z inducida por τ se denotará por $\tau|Z$. La colección de todos los subconjuntos τ-acotados de (F, τ) se denotará por $Bd(\tau)$.

Sean τ y $\tau*$ dos topologías vectoriales en F. Para cada sucesión $U_n^* \in \mathcal{U}(\tau*)$ y para cada $U \in \mathcal{U}(\tau)$, denotaremos por $\gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U)$ o simplemente por U^γ al conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_1^* \cap U + U_2^* \cap 2U + \ldots + U_n^* \cap nU), \tag{D.1}$$

Esto es, el conjunto de todas las sumas $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, donde $x_k \in U_k^*$ y $\frac{1}{k}x_k \in U$.

Denotaremos por $\mathscr{R}$ a la familia de todos los conjuntos de la forma (D.1).

Lema D.1. *La familia $\mathscr{R}$ es una base de vecindades de 0 para una topología vectorial en F.*

Demostración. Es suficiente probar las siguientes afirmaciones:

(a) Para cada $U^\gamma \in \mathscr{R}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, se tiene que $\lambda U^\gamma \in \mathscr{R}$.

(b) Cada $U^\gamma \in \mathscr{R}$ es un conjunto balanceado y absorbente.

(c) Dados $U^\gamma, V^\gamma \in \mathscr{R}$, existe $W^\gamma \in \mathscr{R}$, tal que, $W^\gamma \subset U^\gamma \cap V^\gamma$.

Sean $U^\gamma \in \mathscr{R}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\lambda U^\gamma = \lambda \cdot \gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U) &= \lambda \cdot \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_1^* \cap U + U_2^* \cap 2U + \ldots + U_n^* \cap nU) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda U_1^* \cap \lambda U + \lambda U_2^* \cap 2\lambda U + \ldots + \lambda U_n^* \cap n\lambda U) \\
&= \gamma(\lambda U_1^*, \lambda U_2^*, \ldots; \lambda U).
\end{aligned}
$$

De este modo hemos probado (a). De la igualdad anterior, se deduce que U^γ es balanceado pues los conjuntos U_k^* $(k \in \mathbb{N})$ y U son balanceados. También se tiene que U^γ es absorbente, en efecto, dado $x \in F$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que, $\lambda x \in U_1^* \cap U \subset U^\gamma$. Por lo tanto se cumple (b). Para mostrar (c), consideremos $\gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U), \gamma(V_1^*, V_2^*, \ldots; V) \in \mathscr{R}$. Elegimos $W \in \mathfrak{U}(\tau)$, tal que $W \subset U \cap V$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, elegimos $W_k^* \in \mathfrak{U}(\tau^*)$, tal que, $W_k^* \subset U_k^* \cap V_k^*$.

Luego, $\gamma(W_1^*, W_2^*, \ldots; W) \subset \gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U) \cap \gamma(V_1^*, V_2^*, \ldots; V)$. $\square$

Definición D.2. *La topología vectorial en F que tiene a $\mathscr{R}$ como base de vecindades de 0, se llama* ***topología mixta*** *determinada por las topologías vectoriales τ y τ^* y se denota por $\gamma\,[\tau, \tau^*]$.*

Lema D.3. *Se tiene que $\tau^* \leqslant \gamma\,[\tau, \tau^*]$.*

Demostración. Dado $U^* \in \mathfrak{U}(\tau^*)$, existe $U_1^* \in \mathfrak{U}(\tau^*)$, tal que, $U_1^* + U_1^* \subset U^*$. Además existe $U_2^* \in \mathfrak{U}(\tau^*)$, tal que, $U_2^* + U_2^* \subset U_1^*$. En forma recursiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n^* \in \mathfrak{U}(\tau^*)$, tal que, $U_n^* + U_n^* \subset U_{n-1}^*$. De este modo tenemos que, $U_1^* + U_2^* + \ldots + U_n^* \subset U^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, $\gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U) \subset U^*$ para cada $U \in \mathfrak{U}(\tau)$. $\square$

Lema D.4. *Si $\tau^* \leqslant \tau$, entonces, $\gamma\,[\tau, \tau^*] \leqslant \tau$.*

Demostración. Dado $\gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U) \in \mathscr{R}$, existe $V \in \mathcal{U}(\tau)$, tal que, $V \subset U_1^* \cap U \subset \gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U)$. $\square$

Sean τ, τ^* y τ' tres topologías vectoriales en F. Diremos que la topología τ' satisface la condición (P_1) (con respecto al par (τ, τ^*)) si: $\tau'|Z = \tau^*|Z$ para cada $Z \in Bd(\tau)$.

