



Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Licenciatura en Matemática

Superficies nodales en \mathbb{P}^3 invariantes por la acción de grupos bi-poliédricos

Tesina Licenciatura en Matemática

Macarena Vilches Yáñez
Enero 2021

Profesor Guía: Antonio Laface
Departamento de Matemática,
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	4
1 Preliminares	6
1.1 Variedades Proyectivas	6
1.2 Aplicación Cubriente	12
1.3 Grupos Ortogonales	15
1.4 Teoría Invariante	24
2 Polinomios G_n-Invariantes	28
2.1 Grupos Poliédricos	28
2.2 Series de Poincaré	31
2.3 Ecuaciones de Polinomios Invariantes	32
3 Superficies Simétricas en \mathbb{P}^3	34
3.1 Base Locus	34
3.2 Puntos Singulares	36
3.3 Rectas de puntos fijos	38
3.4 Cubrimientos de \mathbb{P}^1	40
3.5 Superficies Singulares	41
3.6 Superficie de Sarti	43
Apéndice	45
Referencias	49

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Antonio Laface por guiarme en el desarrollo de esta tesina y por la dedicación que ha impuesto en ello.

Agradezco al profesor Andrea Tironi por su apoyo como jefe de carrera, como también a todos los profesores del Departamento quienes me han ayudado en mi formación académica.

Quiero agradecer a mis compañeros de carrera, por darme de su tiempo para discutir un problema matemático, o simplemente para conversar cuando es necesario.

Estoy profundamente agradecida de mi familia por su apoyo y su inagotable paciencia y cariño a lo largo de todos estos años. Agradezco también a mis amigos y a todos quienes me tuvieron fe.

Dedico esta tesina a mi padre, quien me acompaña en espíritu.

*Put up in a place
where it's easy to see
the cryptic admonishment
T.T.T.*

*When you feel how depressingly
slowly you climb,
it's well to remember that
Things Take Time.*

-T.T.T., Piet Hein

Introducción

Desde hace varias décadas se viene tratando de contestar lo siguiente: *Dado un entero $d \geq 1$, ¿cuál es el número máximo $\mu(d)$ de nodos sobre una superficie en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ de grado d ?* Un *nodo* es un punto singular especial, y cada superficie en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ admite un número finito de nodos [7, Teorema 1]. La siguiente tabla muestra los valores o intervalos de $\mu(d)$ hasta ahora encontrados.

Grado	Número máximo de nodos
1	0
2	1
3	4
4	16
5	31
6	65
7	$99 \leq \mu(d) \leq 104$
8	$168 \leq \mu(d) \leq 174$
9	$226 \leq \mu(d) \leq 246$
10	$345 \leq \mu(d) \leq 360$
11	$425 \leq \mu(d) \leq 480$
12	$600 \leq \mu(d) \leq 645$
d	$\frac{1}{12}d(d-1)(5d-9) \leq \mu(d) \leq \frac{4}{9}d(d-1)^2$

La única superficie de grado 1 es el plano proyectivo y claramente, no tiene puntos singulares, por tanto $\mu(1) = 0$. La superficie cónica (i.e. la superficie formada por todas las rectas que pasan por un punto fijo llamado ápice) es una superficie de grado 2 cuyo ápice es el único nodo, y no hay cuádricas irreducibles que tengan más de un nodo, por tanto $\mu(2) = 1$. En el caso $d = 12$, por la *superficie de Sarti* se obtiene una mejor cota inferior de la que se tenía antes, la cual era 576. Algunas de las cotas superiores de $\mu(d)$ con $d \geq 8$ de la tabla fueron fijadas por Miyaoka [13], mientras que la cota inferior para $d \geq 13$ fue fijada por Chmutov en su artículo *Examples of projective surfaces with many singularities* [2].

Varias de las superficies que dan una cota inferior a $\mu(d)$ son invariantes bajo ciertas acciones del grupo de permutaciones. Esto sugiere buscar una superficie candidata en familias de hipersuperficies simétricas, lo que también reduce bastante la dimensión de la familia y muchos cálculos.

Usando esta idea, en el artículo *Symmetric quartics with many nodes* [7], Goryunov es-

tudia los polinomios de grado 4 invariantes por la acción del grupo de reflexión B_{n+1} en \mathbb{C}^{n+1} , cuya acción sobre los vectores (x_0, \dots, x_n) es permutar las coordenadas y multiplicar algunas por -1 . Estos polinomios determinan cuárticas simétricas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ invariantes por B_{n+1} , y siendo unas pocas de éstas hipersuperficies singulares, se escogen las que tengan singularidades aisladas. Goryunov encuentra la siguiente familia de hipersuperficies en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, con $a \geq 1$

$$2(a+1) \sum_{0 \leq i < j \leq n} x_i^2 x_j^2 - a \left(\sum_{0 \leq j \leq n} x_j^2 \right)^2 = 0$$

cuyas singularidades son nodos y en total son $2^a \binom{n+1}{a+1}$.

Siendo las rotaciones un grupo de permutaciones, al estudiar los polinomios invariantes por la acción de un grupo *bi-poliédrico* G_n , se espera encontrar una hipersuperficie en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ de cierto grado (de hecho, será de grado n) con muchos nodos. Como veremos, la esperanza no es en vano. En el congreso Europroj de 1996, Goryunov había afirmado que G_{12} admitía una superficie de grado 12 con 600 nodos. Un par de años más tarde, Sarti confirma esto al definir explícitamente tal superficie en el artículo *Pencils of Symmetric Surfaces in \mathbb{P}_3* [16]. Esta tesina está basada principalmente en este artículo y se ha añadido definiciones y resultados (o su referencia) para que su lectura sea comprensible por un estudiante recién egresado de la Licenciatura.

La estructura de estas notas se describe a continuación.

El primer capítulo es de preliminares y resultados útiles en lo sucesivo. En el capítulo 2, se definen los grupos *bi-poliédricos* G_n y sus generadores. El objetivo principal de este capítulo es encontrar el más simple de los polinomios G_n -invariantes no triviales, el cual denotamos S_n . Al final del capítulo 2, se determinan las tres familias de superficies G_n -invariantes en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, $n = 6, 8, 12$

$$F_n(\lambda) : S_n(x) + \lambda Q(x)^{n/2} = 0 \quad \lambda \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

donde $Q(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ es un polinomio G_n - invariante trivial.

En el capítulo 3 se estudian los puntos singulares de las superficies de estas familias, con el propósito de determinar las superficies singulares por cada familia, las cuales resultarán ser *superficies nodales*. Entre ellas está la superficie G_{12} - invariante de 600 nodos, llamada Superficie de Sarti, en honor a Alessandra Sarti.

Por último, en el Apéndice se encuentran los códigos Magma usados en algunos cálculos.

1 Preliminares

1.1. Variedades Projectivas

En esta sección, K denotará un campo algebraicamente cerrado. Se define el espacio afín \mathbb{A}_K^n sobre K como el conjunto

$$\mathbb{A}_K^n := \{(c_1, \dots, c_n) : c_i \in K \text{ para cada } i = 1, \dots, n\}.$$

A simple vista, \mathbb{A}_K^n y K^n son el mismo conjunto, pero en el espacio afín no están definidas las operaciones adición ni multiplicación por escalar, por lo cual ambos conjuntos no tienen la misma estructura algebraica.

