Programas Magister y Doctorado en Matemática
Área de Análisis

Vicente Vergara

Universidad de Concepción
Concepción - Chile

Septiembre 24 - 2021

Mi Caja de Herramientas

- Análisis de Fourier
- Integración Singular
- Teoría de Semigrupos de Operadores

El Modelo

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

- Si A es una función de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, entonces la solución de (1) es

$$u(t, x) = e^{-tA} u_0(x).$$

Transformada de Fourier:

Transformada de Fourier:

$$(\mathcal{F}v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} v(x)dx =: \tilde{v}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Transformada inversa de Fourier:

$$(\mathcal{F}^{-1}w)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} w(\xi)dx,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id.$$

Operador Pseudo-diferencial y su símbolo

Operador Pseudo-diferencial

$$Av(x) := \mathcal{F}^{-1}[\omega(\xi)(\mathcal{F}v)(\xi)](x),$$

la función $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es llamada el símbolo del operador A.

Ejemplos:

(i) $Av = -\Delta v := -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v$ (el Laplaciano), $\omega(\xi) = |\xi|^2$.

(ii) $Av = (-\Delta)^{\beta} v$ (el Laplaciano fraccionario), $\omega(\xi) = |\xi|^{2\beta}$.

(iii) $Av = \sum_{k,j=1}^{n} a_{k,j} \frac{\partial_k}{\partial x_k} \frac{\partial_j}{\partial x_j} v + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial_k}{x_k} v + cv$,

$$\omega(\xi) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{k,j}\xi_k\xi_j + i(b \cdot \xi) + c, \qquad b \in \mathbb{R}^n, c, a_{k,j} \in \mathbb{R}.$$

Operador Pseudo-diferencial y su símbolo

Aplicamos trasformada de Fourier a Ecuación (1) nos queda

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + \omega(\xi)\tilde{u} = 0, & t > 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0, & \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

Solución de (2)

$$\tilde{u}(t,\xi) = e^{-t\omega(\xi)}\tilde{u}_0(\xi).$$

¿Cual es la Trans.Inv. de Fourier de $e^{-t\omega(\xi)}$?

Semigrupos de Convolución:

Una familia $(\mu_t)_{t\geq 0}$ de medidas de Borel en $\mathbb{R}^n$ es llamada **semigrupo de convolución** en $\mathbb{R}^n$ si:

(i) $\mu_t(\mathbb{R}^n) \leq 1$ para todo $t \geq 0$;

(ii) $\mu_t \star \mu_s = \mu_{t+s}$ (propiedad de semigrupo), y $\mu_0 = \delta_0$.

Aquí

$$(\mu \star \nu)(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(B - y)\nu(dy), \qquad \forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n).$$

$\hookrightarrow$ ¿Cual es la Trans.Inv. de Fourier de $e^{-t\omega(\xi)}$?
Resp. Para cada símbolo ω (en una determinada clase $\mathcal{M}$) existe único sg de convolución tal que

$$\tilde{\mu}_t(\xi) = e^{-t\omega(\xi)}$$

Solución general de la ecuación (1):

Sea A un op. pseudo-diff. con símbolo $\omega \in \mathcal{M}$. Entonces

$$u(t,x) = (\mu_t \star u_0(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y-x)\mu_t(dy) =: T(t)u_0(x).$$

Ejemplo: Sea $A = -\Delta$, su símbolo $\omega(\xi) = |\xi|^2$. Entonces

$$\mu_t(dy) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \lambda^n(dy).$$

La densidad $H(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es llamada el **núcleo del calor**.

Gracias por su atención