Lema D.5. *La topología mixta $\gamma\,[\tau, \tau^*]$ satisface la condición (P_1).*

Demostración. Sea $Z \in Bd(\tau)$. Por el lema D.3, se tiene que $\tau^*|Z \leqslant \gamma\,[\tau, \tau^*]\,|Z$.

Para mostrar la otra desigualdad consideremos $x \in Z$ y $\gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U) \in \mathscr{R}$. Luego $(x + \gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U)) \cap Z$ es una vecindad de x respecto a la topología $\gamma\,[\tau, \tau^*]\,|Z$. Ya que $-x + Z \in Bd(\tau)$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que, $-x + Z \subset nU$. Luego, si $z \in (x + U_n^*) \cap Z$, entonces, podemos escribir $z = x + y$, donde $y \in U_n^*$. Como $y = -x + z \in -x + Z \subset nU$, se concluye que $y \in U_n^* \cap nU$. De este modo, $(x + U_n^*) \cap Z \subset (x + U_n^* \cap nU) \cap Z \subset (x + \gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U)) \cap Z$. Por lo tanto, $\gamma\,[\tau, \tau^*]\,|Z \leqslant \tau^*|Z$. $\square$

Lema D.6. *Si la topología vectorial τ es tal que, $\mathcal{U}(\tau) \subset Bd(\tau)$, entonces, para cada topología vectorial τ' definida en F, la condición*

$$\tau'|Z \leqslant \tau^*|Z \quad \textit{para cada} \quad Z \in Bd(\tau)$$

implica la relación

$$\tau' \leqslant \gamma\,[\tau, \tau^*]$$

Demostración. Sea τ' una topología vectorial en F, tal que, $\tau'|Z \leqslant \tau^*|Z$ para cada $Z \in Bd(\tau)$. Sean $V' \in \mathcal{U}(\tau')$ y $U \in \mathcal{U}(\tau)$. Ya que $U \in Bd(\tau)$, se tiene que $\bigoplus_{i=1}^{n} U \in Bd(\tau)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Debido a la condición que satisface τ', para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n^* \in \mathcal{U}(\tau^*)$ tal que

$$U_n^* \cap \bigoplus_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} U \subset V' \cap \bigoplus_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} U \ .$$

Por el mismo argumento que se empleó en D.3, podemos elegir una sucesión $W_n^* \in \mathcal{U}(\tau^*)$, tal que, $W_1^* + W_2^* + \ldots + W_n^* \subset U_n^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} W_1^* \cap U + W_2^* \cap 2U + \ldots + W_n^* \cap nU &\subset (W_1^* + W_2^* + \ldots + W_n^*) \cap \bigoplus_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} U \\ &\subset U_n^* \cap \bigoplus_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} U \\ &\subset V' \cap \bigoplus_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} U \end{aligned}$$

De este modo,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (W_1^* \cap U + W_2^* \cap 2U + \ldots + W_n^* \cap nU) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(V' \cap \bigoplus_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} U \right) \subset V' \ .$$

Por lo tanto, V' es una vecindad de 0 para $\gamma\,[\tau, \tau^*]$ y por ende, $\tau' \leqslant \gamma\,[\tau, \tau^*]$. $\square$

Corolario D.7. *Si la topología vectorial τ es tal que, $\mathcal{U}(\tau) \subset Bd(\tau)$, entonces, la topología mixta $\gamma\,[\tau, \tau^*]$, es la más fina de todas las topologías vectoriales que satisfacen la condición (P_1).*

Demostración. Es inmediata de los dos lemas anteriores. $\square$

Para cada sucesión $U_n^* \in \mathcal{U}(\tau^*)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ y para cada $U \in \mathcal{U}(\tau)$, denotaremos por $\gamma_1(U_0^*, U_1^*, \ldots; U)$ o simplemente por U^{γ_1} al conjunto

$$U_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (nU + U_n^*) \ . \tag{D.2}$$

La familia de todos los conjuntos de la forma (D.2) la denotaremos por $\mathscr{R}_1$.