Definición 1.1.1. Dada una familia $J := \{P_i : i \in I\}$ de polinomios $P_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ s, se denomina **lugar de ceros** de J al conjunto

$$V(J) := \{x \in \mathbb{A}_K^n : P_i(x) = 0 \text{ para todo } i \in I\},$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Los subconjuntos de \mathbb{A}_K^n de esta forma son llamados **variedades afines**.

Se define el espacio proyectivo \mathbb{P}_K^n sobre K como el conjunto de todos los subespacios vectoriales unidimensionales del espacio K^{n+1} , o equivalentemente

$$\mathbb{P}_K^n := (K^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim$$

con la relación de equivalencia sobre los vectores $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ de K^{n+1}

$$x \sim y \iff x = ay \text{ para algún } a \in K^*.$$

Los elementos de \mathbb{P}_K^n se llaman puntos y la clase de x la denotaremos por $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ o simplemente $[x]$.

Definición 1.1.2. Dada una familia $J := \{P_i : i \in I\}$ de polinomios homogéneos $P_i \in K[x_0, \dots, x_n]$, se denomina **lugar de ceros** de J al conjunto

$$V(J) := \{x \in \mathbb{P}_K^n : P_i(x) = 0 \text{ para todo } i \in I\}$$

Los subconjuntos de \mathbb{P}_K^n definidos de esta forma son llamados **variedades proyectivas**. En el caso que $J = \{F\}$, $V(J)$ lo denotaremos por $V(F)$, y a esta variedad proyectiva la llamaremos **hipersuperficie**.

Observación 1.1.3. En la definición anterior, $P_i(x)$ es la evaluación del polinomio P_i en todos los puntos $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ de la clase $x = [x_0 : \dots : x_n]$, por lo cual $P_i(x)$ toma más de un valor. Sin embargo, los puntos en que se anula un polinomio homogéneo no dependen del representante de la clase, por esto el lugar de ceros de un polinomio (o una familia de polinomios) está bien definida.

Definición 1.1.4. Se dice que una hipersuperficie $X = \{F = 0\} \subseteq \mathbb{P}_K^n$ tiene **grado** d si F es un polinomio homogéneo de grado d . X se denomina **cuádrica** si $d = 2$, **cúbica** si $d = 3$, **cuártica** si $d = 4$, y así sucesivamente.

Definición 1.1.5. Sea $X = \{F = 0\}$ una hipersuperficie de \mathbb{P}_K^n . Un punto $p \in X$ se llama **punto singular** de X si todas las derivadas parciales $\partial F / \partial x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) se anulan en p . Si X tiene al menos un punto singular, se dice que X es **singular**. Si no tiene puntos singulares, entonces se dice que X es **suave**.

Definición 1.1.6. Dos cuádricas $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ de \mathbb{P}_K^n , se dicen **proyectivamente equivalentes** si existe una *homografía* ω (i.e. endomorfismo de \mathbb{P}_K^n inducido por un automorfismo de K^{n+1}) tal que $\omega(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$, o equivalentemente, si existen $\lambda \in K^*$ y $C \in \text{GL}(n+1, K)$ tales que $\lambda A' = C^T A C$, donde A y A' son las matrices asociadas a \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' , respectivamente.

La ecuación de una cuádrica se puede reescribir como una forma bilineal simétrica. En el caso que $K = \mathbb{C}$, por Teorema de Diagonalización de Lagrange y la Ley de Inercia de Sylvester, dos cuádricas son proyectivamente equivalentes si y sólo si los rangos de sus matrices asociadas son iguales. Luego, como el rango de la matriz asociada es igual al rango de la matriz jacobiana, todas las cuádricas suaves de \mathbb{P}_K^n son proyectivamente equivalentes. Esto muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.1.7. *Todas las cuádricas suaves de $\mathbb{P}_\mathbb{C}^n$ son proyectivamente equivalentes.*

Consideremos \mathbb{P}_K^m con coordenadas homogéneas x_0, \dots, x_m y \mathbb{P}_K^n de coordenadas homogéneas y_0, \dots, y_n . Fijemos $N = (m+1)(n+1) - 1$ y sea \mathbb{P}_K^N el espacio proyectivo de coordenadas homogéneas $z_{i,j}$ para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq n$. Luego se tiene la función

$$\psi : \mathbb{P}_K^m \times \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_K^N$$

definida por $z_{i,j} = x_i x_j$ para todo i, j . Es llamado **incrustación de Segre** el isomorfismo $\psi : \mathbb{P}_K^m \times \mathbb{P}_K^n \rightarrow X$ donde X es la cuádrica suave imagen de ψ [6, Proposición 7.11].

1.1.1. Topología de Zariski

Sea $Y \subset \mathbb{P}_K^n$ una variedad proyectiva. Se define el **anillo de coordenadas homogéneas**

$$S(Y) := K[x_0, \dots, x_n] / I(Y)$$

donde el conjunto

$$I(Y) := (F \in K[x_0, \dots, x_n] \text{ homogéneo} : F(x) = 0 \text{ para todo } x \in Y)$$

es llamado **ideal** de Y . Sea I un *ideal homogéneo* de $S(Y)$ (i.e puede ser generado por polinomios homogéneos) y

$$V_Y(I) := \{x \in Y : F(x) = 0 \text{ para todo } F \in I\}$$

Los subconjuntos de Y de la forma $V_Y(I)$ para algún ideal homogéneo I de $S(Y)$ son llamados **sub-variedades proyectivas** de Y .

La **topología de Zariski** sobre X define como cerrados exactamente a todas las sub-variedades proyectivas de X . En general, supondremos que toda variedad X está dotada de esta topología.

Definición 1.1.8 (Reducibilidad). Sea X un espacio topológico. Se dice que X es **reducible** si existen X_1 y X_2 subconjuntos cerrados propios de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. De lo contrario, X se dice irreducible.

Proposición 1.1.9. *Una variedad proyectiva X es irreducible si y sólo si $I(X)$ es un ideal primo.*

Demostración. Si $I(X)$ no es primo, supongamos $F_1 F_2 \in I(X)$ tales que $F_i \notin I(X)$. Luego $X = (X \cap V(F_1)) \cup (X \cap V(F_2))$. Como $V(F_i) \subset V(F_1 F_2) \subseteq X$, luego $X \cap V(F_i) \subset X$ y por tanto X es reducible.

Inversamente, si $X = X_1 \cup X_2$, $X_i \subset X$, entonces $I(X) \subset I(X_i)$. Sea $F_i \in I(X_i) \setminus I(X)$. Luego $F_1 F_2 \in I(X)$, por tanto $I(X)$ no es primo. \square

Observación 1.1.10. En particular, una hipersuperficie $X = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}_K^n$ es reducible si y sólo si el polinomio F es reducible.

Definición 1.1.11 (Dimensión y Codimensión). Sea X un espacio topológico no vacío. La **dimensión** $\dim X \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es el supremo de todos los n tales que hay una cadena

$$\emptyset \neq Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n \subset X$$

de largo n de subconjuntos cerrados irreducibles Y_0, \dots, Y_n de X .

Si $Y \subset X$ es un conjunto cerrado e irreducible de X , la **codimensión** $\text{codim}_X Y$ es el supremo de los n tales que hay una cadena

$$Y \subset Y_0 \subset \dots \subset Y_n \subset X$$

de subconjuntos cerrados e irreducibles Y_1, \dots, Y_n de X conteniendo Y .

