



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Programa Magíster en Matemática

Soluciones Fundamentales para problemas de evolución sobre \mathbb{T}^n

Tesis presentada para optar al grado académico de
Magíster en Matemática

ALEX EDUARDO GUIÑAZÚ SALAS
CONCEPCIÓN-CHILE
2021

Profesor Guía: Vicente Vergara Aguilar
Departamento de Matemática
Universidad de Concepción, Chile



Dedicada a la memoria de mi madre, Andrea Salas

Índice general

Introducción	3
1 Análisis de Fourier en \mathbb{T}^n	4
1.1 Funciones y distribuciones en \mathbb{T}^n y \mathbb{Z}^n	4
1.2 Espacios de Sobolev	17
2 Operadores pseudo-diferenciales en \mathbb{T}^n	19
2.1 Análisis Discreto	19
2.2 Símbolos Toroidales	26
2.3 Clases de símbolos $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$	30
2.4 Extensión y periodización de operadores pseudo-diferenciales	32
3 Semigrupos	39
3.1 Semigrupos de convolución	39
4 Resultados	48
4.1 Estimaciones a soluciones de problemas de evolución	48
A Teoremas	63

Introducción

No es sorpresa que el estudio de problemas de evolución se haya mantenido vigente durante ya muchos años, esto en gran parte debido a las distintas aplicaciones en problemas, por ejemplo, del área de la física e ingeniería. Cabe resaltar que gran parte de las publicaciones relacionadas a este tema, ocurren bajo el contexto del espacio \mathbb{R}^n . En esta tesis, nos enfocamos en estudiar problemas de evolución en el caso del toro n -dimensional \mathbb{T}^n . Es a lo menos curioso, la gran diferencia en la cantidad de publicaciones que uno puede encontrar respecto a los casos de \mathbb{R}^n y \mathbb{T}^n . En este último caso, uno podría pensar que gran parte del análisis se reduce simplemente a un caso particular de \mathbb{R}^n , por ejemplo, al ver e interpretar a las funciones definidas sobre \mathbb{T}^n como funciones periódicas de \mathbb{R}^n . Recientemente, han aparecido varias publicaciones relacionadas a este tema. Una de ellas, es la investigación que realizó M. Ruzhansky, junto a M. Turunen en [14, 15, 16] y el libro [17]. Aquí, desarrollaron en profundidad gran parte de la teoría de operadores pseudo-diferenciales en \mathbb{T}^n y grupos abelianos, lo que ha sido fundamental para el trabajo realizado en esta tesis. Otros autores que han ayudado en el desarrollo de la teoría de operadores pseudo-diferenciales en el toro \mathbb{T}^n son S. Melo [10], W. McLean [9] y Bu-Kim [5]. Además, tenemos el trabajo hecho por L. Roncal y P. Stinga en [13], donde estudiaron en profundidad el laplaciano fraccionario en \mathbb{T}^n , Á. Benyi y Tadahiro Oh revisaron la desigualdad de Sobolev toroidal en [3], R. Denk y B. Barraza trabajaron con operadores pseudo-

diferenciales, multiplicadores de Fourier y semigrupos de convolución en [6, 7, 8, 11] para el caso de \mathbb{T}^n . La mayoría de estos trabajos son recientes, básicamente de la últimas dos década, pero el concepto de operador pseudo-diferencial periódico ya tiene más de 40 años desde que Mikhail Agranovich lo presentó en [1], para el caso de \mathbb{S}^1 .

Para cumplir nuestro objetivo de estudiar las soluciones a problemas de evolución sobre el toro \mathbb{T}^n , procederemos de la siguiente manera. En el Capítulo 1, comenzamos revisando definiciones y teoremas clásicos del análisis de Fourier, como por ejemplo, los espacios de Schwartz y la transformada de Fourier, para finalizar con una pequeña revisión de la definición de los espacios de Sobolev en \mathbb{T}^n . La idea es entregar los conceptos fundamentales para poder entender este trabajo y de paso mostrar que gran una parte de los resultados conocidos en \mathbb{R}^n , también aplican al caso del toro n-dimensional \mathbb{T}^n . Luego, en el Capítulo 2, introducimos a los operadores pseudo-diferenciales junto a sus correspondientes símbolos toroidales. Para poder hacer esto, primero necesitamos definir lo que son las diferencias parciales posterior y anterior. Estos operadores, van a reemplazar a las derivadas parciales conocidas desde \mathbb{R}^n , ya que, en nuestro caso, los símbolos de operadores pseudo-diferenciales están definidos sobre el espacio discreto \mathbb{Z}^n y por lo tanto, no contamos con la definición clásica de derivada parcial. Finalizamos el capítulo 2, mostrando la relación entre los operadores pseudo-diferenciales reales y toroidales. En el Capítulo 3, hacemos una revisión de la teoría de semigrupos de convolución. Para nuestro caso, resulta fundamental considerar estos conceptos, sobre todo para poder justificar la existencia de las soluciones para el problema de evolución vamos a estudiar. Finalmente, en el

Capítulo 4 presentamos los resultados obtenidos al analizar el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f(x, t), & t > 0, x \in \mathbb{T}^n; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}^n, \end{cases}$$

con A un operador pseudo-diferencial definido sobre el toro n -dimensional \mathbb{T}^n , primero viendo el caso en que $f(t, x) = 0$ y estudiando la regularidad de la solución, para posteriormente, trabajar bajo algunas suposiciones sobre la función f .



Capítulo 1

Análisis de Fourier en \mathbb{T}^n

En este capítulo presentamos algunas definiciones sobre funciones y distribuciones en el toro n -dimensional \mathbb{T}^n , además de incluir algunas herramientas del Análisis de Fourier que ocuparemos más adelante. El propósito de este capítulo es proveer la información necesaria para poder entender los distintos tópicos presentados en esta tesis.

1.1. Funciones y distribuciones en \mathbb{T}^n y \mathbb{Z}^n

Comenzamos fijando algunas notaciones. Denotaremos al toro n -dimensional por $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, sin embargo, también es posible identificarlo con el cubo $[0, 1)^n$ según sea necesario. A continuación, definimos la siguiente expresión

$$\langle x \rangle := \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $|x|$ es la norma euclidiana de x . La idea detrás de definir $\langle x \rangle$, es tener una función que se comporte asintóticamente como la norma $|x|$ cuando $x \rightarrow \infty$, pero

que a diferencia esta, nunca se haga cero.

Llamaremos multi-índice a un vector $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y para $x \in \mathbb{R}^n$, escribiremos $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Denotaremos a el binomial y los coeficientes binomiales, con β un multi-índice, por

$$\beta! := \beta_1! \cdots \beta_n! \quad \text{y} \quad \binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Como vamos a trabajar sobre \mathbb{T}^n , es importante definir y entender que consideraremos por función periódica y también presentar los espacios donde estas funciones se van a encontrar.

Definición 1.1.1 (Funciones periódicas). Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ es **1-periódica** si $f(x + k) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Observación 1.1.1. Podemos pensar a las funciones definidas sobre \mathbb{T}^n , como funciones de \mathbb{R}^n 1-periódicas en cada una de sus componentes. Esto a través de la siguiente relación de equivalencia sobre \mathbb{R}^n

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

Definición 1.1.2 (Espacios $C^\infty(\mathbb{T}^n)$). Denotamos a $C^m(\mathbb{T}^n)$, $m \in \mathbb{N}_0$, como el espacio de todas las funciones 1-periódicas que son m -veces continuamente diferenciables. Llamaremos por espacio de funciones test a el espacio $C^\infty(\mathbb{T}^n) := \bigcap_{m \in \mathbb{Z}^+} C^m(\mathbb{T}^n)$.

La topología natural de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es inducida por las seminormas que uno obtiene al pedir la siguiente convergencia:

$$u_j \rightarrow u \iff \partial^\alpha u_j \rightarrow \partial^\alpha u \text{ uniformemente,} \quad (1.1)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Similar a el caso de \mathbb{R}^n , tenemos el espacio de Schwartz, que nos ayudará a poder definir más adelante a la Transformada de Fourier en \mathbb{T}^n .

Definición 1.1.3 (Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$). El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ consiste en todas las funciones $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de decrecimiento rápido en \mathbb{Z}^n , es decir, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ si y solo si para todo $M > 0$ existe una constante $C_{\varphi, M}$ tal que

$$|\varphi(\xi)| \leq C_{\varphi, M} \langle \xi \rangle^{-M},$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

La topología en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ esta dada por la siguiente familia contable de seminormas $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ definidas por

$$p_k(\varphi) := \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^k |\varphi(\xi)|, \quad (1.2)$$

con $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$. De esta manera, una sucesión $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ converge a una función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ si y solo si

$$p_k(\varphi_j - \varphi) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0.$$

El espacio de distribuciones temperadas sobre \mathbb{Z}^n se denota por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ y consiste en todas las aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ en \mathbb{C} .

El siguiente resultado nos entrega una caracterización de los elementos del espacio de distribuciones $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

Proposición 1.1.1. *Si $f : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo, entonces f*

es de la forma

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} u(\xi) \varphi(\xi),$$

con $u : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función que crece a lo más polinomialmente en el infinito.

Demostración. Denotemos por P el espacio de todas las funciones $u : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que crecen a lo más polinomialmente al infinito. Sea $J : P \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ definida por

$$u \mapsto J_u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathbb{C},$$

donde para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$

$$J_u(\varphi) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} u(\xi) \varphi(\xi).$$

Primero mostremos que J está bien definida. Como $u \in P$, entonces existe $M < \infty$ y $C_{u,M}$ tal que

$$\left| \sum_{k \leq |\xi| \leq m} u(\xi) \varphi(\xi) \right| \leq \sum_{k \leq |\xi| \leq m} C_{u,M} \langle \xi \rangle^M |\varphi(\xi)|$$

y como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, entonces existe $M_1 > M$ y C_{φ, M_1} tal que

$$\left| \sum_{k \leq |\xi| \leq m} u(\xi) \varphi(\xi) \right| \leq C \langle \xi \rangle^{M-M_1}.$$

De esta manera, $\sum u(\xi) \varphi(\xi)$ es de Cauchy y más aún converge uniformemente en \mathbb{C} . Luego, tenemos que J está bien definida. A continuación, mostremos que J es una biyección. Sea $u, v \in P$, tal que $J_u(\varphi) = J_v(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Definamos la

siguiente función $\psi_\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ por

$$\psi_\eta(\xi) := \begin{cases} 0, & \text{si } \xi \neq \eta, \\ 1, & \text{si } \xi = \eta. \end{cases}$$

Es así como,

$$J_u(\psi_\eta) = J_v(\psi_\eta) \Rightarrow u(\eta) = v(\eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}^n.$$

Por lo tanto, $u = v$ y J es inyectiva. Finalmente, mostremos que la función J es sobreyectiva. Por 1.2, tenemos que

$$\begin{aligned} p_k \left(\sum_{|\xi| \leq m} \varphi(\xi) \psi_\xi - \varphi \right) &= \sup_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \langle \eta \rangle^k \left| \sum_{|\xi| \leq m} \varphi(\xi) \psi_\xi(\eta) - \varphi(\eta) \right| \\ &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{Z}^n \\ |\eta| \geq m}} \langle \eta \rangle^k |\varphi(\eta)|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Además,

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle^k |\varphi(\eta)| &= \langle \eta \rangle^{-1} \langle \eta \rangle^{k+1} |\varphi(\eta)| \\ &= \langle \eta \rangle^{-1} p_{k+1}(\varphi). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Así, utilizando (1.3) y (1.4) tenemos que

$$p_k \left(\sum_{|\xi| \leq m} \varphi(\xi) \psi_\xi - \varphi \right) \leq \langle m \rangle^{-1} p_{k+1}(\varphi) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.5)$$

Sea $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ y usando (1.5), se tiene que

$$\sum_{|\xi| \leq m} \varphi(\xi) \langle v, \psi_\xi \rangle = \left\langle v, \sum_{|\xi| \leq m} \varphi(\xi) \psi_\xi \right\rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle v, \varphi \rangle,$$

es decir, $\langle v, \varphi \rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) u(\xi)$, con $u(\xi) = \langle v, \psi_\xi \rangle$. Por lo tanto, la función J es una biyección, terminando con esto la demostración. \square

A continuación damos la definición de la Transformada de Fourier y su inversa en el caso del toro n -dimensional \mathbb{T}^n .