Adicionalmente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos que tiende a infinito, entonces denotaremos por U^{γ_2} al conjunto

$$U_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n U + U_n^*) \ . \tag{D.3}$$

La familia de todos los conjuntos de la forma (D.3) la denotaremos por $\mathscr{R}_2$.

Lema D.8. *Dado $U^{\gamma_1} \in \mathscr{R}_1$, existe $U^{\gamma_2} \in \mathscr{R}_2$, tal que, $U^{\gamma_2} \subset U^{\gamma_1}$. Recíprocamente, si $U^{\gamma_2} \in \mathscr{R}_2$, existe $U^{\gamma_1} \in \mathscr{R}_1$, tal que, $U^{\gamma_1} \subset U^{\gamma_2}$.*

Demostración. Sea $U^{\gamma_1} = U_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}(nU + U_n^*)$. Consideremos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos que tiende a infinito. Existe una sucesión de números enteros positivos $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente, tal que, $a_1 = k_1$ y $a_n \leqslant k_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Elegimos $V_0^*, V_1^*, V_2^* \dots$ en $\mathcal{U}(\tau^*)$, de modo que

$$V_0^* \subset \bigcap_{p=0}^{k_1-1} U_p^* \qquad \text{y} \qquad V_n^* \subset \bigcap_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} U_p^*\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos que: $V_0^* \subset U_0^*$ y $a_nU \subset pU$, para cada $p \geqslant a_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, para cada $p \in \mathbb{N}$, tal que, $k_n \leqslant p \leqslant k_{n+1}-1$, se tiene que: $a_nU + V_n^* \subset pU + U_p^*$. Por lo tanto,

$$a_nU + V_n^* \subset \bigcap_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} \left(pU + U_p^*\right) .$$

Así,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_nU + V_n^*) \subset \bigcap_{p=k_1}^{\infty} \left(pU + U_p^*\right) ,$$

luego,

$$V_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_nU + V_n^*) \subset U_0^* \cap \bigcap_{p=k_1}^{\infty} \left(pU + U_p^*\right) ,$$

Si $k_1 = 1$, entonces hemos concluido que

$$U^{\gamma_2} := V_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_nU + V_n^*) \subset U_0^* \cap \bigcap_{p=k_1}^{\infty} \left(pU + U_p^*\right) = U^{\gamma_1} .$$

Si $k_1 > 1$, entonces $\quad V_0^* \subset \bigcap_{p=0}^{k_1-1} U_p^* \subset \bigcap_{p=1}^{k_1-1} U_p^* \subset \bigcap_{p=1}^{k_1-1} \left(U_p^* + pU\right)$. Luego,

$$U^{\gamma_1} := V_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_nU + V_n^*) \subset U_0^* \cap V_0^* \cap \bigcap_{p=k_1}^{\infty} \left(pU + U_p^*\right) \subset U_0^* \cap \bigcap_{p=1}^{\infty} \left(pU + U_p^*\right) = U^{\gamma_2} .$$

Para el recíproco, sea $U^{\gamma_2} = U_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n U + U_n^*)$, donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos que tiende a infinito. Existe una sucesión de números enteros positivos $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $m \geqslant N_n \Rightarrow n \leqslant a_m$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \geqslant N_n$, de modo que las sucesiones $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sean estrictamente crecientes y que $k_1 > 1$. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene: $m \geqslant k_n \Rightarrow n \leqslant a_m$. Elegimos $V_0^*, V_1^*, V_2^* \ldots$ en $\mathcal{U}(\tau^*)$, de modo que

$$V_0^* \subset \bigcap_{p=0}^{k_1-1} U_p^* \qquad \text{y} \qquad V_n^* \subset \bigcap_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} U_p^* \,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos que: $V_0^* \subset U_0^*$ y $nU \subset a_p U$, para cada $p \geqslant k_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, para cada $p \in \mathbb{N}$, tal que, $k_n \leqslant p \leqslant k_{n+1} - 1$, se tiene que: $nU + v_n^* \subset a_p U + U_p^*$. Por lo tanto,

$$nU + V_n^* \subset \bigcap_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} \left(a_p U + U_p^*\right) .$$