La definición de grado de una variedad proyectiva dada en [6, Definición 12.13] coincide con la definición 1.1.4 para el caso particular de una hipersuperficie. Sea X una variedad proyectiva:

- Si $\deg X = 1$, X es llamada recta si $\dim X = 1$, un plano si $\dim X = 2$ y un n -hiperplano si $\dim X = n$.
- Para cualquier dimensión, X se dice cuádrica si $\deg X = 2$, cúbica si $\deg X = 3$, cuártica si $\deg X = 4$, y así en adelante.

1.1.2. Multiplicidad de Intersección

La *multiplicidad de intersección* generaliza la noción intuitiva de contar el número de veces que dos o más curvas se intersectan. En esta sección, definiremos este concepto en el caso más simple, que es en el plano afín \mathbb{A}_K^2 y el plano proyectivo \mathbb{P}_K^2 , siempre considerando K campo algebraicamente cerrado. Para tener una definición más general y rigurosa, leer [6, Definición 12.23].

Sea una variedad afín $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Definimos su anillo de coordenadas como

$$A(\mathcal{X}) := K[x_1, \dots, x_n]/I(\mathcal{X}),$$

donde $I(\mathcal{X}) := \{f \in K[x_1, \dots, x_n] : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{X}\}$. Como $I(\mathcal{X})$ es un ideal primo, $A(\mathcal{X})$ es un dominio entero, por lo cual podemos considerar su campo de fracciones que denotamos por $K(\mathcal{X})$ y cuyos elementos son funciones racionales. Dada una función $f \in K(\mathcal{X})$, decimos que f está definida en un punto p si existen a, b funciones en $A(\mathcal{X})$ tales que $f = \frac{a}{b}$ donde $b(p) \neq 0$. Hay varias representaciones para una función racional, pero si $A(\mathcal{X})$ es un UFD, la representación es única.

Sea un punto $p \in \mathcal{X}$. Definimos el **anillo local** de \mathcal{X} en p , denotado por $\mathcal{O}_p(\mathcal{X})$, como el conjunto de las funciones racionales definidas en p . $\mathcal{O}_p(\mathcal{X})$ es un subanillo de $K(\mathcal{X})$ que contiene $A(\mathcal{X})$.

Dados dos polinomios $f, g \in K[x, y]$, decimos que son *equivalentes* si existe un $\mu \in K^*$ tal que $f = \mu g$. Una *curva plana afín* es una clase de equivalencia de polinomios no constantes bajo esta relación de equivalencia. Los factores irreducibles del polinomio que define la curva plana son llamados *componentes* de la curva.

Dadas dos curvas planas afines $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset \mathbb{A}_K^2$ definidas por $\mathcal{C} = \{f = 0\}$ y $\mathcal{C}' = \{f' = 0\}$, cada punto p de la intersección $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ tendrá **multiplicidad**

$$\text{mult}_p(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \dim_K(\mathcal{O}_p(\mathbb{A}_K^2)/(f, f')).$$

Este número es único y cumple con ciertos requerimientos, como por ejemplo que $\text{mult}_p(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = 0$ si y sólo si $p \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ y $\text{mult}_p(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \infty$ si y sólo si \mathcal{C} y \mathcal{C}' se

intersectan en una componente que contiene a p [4, p.36-37]. Si las curvas se cruzan sólo en un punto p , éste tendrá multiplicidad

$$\text{mult}_p(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \dim_K(K[x, y]/(f, f'))$$

por [6, Lema 12.22].

En el caso proyectivo, dadas dos curvas $X, Y \subset \mathbb{P}_K^2$, sin componentes irreducibles comunes y $p \in X \cap Y$, consideramos la carta $\{x \in \mathbb{P}_K^2 : x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}_K^2$ tal que contenga a p . Si $I(X) = (F)$ y $I(Y) = (G)$, consideramos las representaciones afines de F, G en p , es decir, los polinomios resultantes de reemplazar $x_i = 1$ en las expresiones de F y G . Denotamos tales polinomios por \overline{F} y \overline{G} . Luego, p tendrá multiplicidad

$$\text{mult}_p(X, Y) = \dim_K(\mathcal{O}_p(\mathbb{A}_K^2)/(\overline{F}, \overline{G}))$$

por [6, Observación 12.25].

Como hemos visto, no es sencillo calcular la multiplicidad de un punto. Sin embargo, el siguiente teorema nos da una forma fácil de calcular la suma de las multiplicidades de todos los puntos de intersección entre curvas planas.

Teorema 1.1.12 (Teorema de Bézout para curvas proyectivas planas). *Para dos curvas $X, Y \subset \mathbb{P}_K^2$ sin componentes irreducibles en común se tiene que*

$$\sum_{p \in X \cap Y} \text{mult}_p(X, Y) = \deg X \cdot \deg Y$$

La demostración de este teorema como también la versión para curvas en \mathbb{P}_K^n se encuentra en [6, Corolario 12.26].

La definición de *multiplicidad* de un punto en la intersección de variedades proyectivas cualesquiera, está estrechamente ligada a la definición de *multiplicidad de una solución aislada* de un sistema de ecuaciones polinomiales de varias variables. Definir este número ha sido un problema que se viene tratando desde el siglo XIX, donde matemáticos como Poncelet, Cayley, Bézout y Macaulay, aportaron resultados que ayudaron a establecer las definiciones modernas de multiplicidad de intersección. Una de estas definiciones se encuentra en *Intersection Theory* [5, Capítulo 7], además de más detalles históricos. Bajo esta definición, se puede enunciar una versión más general del Teorema de Bézout, [5, Proposición 8.4], que considera la intersección de hipersuperficies.

La multiplicidad de un punto en la intersección de una hipersuperficie H y una recta L (no contenida en H) en \mathbb{P}_K^n , es un caso en que la multiplicidad del punto es igual a la multiplicidad algebraica de este punto visto como vector en K^{n+1} en el sistema de ecuaciones definido por las ecuaciones de H y L .

Proposición 1.1.13. *Una hipersuperficie $H \subset \mathbb{P}_K^n$ de grado d y una recta L no contenida en H se intersectan en d puntos contados con multiplicidad.*

Demostración. Sean $H = V(F)$ con $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ polinomio homogéneo de grado d y L una recta no contenida en H . Haciendo un cambio de coordenadas, podemos asumir que L sea la recta resultante de intersectar los hiperplanos

$$x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

es decir, que los puntos $[x_0, \dots, x_n]$ de L son tales que $x_2 = \dots = x_n = 0$. Luego, los puntos de intersección de L y H corresponden a ceros del polinomio homogéneo $F(x_0, x_1, 0, \dots, 0) = G(x_0, x_1)$ el cual no es idénticamente cero ya que L no está contenida en H , y por lo tanto, tiene grado d .

Si el coeficiente de x_0^d es cero, entonces $G(x_0, x_1) = x_1 G'$, con G' polinomio de grado $d - 1$. Por inducción, se sigue que G' tiene $d - 1$ raíces y luego $G(x_0, x_1)$ tiene d raíces, contando las de G' y el punto $[1 : 0 : 0 : \dots : 0]$. Ahora bien, si el coeficiente de x_0^d no es cero, entonces $x_1 \neq 0$ (de lo contrario x_0 también es cero). Luego, podemos asumir que $x_1 = 1$ y así $G(x_0, 1)$ es un polinomio de una variable de grado d y por tanto tiene d raíces contadas con multiplicidad.