Definición 1.1.4 (Transformada de Fourier toroidal). Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ la transformada de Fourier toroidal o periódica definida por

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n. \quad (1.6)$$

Luego para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ de la siguiente manera

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g)(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} g(\xi), \quad x \in \mathbb{T}^n. \quad (1.7)$$

Llamaremos a $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g$ la transformada de Fourier inversa periódica de g .

Notar que la Transformada de Fourier Toroidal posee propiedades similares a las que podemos encontrar en el caso real. En la siguiente proposición enumeramos estas propiedades y mostramos algunas de ellas.

Proposición 1.1.2. Sea $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Luego para todo $x \in \mathbb{T}^n$, $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(I) \widehat{f + g}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi);$$

$$(II) \widehat{\lambda f}(\xi) = \lambda \hat{f}(\xi);$$

$$(III) \widehat{f}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)};$$

$$(IV) (e^{i2\pi x \cdot \eta} f(x))^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi - \eta);$$

$$(V) \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}, \text{ en particular, si } f \in L^1(\mathbb{T}^n) \text{ entonces } \widehat{f} \in l^\infty(\mathbb{Z}^n);$$

$$(VI) \widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi);$$

$$(VII) \widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i2\pi\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \text{ para } f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{T}^n).$$

Demostración. Para probar (vi) usamos el teorema de Fubini, más el Teorema de cambio de variables. Entonces,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x-y)g(y)e^{-i2\pi(x-y)\cdot\xi}e^{-i2\pi y\cdot\xi} dy dx = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

El resto de las propiedades enunciadas se obtienen directamente usando la definición de transformada de Fourier en \mathbb{T}^n . \square

Al trabajar en el caso del toro n-dimensional, a diferencia de \mathbb{R}^n , la inversa de la Transformada de Fourier, es representada, en esta ocasión, por una serie en vez de una integral. Esta diferencia entre \mathbb{R}^n y \mathbb{T}^n , cambia las herramientas a considerar cuando estudiemos las soluciones a problemas de evolución en \mathbb{T}^n .

Proposición 1.1.3 (Fórmula de inversión de Fourier). *La transformada de Fourier $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ es una biyección y su inversa esta dada por*

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi).$$

Además, $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ y $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ son continuas y

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} = \mathbb{1}_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)}, \quad \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} = \mathbb{1}_{C^\infty(\mathbb{T}^n)}.$$

Demostración. A continuación, mostremos que $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} = \mathbb{1}_{C^\infty(\mathbb{T}^n)}$. Se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{T}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi y \cdot \xi} f(y) dy \right) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} e^{-i2\pi y \cdot \xi} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \delta(y - x) f(y) dy = f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} = \mathbb{1}_{C^\infty(\mathbb{T}^n)}$ y como $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ es un operador lineal continuo, tenemos que además $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ es una biyección. Para ver la continuidad, sea $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Luego para $\xi \in \mathbb{Z}^n$, se tiene, que por el Teorema de convergencia dominada A.4,

$$|\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |e^{i2\pi x \cdot h} - 1| |f(x)| dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Entonces $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ es continua, de hecho es uniformemente continua. Y como es una biyección y \mathbb{T}^n es compacto, entonces la transformada de Fourier inversa también es continua. □

Una de las ventajas que tenemos al trabajar en \mathbb{T}^n por sobre \mathbb{R}^n , es que no es necesario preocuparse por la convergencia de las integrales definidas sobre \mathbb{T}^n , esto debido a la compacidad del toro n-dimensional \mathbb{T}^n . Con esto en mente, definimos a continuación los espacios $L^p(\mathbb{T}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.1.5. Para $1 \leq p < \infty$, sea $L^p(\mathbb{T}^n)$ el espacio de todas las funciones $u \in L^1(\mathbb{T}^n)$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} := \left(\int_{\mathbb{T}^n} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Para $p = \infty$, sea $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ el espacio de todas las funciones $u \in L^1(\mathbb{T}^n)$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} := \text{esssup}_{x \in \mathbb{T}^n} |u(x)| < \infty.$$

Señalamos a parte la definición del espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$, al ser este un espacio de Hilbert.

Definición 1.1.6. El espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$ es un espacio de Hilbert con el siguiente producto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} := \int_{\mathbb{T}^n} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Revisemos algunas propiedades del caso $L^2(\mathbb{T}^n)$. Consideremos a continuación la siguiente familia de funciones $\{e_\xi : \xi \in \mathbb{Z}^n\}$ definida por

$$e_\xi(x) := e^{i2\pi x \cdot \xi}$$

y mostremos que es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 1.1.1. *La familia $\{e_\xi : \xi \in \mathbb{Z}^n\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$.*

Demostración. Sea $E = \text{span}\{e_\xi : \xi \in \mathbb{Z}^n\}$. Luego para $\xi \neq \eta$ tenemos que

$$\langle e_\xi, e_\eta \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi x \cdot (\xi - \eta)} dx = \int_{\mathbb{T}^n} \cos(2\pi(\xi - \eta)x) + i \sin(2\pi(\xi - \eta)x) dx = 0$$

y además

$$\langle e_\xi, e_\xi \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \int_{\mathbb{T}^n} dx = 1.$$

Ahora como $e_\xi \cdot e_\eta = e_{\xi+\eta}$ y $\overline{e_\eta} = e_{-\eta}$, tenemos que E es una álgebra involutiva. Más aún, para $x \neq y$ en T^n , existe un $\xi \in \mathbb{Z}^n$, tal que $e_\xi(x) \neq e_\xi(y)$, es decir, E separa puntos. Luego por el Teorema de Stone-Weierstrass, E es denso en $L^2(\mathbb{T}^n)$. Por lo tanto E es una base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$. \square

Continuamos mostrando la identidad de Plancherel en el caso de \mathbb{T}^n , junto a las desigualdades de Hausdorff-Young y Young para convoluciones.

Proposición 1.1.4 (Identidad de Plancherel). *Si $u \in L^2(\mathbb{T}^n)$, entonces $\hat{u} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ y*

$$\|\hat{u}\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Luego, viendo la norma de $L^2(\mathbb{T}^n)$ como producto interno y usando las propiedades de este, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| u - \sum_{|\xi| \leq n} \hat{u}(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 &= \|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 - 2 \sum_{|\xi| \leq n} |\hat{u}(\xi)|^2 + \sum_{|\xi| \leq n} |\hat{u}(\xi)|^2 \\ &= \|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 - \sum_{|\xi| \leq n} |\hat{u}(\xi)|^2. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2.$$

La otra desigualdad se obtiene de manera inmediata usando la representación en serie de Fourier de u . □

Corolario 1.1.2 (Hausdorff-Young). *Sea $1 \leq p \leq 2$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $u \in L^p(\mathbb{T}^n)$, entonces $\hat{u} \in l^q(\mathbb{Z}^n)$ y*

$$\|\hat{u}\|_{l^q(\mathbb{Z}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

Demostración. Primero observemos que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |e^{-i2\pi x \cdot \xi} u(x)| dx \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}.$$

Luego, tenemos que $\|\widehat{u}\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$. Ahora, usando la identidad de Plancharel en la Proposición (1.1.4), junto al Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin A.1, se demuestra el corolario. \square

A continuación damos la definición de convolución de funciones en \mathbb{T}^n . Además, mostraremos la desigualdad de Young para convoluciones, ya que será de bastante utilidad al momento de querer encontrar algunas estimaciones a las soluciones del problema que veremos en el Capítulo 4 de esta tesis.

Definición 1.1.7. Para funciones $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ definimos su convolución por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{T}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Proposición 1.1.5 (Desigualdad de Young para convoluciones). *Sea $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{T}^n)$. Entonces $f * g \in L^p(\mathbb{T}^n)$ y*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

Demostración. Usando la desigualdad de Minkowski para integrales del Teorema A.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{T}^n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(y)g(x - y)dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{T}^n} |g(x - y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$. \square

Proposición 1.1.6 (Desigualdad general de Young para convoluciones). *Sean $1 \leq$*

$p, q, r \leq \infty$, de manera que se cumpla la siguiente igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Supongamos que $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ y que $g \in L^q(\mathbb{T}^n)$. Entonces $f * g \in L^r(\mathbb{T}^n)$ y

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

Demostración. Denotemos por $T_g f = f * g$ al operador lineal de convolución de g y sea $q' = q/(q-1)$. Notemos que por la desigualdad de Hölder A.3, se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f(y)g(x-y)| dy \leq \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n)},$$

es decir, tenemos que

$$\|T_g f\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}. \quad (1.8)$$

Además, por la Proposición (1.1.5) tenemos que

$$\|T_g f\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}. \quad (1.9)$$

Luego, usando (1.8) y (1.9) junto al teorema de interpolación de Riesz-Thorin A.1, tenemos que el operador T_g se puede extender a un operador lineal acotado de $L^p(\mathbb{T}^n)$ a $L^r(\mathbb{T}^n)$, donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{q'} + \frac{t}{1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{q},$$

para todo $t \in (0, 1)$. Por lo tanto,

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)},$$

para todo $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{T}^n)$. \square

Por último presentamos el espacio de Distribuciones periódicas, junto a la definición de la Transformada de Fourier distribucional.

Definición 1.1.8. El espacio dual $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) = \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^n), \mathbb{C})$ se llama espacio de distribuciones periódicas. El valor de $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ aplicado sobre una función test $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, es denotado por $u(\varphi)$ o $\langle u, \varphi \rangle$.