Así,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (nU + V_n^*) \subset \bigcap_{p=k_1}^{\infty} \left(a_p U + U_p^*\right) ,$$

luego,

$$V_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (nU + V_n^*) \subset U_0^* \cap V_0^* \bigcap_{p=k_1}^{\infty} \left(a_p U + U_p^*\right) ,$$

Ya que, $\quad V_0^* \subset \bigcap_{p=0}^{k_1-1} U_p^* \subset \bigcap_{p=1}^{k_1-1} U_p^* \subset \bigcap_{p=1}^{k_1-1} \left(U_p^* + a_p U\right)$, se concluye que

$$U^{\gamma_1} := V_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (nU + V_n^*) \subset U_0^* \cap \bigcap_{p=1}^{\infty} \left(a_p U + U_p^*\right) = U^{\gamma_2} .$$

□

Proposición D.9. *Suponga que la topología τ es localmente convexa y que todos los miembros de $\mathcal{U}(\tau)$ con conjuntos convexos. Las familias $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ son bases de vecindades de 0 para la topología mixta $\gamma\left[\tau, \tau^*\right]$.*

Demostración. Debido al lema anterior, es suficiente probar que la familia de todos los conjuntos de la forma

$$U_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}n(n+1)U + U_n^*)\ . \tag{D.4}$$

es una base de vecindades de 0 para la topología $\gamma\,[\tau,\tau^*]$. Primero mostremos que cada conjunto de la forma (D.4) es una vecindad de 0 para $\gamma\,[\tau,\tau^*]$.

Sea $V_1^* \in \mathcal{U}(\tau^*)$, tal que, $V_1^* + V_1^* \subset U_0^*$. Tomamos recursivamente $V_n^* \in \mathcal{U}(\tau^*)$ $(n > 1)$, tal que, $V_n^* + V_n^* \subset U_{n-1} \cap V_{n-1}^*$.

Luego se tiene que

$$V_1^* + V_2^* + \ldots + V_n^* \subset U_0^* \tag{D.5}$$

y para $p \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$V_n^* + V_{n+1}^* + \ldots + V_{n+p}^* \subset V_n^* + V_n^* \subset U_{n-1}^* \tag{D.6}$$

Por (D.6), para cada $n > 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma(V_1^*, V_2^*, \ldots; U) &= \bigcup_{p=1}^{\infty}(V_1^* \cap U + V_2^* \cap 2U + \ldots + V_{n-1}^* \cap (n-1)U + V_n^* \cap nU + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + V_{n+p}^* \cap (n+p)U) \\ &\subset \bigcup_{p=1}^{\infty}(U + 2U + \ldots (n-1)U + V_n^* + \ldots + V_{n+p}^*) \\ &\subset \frac{1}{2}n(n-1)U + U_{n-1}^*\ .\end{aligned}$$

De lo anterior junto con (D.5), se deduce que

$$\gamma(V_1^*, V_2^*, \ldots; U) \subset U_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}n(n+1)U + U_{n+1}^*\right)\ .$$

Ahora mostremos que cada conjunto $U^\gamma \in \mathscr{R}$ contiene a un conjunto de la forma (D.4). Sea $U^\gamma = \gamma(U_1^*, U_2^*, \ldots; U)$ una vecindad de 0 para la topología $\gamma\,[\tau,\tau^*]$. Para $n \in \mathbb{N}$, escribimos $m_n = 2n-1$. Podemos elegir una sucesión $V_i^* \in \mathcal{U}(\tau^*)$ $(i = 0, 1, 2\ldots)$, tal que, $V_{n-1}^* + V_{n-1}^* \subset U_{m_n}^*$ y $V_n^* \subset V_{n-1}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $U^{\gamma_1} := \gamma(V_0^*, V_1^*, \ldots; U) \subset U^\gamma$. Sea $x \in U^{\gamma_1}$. Entonces $x \in V_0^*$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una descomposición $x = y_n + z_n$, donde $y_n \in nU$ y $z_n \in V_n^*$.