Así, H y L se intersectan en d puntos cuyas multiplicidades son las multiplicidades de los ceros de $G(x_0, x_1)$ correspondientes. \square

Por último, vemos algunas definiciones y resultados que nos serán útiles en los siguientes capítulos.

Definición 1.1.14. Sea $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ una hipersuperficie. Un punto $p \in H$ singular y aislado se dice **doblo** si existe al menos una recta L por p tal que $\text{mult}_p(L, H) = 2$.

Definición 1.1.15. Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ una cuádrica. Un punto $p \in \mathcal{Q}$ se llama **punto singular** de \mathcal{Q} si cada recta de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ por p intersecta a \mathcal{Q} en p con multiplicidad al menos dos.

Las definiciones 1.1.5 (respecto a una cuádrica) y 1.1.15 son equivalentes. En efecto, sea p un punto singular según 1.1.5 de una cuádrica \mathcal{Q} . Por simplicidad de notación, supongamos que su ecuación sea $\mathcal{Q}(x) = 0$. Consideramos la recta $L : x = p + tv$, con $v \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ y $t \in \mathbb{C}$. Luego las intersecciones de \mathcal{Q} y la recta L están dadas por la ecuación $\mathcal{Q}(p + tv) = 0$. La expansión de Taylor en el punto p es

$$\mathcal{Q}(p + tv) = \mathcal{Q}(p) + t(v^\top \nabla \mathcal{Q}(p)) + \dots$$

y como $\mathcal{Q}(p) = 0$ y $\nabla \mathcal{Q}(p) = (0, \dots, 0)$, luego la expansión de Taylor comienza con términos de grado 2, lo que implica que la recta L intersecta al menos dos veces a \mathcal{Q} en p .

Inversamente, si p es un punto singular de \mathcal{Q} según la definición 1.1.15 entonces p es una raíz de orden al menos 2 del polinomio $\mathcal{Q}(x)$. Luego, de la expansión de Taylor de $\mathcal{Q}(x)$, todas las derivadas parciales de $\mathcal{Q}(x)$ se anulan en p .

1.2. Aplicación Cubriente

Definición 1.2.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva de espacios topológicos. Se dice que f es un **aplicación cubriente** o **espacio cubriente** si para cada $y \in Y$ existe una vecindad abierta V de y tal que $f^{-1}(V)$ es unión de abiertos disjuntos U_α en X y la restricción $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$ es un homeomorfismo para cada α . Los abiertos V se denominan abiertos fundamentales.

Definición 1.2.2. Sean f, g funciones continuas entre espacios topológicos $f, g : X \rightarrow Y$. Se dice que f y g son **homotópicas** (que denotamos por $f \sim g$) si existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tal que $H|_{X \times \{0\}} = f$ y $H|_{X \times \{1\}} = g$.

Si además $H(a, t)$ es constante en t para cada $a \in A \subseteq X$, entonces se dice que f y g son **homotópicas relativamente** a A y lo denotamos por $f \sim_A g$.

Observación 1.2.3. \sim y \sim_A son relaciones de equivalencia sobre las funciones continuas entre los espacios topológicos X e Y .

Definición 1.2.4. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Se define **lazo** en x_0 a una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Si α, β son lazos en x_0 , se define el producto $\alpha * \beta$ como la operación

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Definición 1.2.5. El **grupo fundamental** de X en x_0 , denotado por $\pi_1(X, x_0)$, se define como el conjunto de clases de equivalencia de lazos en x_0 por la relación $\sim_{\{0,1\}}$, dotado del producto de clases $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$, donde $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$.

Definición 1.2.6. Un espacio topológico X se dice **simplemente conexo** si es conexo por caminos y además para cada $x_0 \in X$ su grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es trivial.

Definición 1.2.7. Sea $f : X \rightarrow Y$ un espacio cubriente y X simplemente conexo, entonces f se denomina **cubrimiento universal** de Y .

Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : X' \rightarrow Y$ dos espacios cubrientes *equivalentes*, es decir, existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X'$ tal que $f = g \circ h$. Si además, $f(x_0) = g(x'_0) = y_0$, de [14, Teorema 79.4] lo anterior se puede interpretar como que subgrupos $f_*(\pi_1(X, x_0))$ y $g_*(\pi_1(X', x'_0))$ de $\pi_1(Y, y_0)$ son conjugados, donde f_* y g_* corresponden a los homomorfismos

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{y} \quad g_* : \pi_1(X', x'_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Ahora si suponemos que $f : X \rightarrow Y$ es un cubrimiento universal, con $f(x_0) = y_0$, como $\pi_1(X, x_0)$ es trivial, $f_*(\pi_1(X, x_0))$ corresponde al subgrupo trivial de $\pi_1(Y, y_0)$. Así, dos cubrimientos universales de Y son equivalentes. Por este motivo, el cubrimiento universal de un espacio topológico (si es que admite uno) se le suele indicar como el “único”.

Observación 1.2.8. No todos los espacios topológicos admiten cubrimientos universales, (ver [14, Corolario 82.2]).

Ejemplo 1.2.9. Sea $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ la n -esfera unitaria. La función $\Upsilon : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ lleva a cada $x \in \mathbb{S}^n$ a la recta que pasa por x y el origen, la cual corresponde a un punto en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$. Esta función es una aplicación cubriente donde cada punto de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ tiene preimagen $\{x, -x\}$. Como \mathbb{S}^n es simplemente conexo, Υ es un cubrimiento universal.

1.2.1. Aplicación Cubriente por Acción de Grupo

Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación cubriente. Un **automorfismo de f** es un homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow X$ tal que $f \circ \varphi = f$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X \\ & \searrow f & \swarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Los automorfismos de una aplicación cubriente son llamados **transformaciones de Deck** o **transformaciones cubrientes**. Sea $\text{Aut}_f(X)$ el conjunto de todos los automorfismos de $f : X \rightarrow Y$. Este conjunto es un grupo con respecto a la composición y se denomina **grupo cubriente** de f . La acción natural de $\text{Aut}_f(X)$ sobre X es *libre* (i.e. si dos automorfismos coinciden en un punto, entonces son iguales [12, Proposición 12.1]).

En el ejemplo 1.2.9, la *función antipodal* $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ definida por $\alpha(x) = -x$ es un automorfismo de Υ . De hecho, $\text{Aut}_{\Upsilon}(\mathbb{S}^n) = \{id, \alpha\}$.

Definición 1.2.10. Sea $\cdot : \Gamma \times X \rightarrow X$ una acción de un grupo Γ sobre X espacio topológico. Esta acción se llama **acción de espacio cubriente** si Γ actúa por homeomorfismos y para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que para cada $g \in \Gamma$

$$U \cap (g \cdot U) = \emptyset \text{ a menos que } g = id$$

donde $g \cdot U = \{g \cdot x : x \in U\}$.

Dada una acción de un grupo Γ sobre un espacio topológico X por homeomorfismos, cada $g \in \Gamma$ determina un homeomorfismo de X en sí mismo definido por $x \mapsto g \cdot x$.