La topología del espacio $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ es la topología débil estrella, es decir, dado una sucesión $(u_k)_{k \in \mathcal{N}}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$, esta converge a $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ si y solo si

$$\langle u_k, \varphi \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle u, \varphi \rangle \text{ en } \mathbb{C}, \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Ejemplo 1.1.3. Para cualquier función $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ la aplicación

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(x) \psi(x) dx,$$

es una distribución periódica, que induce la siguiente inclusión

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n).$$

Ejemplo 1.1.4. Sea $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$. Luego la aplicación

$$\phi f : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathbb{C},$$

definida por $(\phi f)(\varphi) := f(\phi\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, pertenece a $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

Definición 1.1.9. Dualizando la inversa $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$, la transformada de Fourier es extendida únicamente a la aplicación $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ definida por la siguiente fórmula

$$\langle \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} u, \varphi \rangle := \langle u, \iota \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi \rangle,$$

donde $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ y la función ι esta definida por $(\iota \circ \psi)(x) = \psi(-x)$.

1.2. Espacios de Sobolev

En esta sección definimos los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$, que nos serán de utilidad para obtener información sobre las derivadas de las soluciones que estudiaremos en el Capítulo 4.

Definición 1.2.1. Para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ y $s \in \mathbb{R}$ definimos la norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)} := \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Luego el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$ es el espacio de todas las distribuciones 1-periódicas u , tal que $\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)} < \infty$.

Necesitamos además introducir la definición de espacios de Sobolev Homogéneos $\dot{H}^s(\mathbb{T}^n)$. A diferencia del espacio de Sobolev usual, este solo considera la información de las derivadas de la función, y que si bien, es bastante útil poseer esta información, el motivo principal de introducir este espacio, es más que nada, facilitar los cálculos que realizaremos más adelante. Esto debido a problemas que aparecen cuando quere-

mos acotar las series que definen a las soluciones que aparecen, más adelante, en el Capítulo 4.

Definición 1.2.2. Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ y $s \in \mathbb{R}$. Luego definimos la siguiente semi-norma para el espacio $\dot{H}^s(\mathbb{T}^n)$

$$\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^n)} = \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)| \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

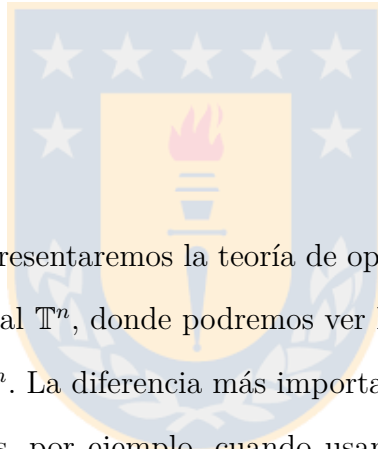
Hacemos notar que en este caso solo tenemos una semi-norma, a diferencia de los espacios de Sobolev usuales y perdemos la información de $L^2(\mathbb{T}^n)$.



Capítulo 2

Operadores pseudo-diferenciales

en \mathbb{T}^n



En este capítulo presentaremos la teoría de operadores pseudo-diferenciales sobre el toro n -dimensional \mathbb{T}^n , donde podremos ver las diferencias que aparecen, respecto al caso real de \mathbb{R}^n . La diferencia más importante, es que al tener que trabajar sobre espacios discretos, por ejemplo, cuando usamos la inversa de la transformada de Fourier o también cuando definamos a los símbolos de operadores pseudo-diferenciales, para este último, el concepto de derivada usual ya no es aplicable a nuestro caso, como lo es en \mathbb{R}^n . Por esta razón y ya que las derivadas parciales son fundamentales en la definición del símbolo de un operador pseudo-diferencial, es necesario primero introducir algunos conceptos del análisis discreto.

2.1. Análisis Discreto

Comenzamos primero viendo algunas herramientas del análisis discreto que serán necesarias para poder definir los símbolos de operadores pseudo-diferenciales

en la siguiente sección, empezando con el Operador diferencia parcial posterior y anterior.

Definición 2.1.1. Sea $\sigma : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y $1 \leq i, j \leq n$. Sea $\delta_j \in \mathbb{N}_0^n$ definida por

$$(\delta_j)_i := \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Definimos el Operador diferencia parcial posterior y anterior Δ_{ξ_j} y $\bar{\Delta}_{\xi_j}$ respectivamente, de la siguiente manera

$$\Delta_{\xi_j} \sigma(\xi) := \sigma(\xi + \delta_j) - \sigma(\xi),$$

$$\bar{\Delta}_{\xi_j} \sigma(\xi) := \sigma(\xi) - \sigma(\xi - \delta_j),$$

y para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definimos

$$\Delta_{\xi}^{\alpha} := \Delta_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\alpha_n},$$

$$\bar{\Delta}_{\xi}^{\alpha} := \bar{\Delta}_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \bar{\Delta}_{\xi_n}^{\alpha_n}.$$

A continuación, mostramos algunas de las propiedades que posee el operador diferencia parcial posterior y anterior.

Proposición 2.1.1. Sean $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Luego, para todo multi-índice $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ los operadores diferencia conmutan, es decir,

$$\Delta_{\xi}^{\alpha} \Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi) = \Delta_{\xi}^{\beta} \Delta_{\xi}^{\alpha} \varphi(\xi) = \Delta_{\xi}^{\alpha+\beta} \varphi(\xi).$$

Más aún,

$$\Delta_{\xi}^{\alpha}(s\varphi(\xi) + t\psi(\xi)) = s\Delta_{\xi}^{\alpha}\varphi(\xi) + t\Delta_{\xi}^{\alpha}\psi(\xi),$$

para todo s y t escalares.

Demostración. Notemos primero que como se definieron estos operadores para un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, basta con revisar el caso para un par de componentes, con i, j fijos. Se tiene que,

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_j} \Delta_{\xi_i} \varphi(\xi) &= \Delta_{\xi_j} (\varphi(\xi + \delta_i) - \varphi(\xi)) \\ &= \varphi(\xi + \delta_i + \delta_j) - \varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi + \delta_i) + \varphi(\xi) \\ &= \Delta_{\xi_i} (\varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)) \\ &= \Delta_{\xi_i} \Delta_{\xi_j} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Además tenemos que

$$\Delta_{\xi_j}^{\alpha_j} \varphi(\xi) = \Delta_{\xi_j}^{\alpha_j - 1} (\Delta_{\xi_j} \varphi(\xi))$$

y de esta manera,

$$\Delta_{\xi_j}^{\alpha_j} \Delta_{\xi_i}^{\beta_i} \varphi(\xi) = \Delta_{\xi_i}^{\beta_i} \Delta_{\xi_j}^{\alpha_j} \varphi(\xi).$$

Para la otra propiedad que se quiere mostrar, basta con observar que

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_j}(s\varphi(\xi) + t\psi(\xi)) &= s\varphi(\xi + \delta_j) + t\psi(\xi + \delta_j) - s\varphi(\xi) - t\psi(\xi) \\ &= s(\varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)) + t(\psi(\xi + \delta_j) - \psi(\xi)) \end{aligned}$$

$$= s\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi) + t\Delta_{\xi_j}\psi(\xi).$$

Terminando así la demostración. □

Si bien la definición de estos operadores no es muy compleja, al tener que trabajar con multi-índices $\alpha \in N_0^n$, el cálculo se puede volver un poco engorroso. La fórmula que viene a continuación, trata de simplificar este cálculo y, al mismo tiempo, obtener otra forma de poder representar a estos operadores.

Proposición 2.1.2. *Sea $\phi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Luego se tiene que*

$$\begin{aligned}\Delta_{\xi}^{\alpha}\phi(\xi) &= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \phi(\xi + \beta), \\ \bar{\Delta}_{\xi}^{\alpha}\phi(\xi) &= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \phi(\xi - \beta),\end{aligned}$$

Demostración. Sea $E_j := (I + \Delta_{\xi_j})$. Luego para $\phi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tenemos que

$$E_j(\phi)(\xi) := (I + \Delta_{\xi_j})\phi(\xi)$$

y definamos $E^{\alpha} = E_1^{\alpha_1} \cdots E_n^{\alpha_n}$. De esta manera, usando el teorema del Binomio, se tiene que

$$\begin{aligned}\Delta_{\xi}^{\alpha}\phi(\xi) &= (E - I)^{\alpha}\phi(\xi) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\alpha-\beta|} E^{\beta}\phi(\xi) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\alpha-\beta|} \phi(\xi + \beta).\end{aligned}$$

De forma similar se muestra que

$$\bar{\Delta}_\xi^\alpha \phi(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \phi(\xi - \beta),$$

solo que en este caso, basta con definir el siguiente operador de traslación,

$$\bar{E}_j := (I - \bar{\Delta}_{\xi_j})$$

y aplicarlo de la misma que antes, terminando así la demostración. \square

Observación 2.1.1. Notar que $E_j \bar{\Delta}_{\xi_j} = \Delta_{\xi_j} = \bar{\Delta}_{\xi_j} E_j$.

Usando la Proposición 2.1.2, nos es posible ahora demostrar la versión discreta de la Fórmula de Leibniz, que detallamos a continuación.

Lema 2.1.1 (Fórmula discreta de Leibniz). *Sea $\phi, \psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Luego*

$$\Delta_\xi^\alpha (\phi\psi)(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\Delta_\xi^\beta \phi(\xi)) \Delta_\xi^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta). \quad (2.1)$$

Demostración. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_j}(\varphi\psi)(\xi) &= (\varphi\psi)(\xi + \delta_j) - (\varphi\psi)(\xi) \\ &= (\varphi\psi)(\xi + \delta_j) - (\varphi\psi)(\xi) + \varphi(\xi)\psi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)\psi(\xi + \delta_j) \\ &= \varphi(\xi)(\psi(\xi + \delta_j) - \psi(\xi)) + \psi(\xi + \delta_j)(\varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)) \\ &= \varphi(\xi)\Delta_{\xi_j}\psi(\xi) + \psi(\xi + \delta_j)\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi). \end{aligned}$$

Luego por inducción matemática sobre $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que,

$$\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j}(\varphi\psi)(\xi) = \Delta_{\xi_j}\Delta_\xi^\alpha(\varphi\psi)(\xi)$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta_{\xi_j} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi)) \Delta_{\xi}^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi + \delta_j)) \Delta_{\xi}^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta + \delta_j) - (\Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi)) \Delta_{\xi}^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi)) (\Delta_{\xi}^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta + \delta_j) - \Delta_{\xi}^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta)) \\
&\quad + (\Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi + \delta_j) - \Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi)) \Delta_{\xi}^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta + \delta_j) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [(\Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi)) \Delta_{\xi}^{\alpha+\delta_j-\beta} \psi(\xi + \beta) + (\Delta_{\xi}^{\beta+\delta_j} \varphi(\xi)) \Delta_{\xi}^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta + \delta_j)] \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha+\delta_j} \left[\binom{\alpha}{\beta} + \binom{\alpha}{\beta - \delta_j} \right] (\Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi)) \Delta_{\xi}^{\alpha+\delta_j-\beta} \psi(\xi + \beta) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha+\delta_j} \binom{\alpha + \delta_j}{\beta} (\Delta_{\xi}^{\beta} \varphi(\xi)) \Delta_{\xi}^{\alpha+\delta_j-\beta} \psi(\xi + \beta).
\end{aligned}$$

En la última igualdad usamos la identidad de Pascal para coeficientes binomiales. Con esto se termina la demostración. \square

Finalizamos esta sección sobre análisis discreto, mostrando un análogo de la integración por partes usual en \mathbb{R}^n , pero aplicado a series.