Sea $x_1 = y_1$ y $x_n = y_n - y_{n-1}$, para $n > 1$. Para cada $n > 1$, se tiene la identidad:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + z_n = y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + z_n = y_n + z_n = x \quad \text{(D.7)}$$

Además, se tiene que $X = zn + y_n = z_{n-1} + y_{n-1}$. Luego, $x_n = y_n - y_{n-1} = z_{n-1} - Z_n \in V^*_{n-1} + V^*_n$. Por otro lado, $x_n = y_n - y_{n-1} \in nU + (n-1)U = (2n-1)U = m_n U$. De aquí, se deduce que $x_n \in (V^*_{n-1} + V^*_n) \cap m_n U$. Ya que, $V^*_{n-1} + V^*_n \subset V^*_{n-1} + V^*_{n-1} \subset U^*_{m_n}$. Así, para $n > 1$, se tiene que

$$x_n \in U^*_{m_n} \cap m_n U \, . \quad \text{(D.8)}$$

De la igualdad $z_n = x - y_n$, se tiene que $z_n \in (k_0 + n)U$, donde $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $x \in k_0 U$. Si $n_0 > k_0 - 1$, entonces $2n_0 + 1 = m_{n_0} > k_0 + n_0$ y $z_n \in V^*_{n_0} \subset V^*_{n_0} + V^*_{n_0} \subset U^*_{m_{n_0+1}}$. Por lo tanto,

$$z_{n_0} \in U^*_{m_{n_0+1}} \cap m_{n_0+1} U \, . \quad \text{(D.9)}$$

Por (D.7), (D.8) y (D.9), se tiene que

$$x = x_1 + \ldots + x_{n_0} + z_{n_0} \in U^*_{m_1} \cap m_1 U + \ldots + U^*_{m_{n_0}} \cap m_{n_0} U + U^*_{m_{n_0+1}} \cap m_{n_0+1} U \subset U^\gamma .$$

Por lo tanto, $U^{\gamma_1} \subset U^\gamma$, terminando la demostración. □

Teorema D.10. *Suponga que en un espacio vectorial F, la topología τ esta generada por una seminorma $\|\cdot\|$, y la topología τ^* por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.*

Si las seminormas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\alpha$ satisfacen las condiciones:

(a) $\|x\| = \sup_{\alpha \in \Lambda} \|x\|_\alpha$, *para cada $x \in F$, y*

(b) si $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda$, $x \in F$ y $\varepsilon > 0$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $y, z \in F$, tales que $x = y + z$, $\|z\|_{\alpha_i} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y $\|y\| \leqslant \text{máx}\{\|x\|_{\alpha_1}, \ldots, \|x\|_{\alpha_n}\} + \varepsilon$,

entonces, la familia de todos los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in F : \|x\|_{\alpha_i} \leqslant a_i\}, \quad \text{(D.10)}$$

donde $0 < a_i \to \infty$, es una base de vecindades de 0 para la topología mixta $\gamma[\tau, \tau^*]$.

Demostración. Utilizando un razonamiento análogo al empleado en D.1, se deduce que la familia de todos los conjuntos de la forma D.10, es una base de vecindades de 0 de una topología vectorial τ_1 en F. Sea $Z \in Bd(\tau)$, eso es, $Z \subset \{x \in F : \|x\| \leqslant r\}$, para algún $r > 0$. Tomamos una vecindad cualquiera de un elemento $x_0 \in Z$ en la topología $\tau_1|Z$. Podemos asumir que esta vecindad es de la forma

$$Z \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in F : \|x - x_0\|_{\alpha_i} \leqslant a_i\}, \qquad 0 < a_i \to \infty, \qquad \alpha_i \in \Lambda\,.$$