Decimos que la acción es **efectiva** si la identidad de Γ es el único elemento tal que el anterior homeomorfismo es la identidad, i.e. $g \cdot x = x$ para todo $x \in X$ si y sólo $g = id$. En particular, toda acción libre es efectiva.

Teorema 1.2.11 (Teorema del Espacio Cubriente Cociente). *Sea X un espacio conexo y conexo por caminos localmente. Supongamos que Γ es un grupo cuya acción por homeomorfismos sobre X es efectiva. Entonces la función cociente $f : X \rightarrow X/\Gamma$ es una aplicación cubriente si y sólo si la acción de Γ es una acción de espacio cubriente. En este caso, $\Gamma = \text{Aut}_f(X)$.*

La demostración de este resultado se encuentra en *Introduction to Topological Manifolds* [12, Teorema 12.14].

1.3. Grupos Ortogonales

Sea K un campo. Se denomina **grupo lineal general** de grado n al conjunto de las matrices invertibles $n \times n$ con entradas en K y donde la operación de grupo es la multiplicación de matrices. Este grupo lo denotamos por $GL(n, K)$.

Sea V un espacio vectorial sobre K . Denotaremos por $GL(V)$ (o $\text{Aut}(V)$) al **grupo lineal general de V** que contiene a todos los automorfismos de V , con la composición de funciones como operación de grupo. Si además V tiene dimensión finita n , entonces $GL(V)$ es isomorfo a $GL(n, K)$, donde dicho isomorfismo depende de la elección de la base de V .

Supongamos V un K -espacio vectorial n dimensional y dotado de un producto interno. Un endomorfismo de V que preserve la norma también preserva el *producto punto* sobre V . De esto, se obtiene que las matrices asociadas a estos endomorfismos respecto a una base ortonormal de V , son ortogonales.

Los endomorfismos de V que preservan la norma también preservan la métrica de V inducida por la norma. A dichos endomorfismos los llamaremos *isometrías* de V .

Definición 1.3.1. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y dotado de un producto interno.

- El **grupo ortogonal** $O(n)$ se define como el conjunto de todas los endomorfismos de V que preservan la norma sobre V junto con la operación composición. También, $O(n)$ se puede identificar como el subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices ortogonales reales $n \times n$.
- Se define el **grupo especial ortogonal** $SO(n) \leq O(n)$ como el subgrupo de todas las isometrías de V que preservan la orientación del espacio V . También, considerando una base ortonormal sobre V , $SO(n)$ se puede identificar como el subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices ortogonales reales $n \times n$ de determinante 1.

Dotamos a $SO(n)$ de la topología inducida por $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, el espacio de las matrices reales $n \times n$. Luego, $SO(n)$ es un espacio Hausdorff pues \mathbb{R}^{n^2} es Hausdorff por la topología euclídeana.

Definición 1.3.2. Un **grupo de Lie** es grupo que también es una variedad diferenciable, donde las operaciones de grupo (producto e inversión) son diferenciables.

Los grupos $GL(n, \mathbb{R})$, $SO(n)$ y $O(n)$ son grupos de Lie. Una demostración sencilla (y extensa) de este hecho se encuentra en *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations* [8].

1.3.1. Grupo de simetrías

Dado un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^3$, se define el *grupo de simetrías* de X , denotado por $\text{Sym}(X)$, como el subgrupo de las transformaciones ortogonales que dejan invariante a X (isometrías euclidianas). Un subgrupo de $\text{Sym}(X)$ es el **grupo de rotación** formado por todas las isometrías rotacionales. Claramente, $\text{Sym}(X) \subset O(3)$, y como las isometrías rotacionales en \mathbb{R}^3 preservan la orientación, $SO(3)$ corresponde al grupo de rotación.

Las matrices de $SO(3)$ están determinadas de forma única por su ángulo y eje de rotación, que corresponde al vector fijo por la matriz. Por ejemplo, la matriz asociada a la rotación de ángulo θ (positivo si es antihorario) en torno al eje z es

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si A es una matriz de rotación con respecto a un eje con vector unitario u , u se puede extender a una base ortonormal $\{u, v, w\}$ de \mathbb{R}^3 . Luego, existe una matriz ortogonal P tal que $R = P^{-1}AP$, y como matrices semejantes tienen igual traza, $\text{tr}(R) = \text{tr}(A) = 1 + 2 \cos \theta$, donde $\theta = \pm \alpha$ con α ángulo de rotación de A . De esto se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.3.3. *Sean $T, S \in SO(3)$, luego las composiciones $S \circ T$ y $T \circ S$ tienen el mismo ángulo de rotación a menos de signo.*

Dado un poliedro convexo $\Delta \subset \mathbb{R}^3$, cuyos vértices pertenecen a la esfera real \mathbb{S}^2 de radio 1 se define el **dual** de Δ como

$$\Delta^\circ := \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot y \leq 1 \text{ para cada } y \in \Delta\},$$

donde " \cdot " es el producto escalar entre vectores. En términos simples, un poliedro convexo y su dual son dos poliedros tales que los vértices de uno corresponden a las caras del otro y las aristas que conectan dos vértices de uno se corresponden a aristas que conectan las caras respectivas de ambos vértices.

El dual del dual de un poliedro convexo es el poliedro mismo. Es más o menos fácil notar esta propiedad en poliedros convexos y regulares. En particular, si consideramos los sólidos platónicos, sus respectivos duales se construyen uniendo los puntos centros de cada cara. De esto, podemos observar que el dual del tetraedro es un tetraedro, del octaedro es el cubo y del icosaedro es el dodecaedro.

Si $g \in \text{Sym}(\Delta)$ luego

$$\begin{aligned}
g\Delta^\circ &= \{gx : x \cdot y \leq 1 \text{ para cada } y \in \Delta\} \\
&= \{x : g^{-1}x \cdot y \leq 1 \text{ para cada } y \in \Delta\} \\
&= \{x : x \cdot gy \leq 1 \text{ para cada } y \in \Delta\} \\
&= \{x : x \cdot y \leq 1 \text{ para cada } g^{-1}y \in \Delta\} \\
&= \{x : x \cdot y \leq 1 \text{ para cada } y \in g\Delta\} \\
&= \{x : x \cdot y \leq 1 \text{ para cada } y \in \Delta\} \\
&= \Delta^\circ,
\end{aligned}$$

lo que muestra que $\text{Sym}(\Delta) = \text{Sym}(\Delta^\circ)$.

De esto, un poliedro convexo y su dual tienen el mismo grupo de simetrías, por tanto, tienen el mismo grupo de rotación.

Los grupos de rotación de los sólidos platónicos identificados como subgrupos de $SO(3)$ se denominan **grupos poliédricos**.

Dada la relación de dualidad entre los sólidos platónicos, existen tres grupos poliédricos que denotaremos por T , O e I , correspondientes al tetraedro, octaedro e icosaedro, respectivamente.

Una propiedad interesante es que T, O e I son isomorfos a los grupos A_4 , S_5 y A_5 , respectivamente [3, p. 46-50]. De esto, se sigue que cada grupo poliédrico contiene un subgrupo V isomorfo al grupo de Klein.