Lema 2.1.2 (Suma por partes). *Sean $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces*

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \Delta_{\xi}^{\alpha} \psi(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (\overline{\Delta_{\xi}^{\alpha} \varphi}) \psi(\xi).$$

Demostración. Primero supongamos que $|\alpha| = 1$. Luego, manipulando la siguiente serie,

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \Delta_{\xi_j} \psi(\xi) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) (\psi(\xi + \delta_j) - \psi(\xi)) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \psi(\xi + \delta_j) - \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \psi(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} -\psi(\xi)(\varphi(\xi) - \psi(\xi - \delta_j)) \\
&= (-1) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \psi(\xi) \Delta_{\xi_j} \varphi(\xi).
\end{aligned}$$

Ahora si $|\alpha| \geq 2$, basta con considerar $\alpha = \beta + \gamma$, con $|\beta| = 1$ y seguir de manera recursiva, igual que en la parte anterior. \square

Si bien, las herramientas presentadas en esta sección, son vitales para poder definir de forma correcta a los operadores pseudo-diferenciales en el caso del toro n -dimensional \mathbb{T}^n , y sirven como análogos a los resultados que uno puede encontrar en \mathbb{R}^n , algunas veces, dificultan el análisis que uno desea realizar. Por ejemplo, el tener que trabajar con series en vez de integrales, significa perder el teorema de cambio de variable, el cual ayuda bastante al momento de hacer un análisis similar al que haremos, pero en \mathbb{R}^n . Observando la investigación de N. Hayashi, E. Kaikina, P. Naumkin y I. Shishmarev en [12], donde estudian ecuaciones del tipo,

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

se puede observar que poder usar estos teoremas clásicos de \mathbb{R}^n simplifica y ayuda bastante a poder obtener decaimientos de las soluciones a este tipo de problemas. Por ejemplo, si al integrar tenemos problemas en el cero, es posible separar esa integral y analizar por separado su comportamiento cercano y alejado del cero. En nuestro caso, al trabajar con series y tratar de aislar esos puntos problemáticos utilizando ideas similares a las que usamos con integrales, no dio resultado. Esto nos obligó a buscar otras formas de poder trabajarlas y poder obtener algún decaimiento.

Eso sí, también tiene su lado positivo. Poder trabajar con series de Fourier y tener a disposición toda la teoría relacionada a series numéricas que se ha desarrollado

en todos estos años, ayuda a compensar los resultados que perdemos de \mathbb{R}^n .

2.2. Símbolos Toroidales

Presentamos a continuación la teoría de operadores pseudo-diferenciales definidos sobre el toro \mathbb{T}^n , recordando primero algunas definiciones en el caso de \mathbb{R}^n . Si bien, en el análisis y los resultados que se pueden encontrar en el Capítulo 4 nos restringimos a usar símbolos del tipo $a = a(\xi)$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$, en esta sección preferimos mostrar la teoría de operadores pseudo-diferenciales de manera general, considerando símbolos del tipo $a = a(x, \xi)$, $x \in \mathbb{T}^n$ y $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Comenzamos primero con la definición de símbolo en el caso de \mathbb{R}^n .

Definición 2.2.1 (Clase de símbolos $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$). Sea $0 \leq \rho, \delta \leq 1$. Diremos que $a \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ si $a = a(x, \xi)$ es suave en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y si se cumple que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq A_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (2.2)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Luego tenemos el siguiente teorema que nos permite definir operadores pseudo-diferenciales dado un símbolo $a \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.2.1. *Sea $a \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si definimos el siguiente operador pseudo-diferencial con símbolo a por*

$$a(X, D)f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Entonces, $a(X, D)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 2.2.1. La clase de operadores de la forma (2.3) con símbolos en $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ se denota por $\Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

Teorema 2.2.2 (Cuantización de operadores). *Un operador lineal continuo $T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es un operador pseudo-diferencial con símbolo $a(x, \xi)$ si y solo si*

$$a(x, \xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} T(e^{2\pi i x \cdot \xi}) \in S_{\rho,\delta}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad (2.4)$$

en particular, un operador pseudo-diferencial $T \in \Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ define su símbolo $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ de manera única, por lo tanto $T = a(X, D)$.

Observación 2.2.2. Si $A \in \Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, denotaremos su símbolo por $\sigma_A = \sigma_A(x, \xi)$.

Revisemos a continuación la noción sobre que es un Kernel periódico de Schwartz. Sean $\psi, \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y sea $\psi \otimes \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^{2n})$ definida por $(\psi \otimes \varphi)(x, y) := \psi(x)\varphi(y)$. Luego tenemos que si el operador $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ es lineal y continuo, entonces

$$\langle K_A, \psi \otimes \varphi \rangle := \langle A\psi, \varphi \rangle$$

define un Kernel periódico de Schwartz $K_A \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{2n})$ correspondiente al operador $A \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^n), \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n))$. Para referirnos a K_a y A , podemos usar la siguiente notación informal,

$$A\varphi(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K_A(x, y)\varphi(y)dy. \quad (2.5)$$

Algo que ocuparemos en las definiciones y teoremas que siguen, es la siguiente relación

entre el kernel de convolución $k_A \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{2n})$ de A y el kernel de Schwartz, dada por

$$K_A(x, y) = k_A(x, x - y).$$

Usando la igualdad anterior en conjunto con (2.5) tenemos que,

$$A\varphi(x) = \int_{\mathbb{T}^n} k_A(x, x - y)\varphi(y)dy.$$

Observación 2.2.3. Denotaremos $k_A(x)(y) := k_A(x, y)$

Ahora, podemos definir a los símbolos de operadores pseudo-diferenciales sobre el toro n-dimensional \mathbb{T}^n .

Definición 2.2.2. Sea $e_\xi(x) = e^{i2\pi x \cdot \xi}$. El símbolo toroidal de un operador lineal continuo $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ en $x \in \mathbb{T}^n$ y $\xi \in \mathbb{Z}^n$ está definido por

$$\sigma_A(x, \xi) := \widehat{k_A(x)}(\xi) = \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(k_A(x))(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n} k_A(x, y)e^{-i2\pi x \cdot \xi}dy. \quad (2.6)$$

Observación 2.2.4. Usando la fórmula de inversión de Fourier de la Proposición 1.1.3, es posible recuperar el kernel de convolución del operador A :

$$k_A(x, y) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \sigma_A(x, \xi).$$

Ya es posible observar algunas diferencias con respecto a \mathbb{R}^n . La aparición de series y que sean estas las que remplacen a las integrales y como por ejemplo, en el teorema que sigue a continuación, son las series de Fourier las que ahora definen a los operadores pseudo-diferenciales en \mathbb{T}^n , a diferencia de lo que se ve en (2.3).

Teorema 2.2.3 (Cuantización de operadores en \mathbb{T}^n). *Sea σ_A el símbolo toroidal de un operador lineal continuo $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Entonces*

$$Af(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \sigma_A(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \quad (2.7)$$

para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y $x \in \mathbb{T}^n$.

Demostración. Primero fijamos $x_0 \in \mathbb{T}^n$. Luego definimos el siguiente operador de convolución A_{x_0} por

$$A_{x_0}f(x) := \int_{\mathbb{T}^n} f(y)k_{x_0}(x-y)dy = (f * k_{x_0})(x)$$

con $k_{x_0}(y) = k_A(x_0, y)$ y k_A el kernel del operador A . De esta forma,

$$\sigma_{A_{x_0}}(x, \xi) = \widehat{k}_{x_0}(\xi) = \sigma_A(x_0, \xi)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} A_{x_0}f(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \widehat{A_{x_0}f}(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \sigma_A(x_0, \xi) \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$. □

Finalizamos la sección dando enunciando una fórmula para poder encontrar el símbolo de un operador pseudo-diferencial.

Teorema 2.2.4. *Sea σ_A el símbolo toroidal de un operador lineal continuo $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Entonces para todo $x \in \mathbb{T}^n$ y $\xi \in \mathbb{Z}^n$ tenemos que*

$$\sigma_A(x, \xi) = e^{-i2\pi x \cdot \xi}(Ae_\xi)(x) = \overline{e_\xi(x)}(Ae_\xi)(x). \quad (2.8)$$

Demostración. Usando el Teorema 2.2.3 tenemos que

$$e^{-i2\pi x \cdot \xi}(Ae_\xi)(x) = e^{-i2\pi x \cdot \xi} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \eta} \sigma_A(x, \eta) \widehat{e}_\xi(\eta) = \sigma_A(x, \xi).$$

Por lo tanto, $\sigma_A(x, \xi) = \overline{e_\xi(x)}(Ae_\xi)(x)$. □

2.3. Clases de símbolos $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$

En esta sección definimos las clases de símbolos correspondientes a operadores pseudo-diferenciales en \mathbb{T}^n y donde lo visto en la sección 2.1 será de gran utilidad, ya que, al tener que trabajar en un espacio discreto, como lo es \mathbb{Z}^n , la noción usual de límite desaparece y por lo tanto no podemos usar derivadas parciales sobre la variable ξ , al momento de definir los símbolos toroidales.

Definición 2.3.1. Sea $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. Luego la clase de símbolos toroidales $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ consiste de funciones $a(x, \xi)$, suaves en x para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y que satisfacen la siguiente desigualdad

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{a\alpha\beta m} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \quad (2.9)$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Observación 2.3.1. Usaremos la siguiente notación. Para todo ρ y δ ,

$$S_{\rho,\delta}^{-\infty} := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n),$$

$$S_{\rho,\delta}^{\infty} := \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n).$$

Si bien, ahora usamos el operador diferencia posterior para definir los símbolos de operadores pseudo-diferenciales en el toro \mathbb{T}^n , esta definición trata de conservar la idea detrás de la definición de símbolo proveniente de \mathbb{R}^n . Ya con la definición de símbolos definidos sobre el espacio $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ enunciada, estamos en condiciones de poder dar la definición de operador pseudo-diferencial en \mathbb{T}^n .