Si x, x_0, entonces, en virtud de (a), $\|x - x_0\|_{\alpha_i} \leqslant \|x - x_0\| \leqslant 2r$. De la condición $a_i \to \infty$, se sigue que existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $a_i > 2r$, para $i \geqslant i_0$. De este modo,

$$Z \cap \bigcap_{i=1}^{i_0} \{x \in F : \|x - x_0\|_{\alpha_i} \leqslant a_i\} = Z \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in F : \|x - x_0\|_{\alpha_i} \leqslant a_i\}.$$

De aquí, se concluye que $\tau_1|Z \leqslant \tau^*$. Luego, por D.6, se tiene que $\tau_1 \leqslant \gamma\,[\tau, \tau^*]\,.$

Por D.9, toda vecindad de 0 en la topología $\gamma\,[\tau, \tau^*]$, contiene a un conjunto de la forma

$$U_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (nU + U_n^*), \tag{D.11}$$

donde $U = \{x \in F : \|x\| \leqslant r\}$, $r > 0$, $U_n^* = \{x \in F : \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k_n} \|x\|_{\alpha_i} \leqslant \varepsilon_n\}$, $\alpha_i \in \Lambda$, $\varepsilon_n > 0$, $k_n < k_{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Sea $a_i = \min\{\varepsilon_0, r/2\}$ para $1 \leqslant i \leqslant k_0$ y $a_i = \frac{1}{2}nr$ para $k_{n-1} \leqslant i \leqslant k_n$.

Sea $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \{x \in F : \|x\|_{\alpha_i} \leqslant a_i\}$. Ya que $\|x\|_{\alpha_i} \leqslant a_i \leqslant \varepsilon_0$ para $1 \leqslant i \leqslant k_0$, se tiene que $x \in U_0^*$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Por la condición (b), existen elementos $y, z \in F$, tales que, $x = y + z$, $\|z\|_{\alpha_i} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k_m$, y $\|y\| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k_m} \{\|x\|_{\alpha_i}\} + \varepsilon\,.$ Luego, $z \in U_m^*$ y $\|y\| \leqslant \frac{1}{2}mr + \frac{1}{2}mr = mr$, esto es $y \in mU$.

De este modo, $x \in U_m^* + mU$. Por la arbitrariedad de $m \in \mathbb{N}$, deducimos que $x \in U_0^* \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (nU + U_n^*)$. Por lo tanto

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in F : \|x\|_{\alpha_i} \leqslant a_i\} \subset U_0^* \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (nU + U_n^*),$$

y de aquí se concluye que $\gamma\,[\tau, \tau^*] \leqslant \tau_1$. $\square$

Anexo E

Preguntas Abiertas.

Durante el desarrollo de esta tesis, surgieron algunas preguntas que no fueron contestadas en los temas tratados y tampoco se hace mención de las respuestas en la bibliografía empleada.

(a) ¿ Bajo qué condiciones el espacio $(C_b(X,E), \beta_{\mathcal{P}})$ es Mackey ?.

(b) En la sección 2.7 se muestra que las topologías β_p y $\gamma\,[u_p, \tau_p]$ coinciden en el espacio $C_b(X,E)$.

   (i) ¿ La topología $\gamma\,[\tau_u, \tau_{\mathcal{P}}]$ coincide con la topología $\beta_{\mathcal{P}}$?.

   (ii) ¿ Es la topología $\beta_{\mathcal{P}}$ la topología vectorial más fina que coincide con la topología $\tau_{\mathcal{P}}$ en los conjuntos τ_u-acotados ?.

(c) ¿ Cómo son las extensiones de las medidas del espacio $\mathcal{M}_{\mathcal{P},t}(X, \mathscr{L}(E,F))$ al σ-álgebra generado por $\mathcal{Z}$? y ¿ qué propiedades satisfacen los operadores integrales inducidos por estas nuevas medidas?.

Índice de Notaciones

Bibliografía

[1] Bartle, R., *Elements of integration*, John Wiley and Sons, Inc. (1966).

[2] Berberian, S., *Measure and integration*, The Macmillan Company (1965).