Para determinar las matrices generadoras de T, O e I , primero consideramos la posición de los vértices del tetraedro, octaedro y icosaedro en \mathbb{R}^3 como

$$\begin{array}{ll}
(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1) & \text{tetraedro de arista } 2\sqrt{2} \\
(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1) & \text{octaedro de arista } \sqrt{2} \\
(0, \pm\tau, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm\tau), (\pm\tau, \pm 1, 0) & \text{icosaedro de arista } 2,
\end{array}$$

donde $\tau := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Ahora, fijamos las siguientes matrices en $SO(3)$ las cuales corresponden a rotaciones de 180° (A_i), 120° , 90° y 72° (R_3 , R_4 y R_5 resp.).

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & A_2 &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & A_3 &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
R_3 &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & R_4 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & R_5 &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau - 1 & -\tau & 1 \\ \tau & 1 & \tau - 1 \\ -1 & \tau - 1 & \tau \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Es fácil observar que $A_i^2 = R_j^j = id$ con $i = 1, 2, 3$ y $j = 3, 4, 5$. Luego, V es generado por A_1, A_2 ; T es generado por A_1, A_2 y R_3 ; O es generado por A_2, R_3, R_4 ; e I es generado por A_1, A_3 y R_5 .

Notación 1.3.4. Denotaremos la matriz identidad de cualquier orden por id .

1.3.2. Cuaterniones

Se define el conjunto de los cuaterniones \mathbb{H} como el espacio vectorial real generado por $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y dotado del *producto Hamiltoniano*, el cual se determina por la ley distributiva y el producto de los elementos de la base

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Este producto es asociativo, pero no conmutativo.

Definimos el **conjugado** de un cuaternión $q = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, con $w, x, y, z \in \mathbb{R}$, como

$$\bar{q} := w - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$$

y la *norma* sobre \mathbb{H} como $\|q\|^2 := q\bar{q}$ para todo $q \in \mathbb{H}$. Luego todo cuaternión $q \in \mathbb{H}$ no nulo tiene un inverso (único) $q^{-1} = \bar{q}/\|q\|^2$. Por lo tanto, \mathbb{H} es un anillo de división o cuerpo.

Sea $\text{Im } \mathbb{H}$ el subespacio 3-dimensional de \mathbb{H} definido por

$$\text{Im } \mathbb{H} := \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{q \in \mathbb{H} : \bar{q} = -q\}$$

cuyos elementos se denominan *imaginarios puros*. Podemos pensar $\text{Im } \mathbb{H}$ como \mathbb{R}^3 identificando $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ con la base canónica de \mathbb{R}^3 , luego si $u, v \in \text{Im } \mathbb{H}$, entonces su producto corresponde a

$$uv = -u \cdot v + u \times v, \quad (1.3.3)$$

donde $u \cdot v$ es el producto escalar y $u \times v$ el producto cruz de u y v , vistos como vectores en \mathbb{R}^3 , así $-u \cdot v$ corresponde a la parte real y $u \times v$ a la parte imaginaria de uv .

Ahora, si consideramos una rotación cualquiera en $\text{Im } \mathbb{H}$ y $u, v \in \text{Im } \mathbb{H}$, por 1.3.3 y del hecho $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ y $Tu \times Tv = T(u \times v)$ (ya que T le corresponde una matriz de $SO(3)$) se puede probar el siguiente teorema, el cual nos muestra la inyección de $SO(3)$ en $\text{Aut}(\mathbb{H})$.

Teorema 1.3.5. Sea $T \in SO(3)$ definido sobre $\text{Im } \mathbb{H}$. Extendemos T al operador lineal $\widehat{T} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definido por $\widehat{T}(q) = \widehat{T}(r + u) = r + Tu$, donde r y u corresponden a la parte real e imaginaria de q , respectivamente. Entonces, dados $q_1, q_2 \in \text{Im } \mathbb{H}$

$$\widehat{T}(q_1 q_2) = \widehat{T}(q_1) \widehat{T}(q_2)$$

y por tanto, \widehat{T} es un automorfismo en \mathbb{H} .

Observación 1.3.6. Se puede mostrar que todo automorfismo de \mathbb{H} es de la forma de \widehat{T} para algún $T \in SO(3)$. Por lo tanto, $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong SO(3)$.

Sea Q el conjunto de **cuaterniones unidades** definido por

$$Q := \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\}$$

Es obvio que $1 \in Q$, y además, dados $q_1, q_2 \in Q$, $q_1 q_2 \in Q$ y si $q \in Q$ entonces $q^{-1} = \bar{q} \in Q$. Así, Q es un grupo.

Por otra parte, Q se puede identificar con la esfera unitaria \mathbb{S}^3 en \mathbb{R}^4 . Consideramos la función biyectiva $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} + a_4\mathbf{k} \mapsto (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

y asignamos a \mathbb{H} la única topología tal que Φ sea un homeomorfismo. Luego, Φ es un homeomorfismo. Se le otorga a Q estructura topológica y de variedad de \mathbb{S}^3 , heredada del espacio euclídeo \mathbb{R}^4 . Además, las operaciones de grupo de Q son continuas y diferenciables, por tanto Q es un grupo de Lie. Más aún, Q es compacto, conexo y simplemente conexo, dado que \mathbb{S}^3 lo es.

El conjunto de cuaterniones \mathbb{H} se puede identificar como subespacio vectorial de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, fijando

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Tales matrices satisfacen 1.3.2 (tomando el producto usual de matrices), por tanto se tiene el siguiente isomorfismo de anillos

$$\mathbb{H} \cong \widetilde{\mathbb{H}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

De esto, si $q = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ entonces $\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, y $\|q\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. En particular, se tiene el siguiente isomorfismo de grupos

$$Q \cong \widetilde{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} = SU(2)$$

donde $SU(2)$ es el **grupo unitario especial** que contiene todas las matrices unitarias complejas de orden 2×2 .

1.3.3. Relación entre $SU(2)$, $SO(3)$ y $SO(4)$

Sea $q \in Q$. Sean L_q y R_q los operadores lineales $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definidos por $L_q p = qp$ y $R_q p = pq$. Como estos operadores preservan la norma en \mathbb{H} , $L_q, R_q \in O(4)$. Además, si $q = 1$ se obtiene que $L_1 = R_1 = id$, la matriz identidad cuyo determinante es 1. Como la función $q \mapsto L_q$ y $q \mapsto R_q$ son funciones continuas $Q \rightarrow O(4)$, y Q es conexo, se tiene que $L_q, R_q \in SO(4)$ para todo $q \in Q$.

Por otra parte, $L_{q_1 q_2} = L_{q_1} L_{q_2}$ y $R_{q_1 q_2} = R_{q_2} R_{q_1}$, lo que implica que $q \mapsto L_q$ y $q \mapsto R_{q^{-1}}$ son homomorfismos $Q \rightarrow SO(4)$. Estas funciones son obviamente continuas y diferenciables, y por tanto son homomorfismos de grupos de Lie.