Definición 2.3.2. Si $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, denotaremos por $a(X, D) = Op(a)$ el correspondiente operador pseudo-diferencial toroidal definido por

$$Op(a)f(x) = a(X, D)f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi). \quad (2.10)$$

El conjunto de operadores $Op(a)$ de la forma (2.10) con $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ se denotará por $\Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Si un operador A cumple que $A \in \Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, denotaremos a su símbolo por $\sigma_A = \sigma_A(x, \xi)$, $x \in \mathbb{T}^n$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y naturalmente $\sigma_{a(X,D)} = a(x, \xi)$.

Proposición 2.3.1. Sea $f \in C^\infty$. Luego el operador $Op(a)f$ en (2.10) está bien definido y $Op(a)f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Más aún, el operador $Op(a) : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es continuo.

Demostración. Primero notemos que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Luego la serie

$$Op(a)f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi)$$

converge absolutamente y tenemos que $Op(a)f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Luego,

$$\begin{aligned} Op(a)f(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) f(y) dy, \end{aligned}$$

e integrando por partes con respecto a la variable y , obtenemos que

$$Op(a)f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^{-2q} a(x, \xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} \left(I - \frac{\mathcal{L}_y}{4\pi^2} \right) f(y) dy,$$

donde \mathcal{L}_y es el operador laplaciano con respecto a la variable y . Entonces, tomando un $q \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande, la serie que representa a $Op(a)f$ converge absolutamente. Para ver la continuidad de $Op(a)$, basta con considerar una sucesión $\{f_j\} \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, que converja a una función $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y junto a el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue A.4 mostrar que $Op(a)f_j \rightarrow Op(a)f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. \square

2.4. Extensión y periodización de operadores pseudo-diferenciales

En esta sección estudiaremos la extensión de símbolos toroidales y la periodización de operadores pseudo-diferenciales, enfocándonos mayormente en esta última. La idea es mostrar la relación que existe entre los operadores pseudo-diferenciales definidos sobre los espacios $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$. Para poder hacer esto, primero necesitamos el siguiente lema que introduce algunas funciones que usaremos más adelante.

Lema 2.4.1. *Existen funciones $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y una función $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tal que*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\theta(x) &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \theta(x+k) \equiv 1, \\ (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)|_{\mathbb{Z}^n}(\xi) &= \delta_{0,\xi} \quad \text{y} \quad \partial_\xi^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi) = \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi), \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Demostración. Primero veamos el caso uno dimensional. Sea $\theta = \theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, tal que

$$\text{supp}(\theta_1) \subset (-1, 1), \quad \theta_1(-x) = \theta_1(x), \quad \theta_1(1-y) + \theta_1(y) = 1,$$

para $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq y \leq 1$. De esta manera, $\theta_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y por la transformada de Fourier toroidal tenemos que $\hat{\theta}_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Luego, para $\xi \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \theta_1(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{-1}^1 \theta_1(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \int_0^1 \theta_1(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx + \int_{-1}^0 \theta_1(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \int_0^1 (\theta_1(x-1) + \theta_1(x)) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \delta_{0,\xi}. \end{aligned}$$

Ahora suponiendo que existe una función $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, esta debe cumplir que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} \partial_\xi^\alpha \hat{\theta}_1(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi) d\xi \\ &= (1 - e^{i2\pi x})^\alpha \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} \phi_\alpha(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene al hacer la descomposición del término $\overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi)$. Luego, integrando por partes α veces tenemos que

$$(-i2\pi x)^\alpha \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} \widehat{\theta}_1(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} (1 - e^{i2\pi x})^\alpha \phi_\alpha(\xi) d\xi.$$

Por lo tanto,

$$(-i2\pi x)^\alpha \theta_1(x) = (1 - e^{i2\pi x})^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{R}} \phi_\alpha)(x)$$

y

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}} \phi_\alpha)(x) = \begin{cases} \left(\frac{-i2\pi x}{1 - e^{i2\pi x}}\right)^\alpha \theta_1(x), & \text{si } 0 < |x| < 1, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Para el caso n-dimensional, basta con considerar la siguiente función

$$x \mapsto \theta_1(x_1)\theta_1(x_2)\theta_1(x_3)\dots\theta_1(x_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

y analizar componente por componente, terminando así la demostración del lema. \square

El teorema que enunciamos a continuación, mostrado por M. Ruzhansky y V. Turunen en [15], relaciona a los símbolos euclidianos con los toroidales.

Teorema 2.4.1. *Sea $0 < \rho < 1$ y $0 \leq \delta \leq 1$. Un símbolo $\tilde{a} \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ es un símbolo toroidal si y solo si existe un símbolo euclidiano $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$, tal que $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$. Más aún, esta extensión es única módulo $S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

Ahora queremos mostrar la periodización de operadores pseudo-diferenciales, para que junto al Teorema 2.4.1 poder relacionar a los operadores provenientes de

símbolos euclidianos y toroidales. Primero, necesitamos dar la definición de la delta de Dirac comb e introducir el operador periodización.

Definición 2.4.1. La función *delta de Dirac comb* $\delta_{\mathbb{Z}^n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$\langle \delta_{\mathbb{Z}^n}, \varphi \rangle := \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x),$$

y es absolutamente convergente.

Proposición 2.4.1. *Tenemos la siguiente convergencia,*

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n: |x| \leq j} \delta_x \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \delta_{\mathbb{Z}^n}.$$

Demostración. Sea $P_j := \sum_{x \in \mathbb{Z}^n: |x| \leq j} \delta_x$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} |\langle P_j - \delta_{\mathbb{Z}^n}, \varphi \rangle| &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^n: |x| > j} |\varphi(x)| \\ &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^n: |x| > j} C \langle x \rangle^{-M} \rightarrow j \rightarrow \infty 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para un $M > 0$ suficientemente grande, se demuestra la proposición \square

En definitiva, tenemos que podemos interpretar a la delta de Dirac comb como la suma de delta de Dirac usuales.

Teorema 2.4.2. *La periodización $\mathcal{P}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es definida por*

$$\mathcal{P}f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x + k).$$

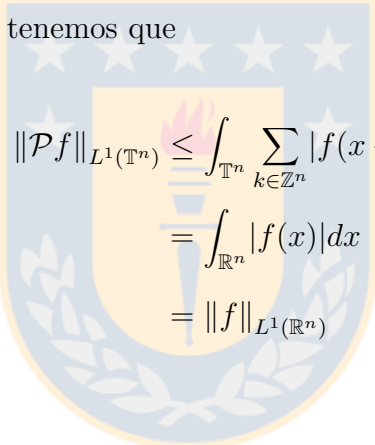
Luego, $\mathcal{P} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es sobreyectiva y $\|\mathcal{P}f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Más aún, tenemos que

$$\mathcal{P}f(x) = \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}((\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)|_{\mathbb{Z}^n})(x)$$

y

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi). \quad (2.11)$$

Demostración. Primero tenemos que



$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(x+k)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Ahora, para $\xi \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathcal{P}f)(\xi) &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} \mathcal{P}f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} f(x) dx \\ &= (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi). \end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k) = \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi).$$

Por último, para mostrar la sobreyectividad, sea $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como en el Lema (2.4.1).

Luego, para todo $g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(g\theta)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(x+k)\theta(x+k) \\ &= g(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \theta(x+k) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.3 (Periodización de operadores pseudo-diferenciales). *Sea $a = a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 1-periodica con respecto a la variable x para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ existen constantes $C_{\alpha\beta}$ y $M(\alpha, \beta)$ tal que se cumple la siguiente estimación*

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{M(\alpha, \beta)}$$

para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Sea $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$. Entonces

$$\mathcal{P} \circ a(X, D)f = \tilde{a}(X, D) \circ \mathcal{P}f$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a(X, D)f)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (a(X, D)f)(x+k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x+k)\cdot\xi} a(x+k, \xi) (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi k \cdot \xi} \right) e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\mathbb{Z}^n}(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) d\xi \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathcal{P}f)(\xi) = \tilde{a}(X, D)(\mathcal{P}f)(x).
\end{aligned}$$

□

Finalmente, usando el Teorema 2.4.1 junto al Teorema 2.4.3, obtenemos el siguiente corolario, que muestra que los espacios de operadores definidos sobre $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ coinciden.

Corolario 2.4.4. *Para $0 \leq \delta \leq 1$ y $0 < \rho \leq 1$ tenemos que*

$$Op(S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)) = Op(S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)).$$

La idea detrás de esta última sección, es señalar que este era uno de los caminos posibles cuando comenzamos a trabajar en esta investigación. Con esto nos referimos a tomar funciones definidas sobre el toro \mathbb{T}^n , llevarlas a \mathbb{R}^n y verlas como funciones periódicas. Luego, realizar todo el análisis necesario con las herramientas de \mathbb{R}^n , para posteriormente, tomar los resultados obtenidos y llevarlos de nuevo a \mathbb{T}^n . Lo que al final decidimos hacer, fue realizar todo el trabajo en \mathbb{T}^n y olvidarnos por un momento de lo que pasaba con \mathbb{R}^n .

Capítulo 3

Semigrupos

En este capítulo introducimos la teoría de semigrupos de convolución, comenzamos dando su definición, para posteriormente definir a las funciones definidas negativas, que serán de suma importancia para poder más adelante asociar los símbolos de operadores pseudo-diferenciales a semigrupos de convolución.

3.1. Semigrupos de convolución

Sea $C(\mathbb{T}^n)$ el conjunto de funciones continuas $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $C_0(\mathbb{T}^n)$ el conjunto de funciones continuas en \mathbb{T}^n que se anulan en el infinito, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe un compacto $K_\epsilon \subset \mathbb{T}^n$, tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{T}^n \setminus K_\epsilon$ y sea $C_c(\mathbb{T}^n)$ el conjunto de funciones continuas en \mathbb{T}^n que tienen soporte compacto.

Definición 3.1.1. Una familia $(\mu_t)_{t>0}$ de medidas positivas en \mathbb{T}^n diremos que es un semigrupo de convolución en \mathbb{T}^n si

(I) $\mu_t(\mathbb{T}^n) \leq 1$ para $t > 0$,

(II) $\mu_t + \mu_s = \mu_{t+s}$ para $t, s > 0$,

(III) $\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t = \epsilon_0$ vagamente, es decir, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \mu_t(dx) = f(0)$ para todo $f \in C_c(\mathbb{T}^n)$.

Un semigrupo de convolución $(\mu_t)_{t>0}$ on \mathbb{T}^n induce un semigrupo fuertemente continuo y contractivo $(P_t)_{t>0}$ en $C_0(\mathbb{T}^n)$, definido por

$$P_t f = \mu_t * f := \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \mu_t(dx),$$

para $t > 0$ y $f \in C_0(\mathbb{T}^n)$, con su generador infinitesimal (A, D_A) definido por

$$D_A = \{f \in C_0(\mathbb{T}^n) : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f) \text{ existe en } C_0(\mathbb{T}^n)\}$$

$$A f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f), \text{ para } f \in D_A.$$

A continuación tenemos la definición de funciones definida negativas, las cuales serán las funciones que asociaremos a los semigrupos de convolución en \mathbb{T}^n . Eso si, antes recordemos que es una matriz Hermitiana.