[3] Bourbaki, N., *Topologie générale*, Herman, Paris, Chapitre 10 (1960).

[4] Bourbaki, N., *Éléments de Mathématique, Espaces vectoriels topologiques*, Springer, Chapitres 1 a 5 (2007).

[5] Buck, R. C., *Bounded continuous functions on locally compact spaces*, The Michigan Mathematical Journal, 5 (1958), 95-104.

[6] Choo, S. A., *Strict topologies on spaces of continuous vector-valued functions*, PhD thesis, University of Iowa, Iowa (Mayo 1976).

[7] Dunford, N. y Schwartz, J., *Linear Operatos, Part I: General Theory*, Interscience Publishers Inc. (1958).

[8] Fontenot, R., *Strict topologies for vector-valued functions*, Canadian Journal of Mathematics, Vol. XXVI, No. 4 (1974), 841-853.

[9] Fremlin, D. H., Garling, D. J. H. y Haydon, R. G., *Bounded measures on topological spaces*, Proceedings London Mathematical Society (3) 25 (1972), 115-136.

[10] Grothendieck, A., *Topological vector spaces*, Gordon and Breach, Science Publishers Ltd. (1973).

[11] GROTHENDIECK, A., *Sur les applications lineares faiblement compactes d'espaces du type C(K)*, Canadian Journal of Mathematics, V, 2 (1953), 129-173.

[12] HALMOS, P., *Measure theory*, Springer-Verlang New York Inc.(1974).

[13] KATSARAS, A., *Continuous linear functionals on spaces of vector-valued functions*, Bulletin Société Mathématique de Grèce, Tome 15 (1974), 13-19.

[14] KATSARAS, A., *Locally convex topologies on spaces of continuous vector functions*, Mathematische Nachrichten 71 (1976), 211-226.

[15] KATSARAS, A. AND LIU, D. B., *Integral representation of weakly compact operators*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 56, no 2 (1975), 547-556.

[16] NOUREDDINE, K., *Localisation topologique, Espaces Db et Topologies Strictes*, PhD thèse, Universite Claude-Bernard, Lyon (Junio 1977).

[17] PAGE, W., *Topological uniform structures*, Wiley-Interscience (1978).

[18] PRYCE, J., *A device of R. J. Whitley's applied to pointwise compactness in spaces of continuous functions*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) 23 (1971), 532-546.

[19] RUESS, W., [*Weakly*] *Compact operators and DF spaces*, Pacific journal of mathematics, Vol. 98, No 2 (1982), 419-441.

[20] SCHMETES, J. Y ZAFARANI, J., *Topologie stricte faible et mesures discretes*, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège 43 (1974), 405-418.

[21] SCHMETES, J., *Espaces de Fonctions Continues*, Springer, Lecture Notes in Mathematics 519 (1976).

[22] SCHMETES, J., *Spaces of vector-valued continuous functions*, Springer, Lecture Notes in Mathematics 1003 (1983).

[23] Schmetes, J. y Zafarani, J., *Strict topologies and (gDF)-spaces*, Archiv der Mathematik 49 (1987), 227-231.

[24] Sentilles, F. D., *Bounded continuous functions on a completely regular space*, Transactions of the American Mathematical Society 168 (1972), 311-336.

[25] Summers, W., *Separability in the strict and substrict topologies*, Proceedings of the American Mathematical Society 35 (1972), 507-514.

[26] Swartz, C., *An introduction to Functional Analysis*, Marcel Dekker, Inc. (1992).

[27] Van Rooij, A. C. M., *Tight functionals and the strict topology*, Kyungpook Mathematical Journal 7 (1967), 41-43.

[28] Varadarajan, V., *Measure on topological spaces*, American Mathematical Society Translations (2) 48 (1965), 161-228.

[29] Wheeler, R., *A survey of Baire measures and strict topologies*, Expositiones Mathematicae 2 (1983), 97-190.

[30] Wiweger, A., *Linear spaces with mixed topology*, Studia Mathematica 20 (1961), 47-68.

[31] Zafarani, J., *Locally convex topologies on spaces of vector-valued continuous functions*, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège 55 (1986), 353-362.