Definimos el homomorfismo $\sigma : Q \times Q \rightarrow SO(4)$

$$(q_1, q_2) \mapsto \sigma_{q_1, q_2} := L_{q_1} R_{q_2}^{-1},$$

i.e.,

$$\sigma_{q_1, q_2}(p) = q_1 p q_2^{-1}, \quad p \in \mathbb{H}.$$

En el caso $q_1 = q_2 = q$, denotamos $\rho_q := \sigma_{q, q} = L_q R_q^{-1}$, i.e.,

$$\rho_q(p) = qpq^{-1}.$$

En particular, $\rho_q(1) = 1$ y todo elemento real de \mathbb{H} está fijo por ρ_q . Como $\rho_q \in SO(4)$, el complemento ortogonal $\mathbb{R}^\perp = \text{Im } \mathbb{H}$ es invariante por ρ_q . Así, para cada $q \in Q$ podemos considerar ρ_q como un operador lineal $\text{Im } \mathbb{H} \rightarrow \text{Im } \mathbb{H}$. Como ρ_q es una isometría y continua, $\rho_q \in SO(3)$. Por tanto, podemos definir el homomorfismo de grupos

$$\rho : Q \rightarrow SO(3), \quad q \mapsto \rho_q$$

que es diferenciable y continuo puesto que σ lo es.

La rotación ρ_q se puede describir explícitamente. Para ello, primero notar que todo $q \in Q$ puede ser descompuesto en una parte real e imaginaria como $q = r + p$, con $r \in \mathbb{R}$ y $p \in \text{Im } \mathbb{H}$ tal que $r^2 + \|p\|^2 = 1 = \|q\|^2$. Luego, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $r = \cos \theta$ y $\|p\| = \sin \theta$. Consecuentemente, si $q \in Q$ entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ y un vector unitario $u \in \text{Im } \mathbb{H}$ tales que

$$q = \cos \theta + \sin \theta u \tag{1.3.4}$$

Lema 1.3.7. *Sea q como en la ecuación 1.3.4, luego ρ_q es la rotación de ángulo 2θ en torno al eje por el origen con vector unitario u .*

Demostración. Es claro que q y u conmutan, y por tanto $\rho_q u = quq^{-1} = u$. Luego u es un punto fijo de ρ_q , y por tanto ρ_q es una rotación en torno al eje de dirección u .

Primero, consideramos que $u = \mathbf{i}$. Luego

$$\begin{aligned}\rho_{\cos\theta+i\sin\theta}\mathbf{j} &= (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)\mathbf{j}(\cos\theta - \mathbf{i}\sin\theta) \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\mathbf{j} + 2\sin\theta\cos\theta\mathbf{k} \\ &= \cos(2\theta)\mathbf{j} + \sin(2\theta)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Como $\rho_{\cos\theta+i\sin\theta}$ tiene a \mathbf{i} como punto fijo, corresponde a una rotación en el plano \mathbf{jk} y por la expresión anterior, de ángulo 2θ . Esto prueba el Lema cuando $u = \mathbf{i}$.

Si T es una rotación cualquiera en $\text{Im } \mathbb{H}$, $q \in Q$ y $h \in \text{Im } \mathbb{H}$, luego por Teorema 1.3.5

$$T(\rho_q h) = \widehat{T}(\rho_q h) = T(qh q^{-1}) = T(q)\widehat{T}(h)T(q)^{-1} = \rho_{\widehat{T}(q)}(Th),$$

luego, reemplazando h por $T^{-1}h$ obtenemos $\rho_{\widehat{T}(q)}(h) = T(\rho_q(T^{-1}(h)))$, es decir

$$\rho_{\widehat{T}(q)} = T \circ \rho_q \circ T^{-1}.$$

Ahora, consideremos cualquier $q \in Q$ de la forma 1.3.4. Sean T rotación de $\text{Im } \mathbb{H}$ tal que $T\mathbf{i} = u$ y $q_1 := \cos\theta + i\sin\theta$, luego por la linealidad de T , $\widehat{T}(q_1) = q$ y por tanto, de la ecuación anterior

$$\rho_q = T \circ \rho_{q_1} \circ T^{-1},$$

donde ρ_{q_1} es una rotación de 2θ en torno al eje por \mathbf{i} . Por lo tanto, de la expresión anterior y del Lema 1.3.3, ρ_q es una rotación de 2θ en torno a $T\mathbf{i} = u$. \square

Teorema 1.3.8. *El homomorfismo de grupos de Lie $\rho : Q \rightarrow SO(3)$ es sobreyectivo y $2 : 1$, con kernel $\{\pm 1\}$.*

Demostración. Del Lema 1.3.7 tenemos la sobreyectividad de ρ .

Probamos que $\ker(\rho) = \{\pm 1\}$. Sea $q \in Q$ y supongamos que $\rho_q = id$, es decir $qpq^{-1} = p$ para todo $p \in \text{Im } \mathbb{H}$ o equivalentemente, $qp = pq$ para todo $p \in \text{Im } \mathbb{H}$. Así, q debe ser real, pero por hipótesis $q \in Q$, por tanto $q = \pm 1$. Inversamente, si $q = \pm 1$, entonces $\rho_q = id$. \square

Teorema 1.3.9. *El homomorfismo de grupos de Lie $\sigma : Q \times Q \rightarrow SO(4)$ es sobreyectivo y $2 : 1$, con kernel $\{\pm(1, 1)\}$.*

Demostración. Primero, mostramos que $\ker \sigma = \{\pm(1, 1)\}$. Supongamos que $\sigma_{q_1, q_2} = id$, es decir $q_1 p q_2^{-1} = p$ para todo $p \in \mathbb{H}$. En particular, si $p = 1$ se tiene que $q_1 q_2^{-1} = 1$ y luego $q_1 = q_2$. Como $\rho_{q_1} = \sigma_{q_1, q_1} = id$, del Teorema 1.3.8 $q_1 = \pm 1$. Inversamente, si $q_1 = q_2 = \pm 1$ entonces $\sigma_{q_1, q_2} = id$.

Probamos que σ es sobreyectiva. Sean $T \in SO(4)$ rotación en \mathbb{H} y $q_1 := T1$, luego $\|q_1\| = \|T1\| = \|1\| = 1$, lo que implica que $q_1 \in Q$. Por otra parte, $L_{q_1^{-1}}(T1) = 1$ y luego

$T_1 := L_{q_1^{-1}} \circ T \in SO(4)$ es una rotación que fija 1, por lo cual fija \mathbb{R} y su complemento ortogonal $\mathbb{R}^\perp = \text{Im } \mathbb{H}$. Así, la restricción de T_1 a $\text{Im } \mathbb{H}$ implica que $T_1 \in SO(3)$, luego por Teorema 1.3.8 existe $q \in Q$ tal que $T_1 = \rho_q$ rotación definida sobre $\text{Im } \mathbb{H}$, de donde se sigue que $T = L_{q_1} T_1 = L_{q_1} \rho_q$ está definida sobre $\text{Im } \mathbb{H}$. En resumen, se tiene que para todo $p \in \text{Im } \mathbb{H}$

$$Tp = q_1 \rho_q(p) = q_1 q p q^{-1}.$$

Como además, $T1 = q_1 = q_1 q 1 q^{-1}$, la expresión anterior se cumple para $p = 1$, y por linealidad para todo $p \in \mathbb{H}$. Esto prueba que $T = \sigma_{q_1, q}$ y por lo tanto, la sobreyectividad de σ . \square

Usando el isomorfismo $Q \cong SU(2)$, los homomorfismos de los Teoremas 1.3.8 y 1.3.9 pueden considerarse como los homomorfismos de grupos de Lie $SU(2) \rightarrow SO(3)$ y $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$. Más aún, como $Q \simeq \mathbb{S}^3$ es simplemente conexo, los anteriores homomorfismos son cubrimientos universales.