Definición 3.1.2. Una matriz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ de números complejos se dice positiva hermitiana si la suma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_i \bar{c}_j \geq 0$$

para todos los vectores $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$.

La matriz A es positiva hermitiana si y solo si A es hermitiana, es decir, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ y los valores propios de la matriz A son no-negativos

Definición 3.1.3. Diremos que una función continua $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es negativa definida si se cumple la siguiente condición. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada m -upla

(ξ_1, \dots, ξ_m) de elementos de \mathbb{Z}^n la matriz $m \times m$

$$(\psi(\xi_i) + \overline{\psi(\xi_j)} - \psi(\xi_i - \xi_j))_{m \times m}$$

es no-negativa Hermitiana, es decir, si

$$\sum_{i,j=1}^m (\psi(\xi_i) + \overline{\psi(\xi_j)} - \psi(\xi_i - \xi_j)) c_i \bar{c}_j \geq 0$$

para cada m -upla $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$.

Denotaremos por $N(\mathbb{Z}^n)$ el conjunto de funciones negativa definida en \mathbb{Z}^n y por $CN(\mathbb{Z}^n)$ el conjunto de funciones continuas negativa definida en \mathbb{Z}^n .

Observación 3.1.1. Notar que si en la Definición 3.1.3 tomamos $m = 1$ y ξ como el vector nulo, obtenemos que $\psi(0) \geq 0$.

A continuación queremos demostrar que para cada función negativa definida, existe un semigrupo de convolución asociada a ella. Para poder hacer esto, primero necesitamos enunciar un teorema que nos permitirá asociar funciones positiva definidas con funciones negativa definidas. De la demostración de este teorema solo enunciamos los resultados previos a él e indicaremos las ideas generales de esta.

Proposición 3.1.1. (a) *El conjunto $N(\mathbb{Z}^n)$ es un cono convexo, el cual es cerrado en la topología de la convergencia puntual en \mathbb{Z}^n .*

(b) *Para $\psi \in N(\mathbb{Z}^n)$ tenemos que $\bar{\psi} \in N(\mathbb{Z}^n)$ y $Re(\psi) \in N(\mathbb{Z}^n)$.*

(c) *Las funciones constantes no-negativas pertenecen al conjunto $N(\mathbb{Z}^n)$.*

(d) *El conjunto $CN(\mathbb{Z}^n)$ es un cono convexo, el cual es cerrado en la topología de convergencia compacta.*

Proposición 3.1.2. *Una función $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es negativa definida si y solo si las siguientes tres condiciones se cumplen:*

(a) $\psi(0) \geq 0$,

(b) $\psi(\xi) = \overline{\psi(-\xi)}$,

(c) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{Z}^n$ y $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=1}^m c_i = 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^m \psi(\xi_i - \xi_j) c_i \bar{c}_j \leq 0.$$

Corolario 3.1.1. *Sea φ un función definida positiva en \mathbb{Z}^n . Entonces, la función*

$$\xi \mapsto \varphi(0) - \varphi(\xi)$$

es negativa definida.

Teorema 3.1.2 (Schoenberg). *Una función $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es definida negativa si y solo se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $\psi(0) \geq 0$,

(b) *La función $\xi \mapsto e^{-t\psi(\xi)}$ es positiva definida para todo $t > 0$.*

Para la demostración del Teorema 3.1.2 de Schoenberg, primero se parte suponiendo que $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es negativa definida. Por lo tanto tenemos que de la definición de función negativa definida, la matriz

$$(\psi(\xi_i) + \overline{\psi(\xi_j)} - \psi(\xi_i - \xi_j))_{m \times m}$$

es hermitiana positiva. Y de esta manera, por propiedades de matrices, la matriz con entradas exponenciales

$$(e^{\psi(\xi_i) + \overline{\psi(\xi_j)} - \psi(\xi_i - \xi_j)})_{m \times m}$$

también es hermitiana positiva. Aquí, recordamos que la condición para que la función $\xi \mapsto e^{-t\psi(\xi)}$ sea positiva definida, se tiene que cumplir que, para $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{Z}^n$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, la suma

$$\sum_{i,j=1}^n e^{-\psi(\xi_i - \xi_j)} c_i \bar{c}_j \geq 0.$$

Luego trabajando la expresión anterior, tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^n e^{-\psi(\xi_i - \xi_j)} c_i \bar{c}_j = \sum_{i,j=1}^n e^{\psi(\xi_i) + \overline{\psi(\xi_j)} - \psi(\xi_i - \xi_j)} c'_i \bar{c}'_j \geq 0,$$

con $c'_i = e^{-\psi(\xi_i)} c_i \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, la función $\xi \mapsto e^{-t\psi(\xi)}$ es positiva definida y se muestra la condición (b). La condición (a) es inmediata al suponer que la función ψ es negativa definida. Ahora, suponiendo que se cumple (a) y (b), basta con considerar la siguiente función

$$\xi \mapsto \frac{1}{t}(1 - e^{-t(\psi(\xi))})$$

junto a la Proposición 3.1.1 (a) y al Corolario 3.1.1 para mostrar que la función anterior es negativa definida y que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(1 - e^{-t(\psi(\xi))}) = \psi(\xi).$$

Por lo tanto, la función ψ es negativa definida en \mathbb{Z}^n .

Con esto ya aclarado, podemos presentar el teorema que nos permitirá asociar funciones negativas definidas a semigrupo de convolución.

Proposición 3.1.3. *Cada semigrupo de convolución $(\mu_t)_{t>0}$ en \mathbb{T}^n esta asociado a una función negativa definida $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{\mu}_t(\xi) = e^{-t\psi(\xi)} \text{ para } \xi \in \mathbb{Z}^n \text{ y } t > 0. \quad (3.1)$$

Al mismo tiempo, si $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función definida negativa en \mathbb{Z}^n , entonces existe un único semigrupo de convolución $(\mu_t)_{t>0}$ en \mathbb{T}^n , tal que cumple (3.1).

Demostración. Primero mostremos que existe esta función $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Sea $(\mu_t)_{t>0}$ un semigrupo de convolución sobre \mathbb{T}^n . Luego, para $\xi \in \mathbb{Z}^n$ definamos la siguiente función $\varphi_\xi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\varphi_\xi(t) = \hat{\mu}_t(\xi), \quad t > 0.$$

Como μ_t es una medida, entonces φ_ξ es continua y cumple que

$$\varphi_\xi(s+t) = \varphi_\xi(s)\varphi_\xi(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_\xi(t) = 1.$$

Luego, tenemos que existe un número complejo $\psi(\xi)$, tal que

$$\varphi_\xi(t) = e^{-t\psi(\xi)}, \quad t > 0.$$

Esta función $\xi \mapsto \psi(\xi)$ cumple que $\psi(0) \geq 0$ y que $\xi \mapsto e^{-t\psi(\xi)}$ es continua y positiva

definida para todo $t > 0$. Por esta razón tenemos que ψ es una función negativa definida. Ahora consideremos la siguiente medida ρ definida por

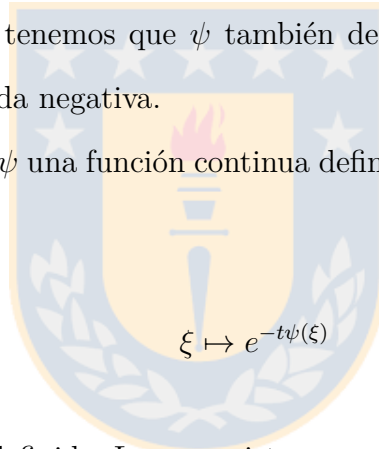
$$\langle \rho, f \rangle = \int_0^\infty e^{-t} \langle \mu_t, f \rangle dt, \quad f \in C_c(\mathbb{T}^n)$$

es positiva y acotada. Luego, se tiene que

$$\hat{\rho}(\xi) = \int_0^\infty e^{-t} \hat{\mu}_t(\xi) dt = \int_0^\infty e^{-t(1+\psi(\xi))} dt = \frac{1}{1+\psi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n$$

y como $\hat{\rho}$ es continua, tenemos que ψ también debe serlo. Por lo tanto, ψ es una función continua definida negativa.

Por otro lado, sea ψ una función continua definida negativa sobre \mathbb{Z}^n . Para cada $t > 0$, la función



es continua y positiva definida. Luego, existe una medida acotada positiva μ_t en \mathbb{T}^n , tal que

$$\hat{\mu}_t(\xi) = e^{-t\psi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n$$

Mostremos a continuación que $(\mu_t)_{t>0}$ es un semigrupo de convolución en \mathbb{T}^n . Como $\psi(0) \geq 0$, entonces

$$\mu_t(\mathbb{T}^n) = \hat{\mu}_t(0) = e^{-t\psi(0)} \leq 1, \quad \forall t > 0.$$

Más aún, para $s, t > 0$ y $\xi \in \mathbb{Z}^n$,

$$\widehat{\mu}_t(\xi)\widehat{\mu}_s(\xi) = e^{-t\psi(\xi)}e^{-s\psi(\xi)} = e^{-(t+s)\psi(\xi)} = \widehat{\mu}_{t+s}(\xi),$$

es decir, $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$. Por último, como ψ es una función continua y acotada sobre compactos, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \widehat{\mu}_t(\xi) = 1$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de \mathbb{Z}^n . Por lo tanto, la familia $(\mu_t)_{t>0}$ es un semigrupo de convolución sobre \mathbb{T}^n . \square

A continuación presentamos la definición de semigrupo de convolución simétrico.

Definición 3.1.4. Un semigrupo de convolución $(\mu_t)_{t>0}$ en \mathbb{T}^n se dice simétrico si todas las medidas $(\mu_t)_{t>0}$ son simétricas, es decir, si y solo si la función negativa definida asociada ψ es real valuada.

Es importante poder observar que los semigrupos de convolución que consideremos deben ser simétricos, ya que, esta propiedad es necesaria para el siguiente teorema, demostrado por C. Berg en [2] en un contexto más general. En nuestro caso, aplicaremos el teorema a los espacios \mathbb{T}^n y \mathbb{Z}^n .

Teorema 3.1.3. *Sea $(\mu_t)_{t>0}$ un semigrupo de convolución simétrico en \mathbb{T}^n con una función negativa definida asociada ψ en \mathbb{Z}^n . Luego para todo $t > 0$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (I) μ_t tiene una densidad continua E con respecto a la medida de Haar en \mathbb{T}^n ,
- (II) $e^{-t\psi} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$.

Si (ii) se cumple para cada $t > 0$, entonces $E \in D_A$ y

$$AE(t, x) = \frac{d}{dt}E(t, x) \text{ para } t > 0 \text{ y } x \in \mathbb{T}^n.$$

Más aún, la función $E :]0, \infty[\times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Ahora, para cada función definida negativa tenemos un semigrupo de convolución en \mathbb{T}^n asociada con ella, En nuestro caso, esas funciones son los símbolos de los operadores pseudo-diferenciales con que estamos trabajando. Es por eso que todos los símbolos de operadores que consideremos en esta tesis, serán funciones real valuadas negativa definidas.



Capítulo 4

Resultados

En este capítulo estudiamos y analizamos las soluciones de la siguiente ecuación.

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f(t, x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^n; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}^n. \end{cases} \quad (4.1)$$

Primero comenzamos analizando el caso $f(t, x) = 0$, para luego proceder suponiendo algunas condiciones sobre la función f .

4.1. Estimaciones a soluciones de problemas de evolución

Supongamos que el símbolo $a : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$, asociado con el operador pseudo-diferencial A , es una función continua negativa definida. Luego, usando la Proposición 3.1.3, tenemos que existe un único semigrupo de convolución $(\mu_t)_{t>0}$ en \mathbb{T}^n , tal que

$$\hat{\mu}_t = e^{-ta(\xi)}, \text{ para } \xi \in \mathbb{Z}^n \text{ y } t > 0.$$

Luego como el semigrupo $(\mu_t)_{t>0}$ es único y por el Teorema 3.1.3 tenemos que u definida por

$$\begin{aligned} u(t, x) &= E(t, x) * u_0(x) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} E(t, x - y) u_0(y) dy, \end{aligned}$$

con $E(t, x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} e^{-ta(\xi)}$ y $u_0 \in L^p(\mathbb{T}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, es una solución única a la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0, & t > 0, x \in \mathbb{T}^n; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}^n. \end{cases} \quad (4.2)$$

De ahora en adelante, a menos que se especifique lo contrario, asumiremos que el símbolo a cumple siguiente condición de elipticidad, que en términos de $a(\xi)$ quiere decir que

$$a(\xi) \geq \alpha |\xi|^\delta \quad (4.3)$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, donde $\alpha > 0$ y $\delta > 0$.

Presentado esto, estudiemos a continuación la regularidad de la solución u . Para esto, primero vamos a necesitar enunciar la desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev para el caso de \mathbb{T}^n . Aquí usaremos el resultado mostrado por H. Yazhou y Z. Meijun en [4] aplicado a nuestro caso.

Sea $\gamma \neq n$ un parámetro positivo y definamos el siguiente operador integral:

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\gamma}} dy.$$

Luego para $\gamma < n$ tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.1.1 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Supongamos que $\gamma \in (0, n)$, $1 < p < \frac{n}{\gamma}$ y q están dados por*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n},$$

luego existe una constante óptima positiva $C(\gamma, p, \mathbb{T}^n)$, tal que

$$\|I_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq C(\gamma, p, \mathbb{T}^n) \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$$

se cumple para todo $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$. Más aún, para $1 \leq r < q$, el operador

$$I_\gamma : L^p(\mathbb{T}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{T}^n)$$

es una incrustación compacta.

Además, vamos a necesitar alguna desigualdad que incluya a la función exponencial, esto debido, a la importancia que esta adquiere en un contexto donde las series de Fourier pasan a ser pieza fundamental del análisis que se desarrollará más adelante. Por esta razón, enunciamos y mostramos el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Para todo $x > 0$ y $\alpha > 0$ tenemos que*

$$x^\alpha e^{-x} \leq \alpha^\alpha e^{-\alpha}. \quad (4.4)$$

Demostración. Sea $f(x) := x^\alpha e^{-x}$. Entonces

$$\frac{df}{dx}(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} - x^\alpha e^{-x} = 0 \iff x = \alpha.$$

Notar que $\frac{d^2 f}{dx^2}(\alpha) < 0$. Por lo tanto, f alcanza su máximo en $x = \alpha$. □

Está desigualdad

Comencemos estudiando las condiciones necesarias para poder asegurar que la solución u pertenece a algún espacio $L^p(\mathbb{T}^n)$. Para esto, usamos la desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev 4.1.1 que enunciamos anteriormente, junto a la desigualdad de Young para convoluciones.

Teorema 4.1.1. *Sea $1 \leq r \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, $\gamma \in (0, n)$, $1 < p_0 < \frac{n}{\gamma}$, tal que $1/r + 1 = 1/p + 1/p_0 - \gamma/n$. Supongamos que $u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{T}^n)$ y que se cumple la condición (4.3). Entonces $u \in L^r(\mathbb{T}^n)$ y*

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq Ct^{-1/p(\frac{n+\gamma p+1}{\delta})} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)},$$

con $C = C(n, p, \gamma, \delta)$.

Demostración. Usando la desigualdad de Young para convoluciones, con $1/r + 1 = 1/p + 1/q$ y q elegido de manera que $1/q = 1/p_0 - \gamma/n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} &= \left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(\hat{E}(t, \xi) \cdot \hat{u}_0(\xi)) \right\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \\ &= \left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(|\xi|^\gamma \hat{E}(t, \xi) \cdot |\xi|^{-\gamma} \hat{u}_0(\xi)) \right\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \\ &\leq \underbrace{\left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(|\xi|^\gamma \hat{E}(t, \xi)) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}}_{S_1} \underbrace{\left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(|\xi|^{-\gamma} \hat{u}_0(\xi)) \right\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}}_{S_2} \end{aligned}$$

Estimemos primero S_1 usando (4.3) y el Lema 4.1.1:

$$\begin{aligned} S_1^p &= \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} |\xi|^\gamma e^{-ta(\xi)} \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{\gamma p} e^{-tpa(\xi)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{\gamma p} \left(\frac{n + \gamma p + 1}{\delta} \right)^{-\left(\frac{n + \gamma p + 1}{\delta}\right)} e^{-\left(\frac{n + \gamma p + 1}{\delta}\right)} (tpa(\xi))^{-\left(\frac{n + \gamma p + 1}{\delta}\right)} \\
&\leq C_1 t^{-\left(\frac{n + \gamma p + 1}{\delta}\right)} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{\gamma p - n - \gamma p - 1} \\
&\leq C_1 t^{-\left(\frac{n + \gamma p + 1}{\delta}\right)}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Ahora para estimar S_2 , usando la desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev tenemos que por hipótesis existe una constante $C_2 > 0$ que depende de γ, p_0 y n , tal que

$$S_2 = \|I_\gamma u_0\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq C_2 \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)}. \tag{4.6}$$

Por lo tanto, por las estimaciones (4.5) and (4.6) tenemos que

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq C t^{-1/p\left(\frac{n + \gamma p + 1}{\delta}\right)} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)}.$$

□

Un resultado similar al Teorema 4.1.1, pero en el caso de \mathbb{R}^n , se puede encontrar en [12], sin embargo, aunque la condición sobre el símbolo del operador pseudo-diferencial A sea diferente, nos da un punto válido de comparación con el caso real. En este trabajo fue posible haber pensado simplemente a las funciones definidas en \mathbb{T}^n como funciones reales periódicas y usar la teoría ya disponible en ese caso y así obtener resultados similares a los que es posible encontrar en [12]. A pesar de todo esto, la idea es que usemos las herramientas disponibles en \mathbb{T}^n y \mathbb{Z}^n . Ahora, el siguiente resultado nos da una fórmula asintótica para las soluciones de la ecuación (4.2).

Corolario 4.1.2. *Sea $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ y $\theta = \int_{\mathbb{T}^n} u_0(x) dx$. Supongamos que $u_0 \in L^p(\mathbb{T}^n)$ y que se cumple la condición (4.3). Entonces,*

$$\|u(t, \cdot) - \theta E(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \leq Ct^{-1/p(\frac{n+1}{\delta})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$$

Demostración. Comenzamos analizando $|E(t, x - y) - E(t, x)|^p$ usando el Lema 4.1.1,

$$\begin{aligned} |E(t, x - y) - E(t, x)|^p &= \left| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} e^{-ta(\xi)} - \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x\cdot\xi} e^{-ta(\xi)} \right|^p \\ &= \left| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (e^{-i2\pi y\cdot\xi} - 1) e^{i2\pi x\cdot\xi} e^{-ta(\xi)} \right|^p \\ &= \left| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (e^{-i2\pi y\cdot\xi} - 1) e^{i2\pi x\cdot\xi} e^{-ta(\xi)} \right|^p \\ &\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} 2^p e^{-tpa(\xi)} \\ &\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} 2^p \left(\frac{n+1}{\delta} \right)^{\frac{n+1}{\delta}} e^{-(\frac{n+1}{\delta})(tpa(\xi)) - (\frac{n+1}{\delta})} \\ &\leq C_{n,p,\delta} t^{-\left(\frac{n+1}{\delta}\right)} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (|\xi|^\delta)^{-\left(\frac{n+1}{\delta}\right)} \\ &= C_{n,p,\delta} t^{-\left(\frac{n+1}{\delta}\right)} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{-(n+1)}, \end{aligned}$$

Ahora usando la estimación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot) - \theta E(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}^p &= \left\| \int_{\mathbb{T}^n} E(t, x - y) u_0(y) dy - \int_{\mathbb{T}^n} E(t, x) u_0(y) dy \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}^p \\ &= \left\| \int_{\mathbb{T}^n} (E(t, x - y) - E(t, x)) u_0(y) dy \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}^p \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} (E(t, x - y) - E(t, x)) u_0(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} |E(t, x - y) - E(t, x)|^p |u_0(y)|^p dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} C_{n,\delta} t^{-\left(\frac{n+1}{\delta}\right)} |u_0(y)|^p dy dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} C_{n,\delta} t^{-\left(\frac{n+1}{\delta}\right)} |u_0(y)|^p dy \\
&= C_{n,\delta} t^{-\left(\frac{n+1}{\delta}\right)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}^p
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|u(t, \cdot) - \theta E(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \leq C t^{-\left(\frac{n+1}{\delta}\right)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

□

A continuación, estudiaremos de forma similar como se comporta nuestra solución en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$. Primero mostremos a través del siguiente lema, que la norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|u\| := \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 + \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}(\xi)| \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

es equivalente a la norma usual de $H^s(\mathbb{T}^n)$, para $s \geq 0$

Lema 4.1.2. *Sea $s \geq 0$. Luego las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}$ son equivalentes.*

Demostración. Sea $a, b \geq 0$. Notar que para $0 \leq s < 1$ se cumple que,

$$(a + b)^s \leq (a^s + b^s) \leq 2^{1-s} (a + b)^s$$

y para $s \geq 1$

$$2^{1-s} (a + b)^s \leq (a^s + b^s) \leq (a + b)^s.$$

De la observación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^{2s} &\leq (1 + |\xi|^{2s}) \leq 2^{1-s} \langle \xi \rangle^{2s}, \quad 0 \leq s < 1, \\ 2^{1-s} \langle \xi \rangle^{2s} &\leq (1 + |\xi|^{2s}) \leq \langle \xi \rangle^{2s}, \quad s > 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}$ son equivalentes. \square

Con esta equivalencia de normas demostrada, estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Corolario 4.1.3. *Sea $s \geq 0$, $0 < \alpha < \frac{2s}{\delta}$, $1 \leq p < \infty$, $\gamma \in (0, n)$, $1 < p_0 < \min\{2, \frac{n}{\gamma}\}$, tal que $1/p + 1/p_0 - l/n = 3/2$. Supongamos que $u_0 \in H^{s-\frac{\alpha\delta}{2}}$ y la condición (4.3) se cumplen. Entonces $u \in H^s(\mathbb{T}^n)$ y*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)} \leq Ct^{-\frac{\beta}{2}} \|u_0\|_{H^{s-\frac{\alpha\delta}{2}}(\mathbb{T}^n)}, \quad \text{para } t \geq 1,$$

con $\beta := \min\{\frac{2}{p}(\frac{n+\gamma p+1}{\delta}), \alpha\}$.

Demostración. Comencemos estudiando independientemente como la solución u se comporta en $L^2(\mathbb{T}^n)$ y $H^s(\mathbb{T}^n)$. Usando el Teorema 4.1.1 con $r = 2$, tenemos que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 \leq C_1 t^{-\frac{2}{p}(\frac{n+\gamma p+1}{\delta})} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)}^2.$$

Más aún, como $1 < p_0 < \min\{2, \frac{n}{\gamma}\}$ tenemos la siguiente incrustación $L^2(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow L^{p_0}(\mathbb{T}^n)$. Luego, tenemos que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 \leq C_2 t^{-\frac{2}{p}(\frac{n+\gamma p+1}{\delta})} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2. \quad (4.8)$$

A continuación analizamos $u \in H^s(\mathbb{T}^n)$. Notar que por hipótesis $u_0 \in H^{s-\frac{\alpha\delta}{2}}(\mathbb{T}^n)$ y

entonces $u_0 \in \dot{H}^{s-\frac{\alpha\delta}{2}}(\mathbb{T}^n)$. Luego,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^n)}^2 &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{2s} e^{-2ta(\xi)} |\hat{u}_0(\xi)|^2 \leq C_3 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{2s} (ta(\xi))^{-\alpha} |\hat{u}_0(\xi)|^2 \\ &\leq C_3 t^{-\alpha} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\xi|^{2s} |\xi|^{-\alpha\delta} |\hat{u}_0(\xi)|^2 = C_3 t^{-\alpha} \|u_0\|_{\dot{H}^{s-\frac{\alpha\delta}{2}}(\mathbb{T}^n)}^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Usando la equivalencia de normas mostrada en el Lema 4.1.2 junto a (4.8) y (4.9), obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}^2 &\leq C_4 \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 + \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^n)}^2 \right) \\ &\leq C_5 \left(t^{-\frac{2}{p} \left(\frac{n+\gamma p+1}{\delta} \right)} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 + t^{-\alpha} \|u_0\|_{\dot{H}^{s-\frac{\alpha\delta}{2}}(\mathbb{T}^n)}^2 \right). \end{aligned}$$

Finalmente, sea $\beta := \min\left\{\frac{2}{p} \left(\frac{n+\gamma p+1}{\delta}\right), \alpha\right\}$ y para $t \geq 1$,

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}^2 \leq C_5 t^{-\beta} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 + \|u_0\|_{\dot{H}^{s-\frac{\alpha\delta}{2}}(\mathbb{T}^n)}^2 \right) \leq C t^{-\beta} \|u_0\|_{H^{s-\frac{\alpha\delta}{2}}}^2.$$

□

Observación 4.1.1. El Corolario 4.1.3 es también válido para todo $\epsilon > 0$, tal que $0 < \epsilon < t$. En este caso, es suficiente elegir una constante $C = C(\epsilon)$ adecuada.

Con termina el estudio del problema (4.2). A continuación entregamos un último resultado sobre la siguiente ecuación,

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f(x, t), & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^n; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}^n. \end{cases} \quad (4.10)$$

Primero definamos

$$u(t, x) := E(t) * u_0 + \int_0^t E(t-s) * f(s, x) ds \quad (4.11)$$

como la solución al problema (4.10). Luego, de manera similar al problema (4.2), queremos encontrar alguna estimación de la solución u , dada por (4.11). Para esto enunciamos y mostramos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.4. *Sea $1 \leq r \leq \infty$, $\gamma \in (0, n)$, $p > \max\{1, \frac{n+1}{\delta-\gamma}\}$ and $1 < p_0 < \infty$, tal que*

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_0} - \frac{\gamma}{n}.$$

Supongamos que $u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{T}^n)$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\mathbb{T}^n))$ y que existe $1 - \alpha < \rho < 1$, con $\alpha = \frac{1}{p} \left(\frac{n+\gamma p+1}{\delta} \right)$, tal que

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)} \leq Ct^{-\rho}, \quad \text{para casi todo } t > 0.$$

Entonces

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq Mt^{-(\alpha+\rho-1)},$$

con $M > 0$ constante.

Demostración. Por el Teorema 4.1.1, tenemos que

$$\|E(t) * u_0\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq C_1 t^{-\alpha} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)},$$

con $\alpha = \frac{1}{p} \left(\frac{n+\gamma p+1}{\delta} \right)$. Ahora analicemos la siguiente integral

$$\int_0^t E(t-s) * f(s) ds.$$

Por hipótesis,

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)} \leq Ct^{-\rho}$$

y notar que como $p > \max\{1, \frac{n+1}{\delta-\gamma}\}$, se tiene que $\alpha < 1$ y $\rho < 1$. Entonces, usando el Teorema 4.1.1 aplicado a la función f , tenemos que

$$\|E(t-s) * f(s, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq C_2(t-s)^{-\alpha} \|f(s, \cdot)\|_{L^{p_0}} \leq C_2(t-s)^{-\alpha} s^{-\rho}.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|E(t-s) * f(s, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} ds &\leq C_2 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\rho} ds \\ &\leq C_2 \left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} \int_0^{t/2} s^{-\rho} ds + C_2 \left(\frac{t}{2}\right)^{-\rho} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ &= C_2 t^{1-\alpha-\rho} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq C(t^{-\alpha} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)} + t^{1-\alpha-\rho}),$$

es decir,

$$t^{\alpha+\rho-1} \|u(t, \cdot)\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq t^{\rho-1} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{T}^n)} + 1 < M,$$

para casi todo $t > 0$. Terminando así la demostración del teorema. \square



Bibliografía

- [1] M. S. Agranovich. Spectral properties of elliptic pseudodifferential operators on a closed curve. *Functional Analysis and Its Applications*, 13:279–281, 1979.
- [2] Christian Berg. Potential theory on the infinite dimensional torus. *Inventiones mathematicae*, 32:49–100, 1976.
- [3] Árpád Bényi and Tadahiro Oh. The sobolev inequality on the torus revisited. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 83:359–374, 10 2013.
- [4] Yazhou Han and Meijun Zhu. Hardy–littlewood–sobolev inequalities on compact riemannian manifolds and applications. *Journal of Differential Equations*, 260(1):1 – 25, 2016.
- [5] S. Bu; J.-M. Kim. Operator-valued fourier multiplier theorems on lp-spaces on the d-dimentional torus. *Archiv der Mathematik*, 82:404–414, 2004.
- [6] Bienvenido Martinez, Robert Denk, J. Hernández Monzón, and Tobias Nau. Generation of semigroups for vector-valued pseudodifferential operators on the torus. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 22, 04 2015.
- [7] Bienvenido Martínez, Robert Denk, J. Hernández Monzón, and Max Nendel. Mapping properties for operator-valued pseudodifferential operators on toroidal

- besov spaces. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 9, 06 2017.
- [8] Bienvenido Martínez, Ivan Gonzalez Martinez, and J. Hernández Monzón. Operator-valued fourier multipliers on toroidal besov spaces. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 50:109–137, 01 2016.
- [9] William McLean. Local and global descriptions of periodic pseudodifferential operators. *Mathematische Nachrichten*, 150:151–161, 1991.
- [10] Severino T. Melo. Characterizations of pseudodifferential operators on the circle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125:1407–1412, 1997.
- [11] Tobias Nau and Robert Denk. Discrete fourier multipliers and cylindrical boundary value problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 143, 06 2011.
- [12] Ilya A. Shishmarev (auth.) Pavel I. Naumkin, Elena I. Kaikina. *Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations*. Lecture Notes in Mathematics 1884. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2006.
- [13] Luz Roncal and Pablo Stinga. Fractional laplacian on the torus. *Communications in Contemporary Mathematics*, 18, 09 2012.
- [14] V. Ruzhansky, M.; Turunen. Global quantization of pseudo-differential operators on compact lie groups, $su(2)$, 3-sphere, and homogeneous spaces. *International Mathematics Research Notices*, page rns122, 2012.
- [15] Ville Ruzhansky, Michael; Turunen. On the toroidal quantization of periodic pseudo-differential operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 30:1098–1124, 2009.

-
- [16] Michael Ruzhansky; Ville Turunen. Quantization of pseudo-differential operators on the torus. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 16:943–982, 2010.
- [17] Michael Ruzhansky. Ville Turunen. *Pseudo-Differential Operators and Symmetries: Background Analysis and Advanced Topics*. 2009.



Apéndice A

Teoremas

Teorema A.1 (Teorema de interpolación de Riesz-Thorin). Sean μ, ν medidas semifinitas y sea $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Para cada $0 < t < 1$, definamos p_t y q_t por

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Supongamos que A es un operador lineal tal que

$$\|Af\|_{L^{q_0}(\nu)} \leq C_0 \|f\|_{L^{p_0}(\mu)}, \quad \|Af\|_{L^{q_1}(\nu)} \leq C_1 \|f\|_{L^{p_1}(\mu)},$$

para todo $f \in L^{p_0}(\mu)$ y $f \in L^{p_1}(\mu)$, respectivamente. Entonces, para todo $0 < t < 1$, el operador A se extiende a un operador lineal acotado de $L^{p_t}(\mu)$ a $L^{q_t}(\nu)$ y tenemos que

$$\|Af\|_{L^{q_t}(\nu)} \leq C_0^{1-t} C_1^t \|f\|_{L^{p_t}(\mu)},$$

para todo $f \in L^{p_t}(\mu)$.

Teorema A.2 (Desigualdad de Minkowski para integrales). Sean μ, ν medidas σ -finitas y sea $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathcal{M}_{\mu \times \nu}$ -medible. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces

$$\left\{ \int \left(\int |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int \left(\int |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

Teorema A.3 (Desigualdad de Hölder). Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $q = p'$. Sean $f, g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ \mathcal{M} -medibles. Entonces

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Teorema A.4 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue). Para cada $k \geq 1$, sea $f_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ medible y $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ puntualmente. Supongamos que $|f_k| \leq g$ para cada $k \geq 1$, donde g es μ -integrable. Entonces

$$\int |f_k - f| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

$$\int f_k d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int f d\mu.$$