En efecto, si identificamos el grupo cíclico $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con el subgrupo $\{\pm 1\}$ de $SU(2)$, entonces por Teorema del homomorfismo $SU(2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong SO(3)$. Luego, si llamamos h al anterior isomorfismo de grupos, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \xrightarrow{\rho} & SO(3) \\ \downarrow \phi & \nearrow h & \\ \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} & & \end{array}$$

Dado que $SU(2)$ es homeomorfo a \mathbb{S}^3 , luego $SU(2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{S}^3/\mathcal{R}$, donde \mathcal{R} es la relación que identifica los puntos antipodales de \mathbb{S}^3 . Luego, si dotamos a $SU(2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de la topología cociente inducida por ϕ , entonces es homeomorfo a $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Además, como ρ es continua, h es continua [14, Teorema 22.2], y como h es biyectiva y $SU(2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es compacto, h es un homeomorfismo [14, Teorema 26.6].

Finalmente, como la proyección de \mathbb{S}^3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ es un espacio cubriente, $\phi : SU(2) \rightarrow SU(2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es un espacio cubriente. Por lo tanto, por el diagrama anterior, ρ es un espacio cubriente.

En el caso de σ , identificando $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con el subgrupo $\{\pm(1, 1)\}$ obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} SU(2) \times SU(2) & \xrightarrow{\sigma} & SO(4) \\ \downarrow \phi' & \nearrow g & \\ \frac{SU(2) \times SU(2)}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} & & \end{array}$$

donde ϕ' es función cociente y, de forma análoga al caso de ρ , se puede mostrar que g es un homeomorfismo. Por otra parte, podemos considerar $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como el grupo $\Gamma = \{Id, \beta\}$, donde β es el homeomorfismo de $SU(2) \times SU(2)$ en sí mismo definido por $\beta(x, y) = -(x, y)$. Claramente, Γ satisface la condición 1.2.10. Luego, por el Teorema 1.2.11, ϕ' es un espacio cubriente. Por lo tanto, σ es un espacio cubriente.

Observación 1.3.10. Se puede probar que $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, luego por ρ ([14, Corolario 52.5])

$$\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3) \cong \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} .$$

Las secciones 1.3.2 y 1.3.3 están basadas en las notas [10]. Para complementar dichas secciones, se recomienda leer *Topology, geometry and gauge fields* [15, Capítulo 1, Apéndice A].

1.4. Teoría Invariante

1.4.1. Representaciones

Esta sección está basada en *Linear Representations of finite groups* [17, Capítulo 1].

Sean K un campo, V un K -espacio vectorial y $\text{GL}(V)$ el grupo de automorfismos de V .

Definición 1.4.1. Sea G un grupo finito con elemento neutro id y dotado de la operación composición. Una **representación lineal** de G en V es un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$, i.e.

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) \quad \text{para todo } g, h \in G$$

lo que implica que $\varphi(id) = id$ y $\varphi(s^{-1}) = \varphi(s)^{-1}$.

Si existe tal homomorfismo, V se denomina **espacio de representación** de G , y los elementos de G corresponden a automorfismos lineales de V de orden finito. En el caso que φ sea inyectivo, φ se denomina **representación fiel** de G .

En lo que sigue, consideremos V espacio finito dimensional. Si $\dim_K V = n$, el *grado de la representación* de φ de G es n .

Sean φ y φ' dos representaciones de un mismo grupo G sobre espacios vectoriales V y V' . Estas representaciones se dicen *similares* (o *isomorfas*) si existe una isomorfismo lineal $T : V \rightarrow V'$ tal que

$$T \circ \varphi(g) = \varphi'(g) \circ T$$

para todo $g \in G$. Esto implica que sus respectivas matrices son similares entre sí, en particular las representaciones φ y φ' tienen el mismo de grado.

1.4.2. Anillo de Invariantes

Sea G un grupo finito y V un espacio de representación de G . Denotamos por $K[V]$ el anillo de funciones polinomiales sobre V . En otras palabras, si V es espacio vectorial de dimensión n y x_1, \dots, x_n es una base para el espacio dual $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$, entonces

$$K[V] = K[x_1, \dots, x_n] = K \oplus V^* \oplus S^2(V^*) \oplus S^3(V^*) \dots$$

donde $S^m(V^*)$ denota el *m-producto simétrico* de V^* (i.e. el subespacio vectorial generado por el producto de m elementos de V^*), el cual consiste de todos los polinomios homogéneos de grado m en las variables x_1, \dots, x_n . Por ejemplo, $S^2(V^*)$ tiene una base conformada por los monomios $x_i x_j$ para las $\binom{n+1}{2}$ elecciones de i y j . En general, la dimensión de $S^m(V^*)$ como espacio vectorial es $\binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1}$. Consideramos $K[V]$ como un anillo graduado fijando que los monomios x_i tienen grado 1.

El grupo G actúa sobre $K[V]$ por medio de

$$(gf)(v) := f(g^{-1}(v)) \quad v \in V, g \in G, f \in K[V].$$

Por esta acción, un polinomio f se dice G -**invariante** si $gf = f$ para todo $g \in G$. El conjunto de todos los polinomios G -invariantes de $K[V]$ es el **anillo de invariantes** $K[V]^G$.

Observación 1.4.2. La definición dada de $K[V]$ no aplica si $K = \mathbb{F}_p$, pues por ejemplo las funciones x_i y x_i^p tienen los mismos valores para todos los puntos de V . Una definición más adecuada es que $\overline{K}[V]$ sea un anillo de funciones sobre $\overline{K} \otimes_K V$ fijado por los automorfismos de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$, donde \overline{K} es una clausura algebraica de K .

Observación 1.4.3. Asumiremos el hecho que $K[V]^G$ sea una K -álgebra finitamente generada [1, Corolario 1.3.2].

1.4.3. Series de Poincaré

Sea $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación lineal de G grupo finito en un K -espacio vectorial V . Sea $K[V]_j^G$ el conjunto de polinomios invariantes de grado j . Se define la *serie de Poincaré* de $K[V]^G$ como la serie formal de potencias

$$p(K[V]^G, t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \dim_K K[V]_j^G, \quad (1.4.1)$$

De la Observación 1.4.3 y del Teorema de Hilbert-Serre [1, Teorema 2.1.1], existe un polinomio de Laurent de coeficientes enteros $f(t)$ tal que

$$p(K[V]^G, t) = \frac{f(t)}{\prod_j (1 - t^{k_j})}$$

Así, $p(K[V]^G, t)$ se puede escribir como la fracción de dos polinomios cuyo denominador no es el polinomio nulo, es decir, $p(K[V]^G, t)$ es una función racional en t , y sus polos son raíces de la unidad.

En el caso que K sea un campo de característica cero, la serie de Poincaré admite una fórmula más sencilla, como veremos a continuación.

Supongamos que K es de característica cero. Definimos la función $K[V] \rightarrow K[V]$

$$\pi_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

Se puede probar que $\pi_G^2 = \pi_G$, es decir π_G es un operador proyección sobre $K[V]$ con imagen $K[V]^G$. Una matriz representante A de π_G sobre $K[V]$ es una matriz idempotente

por lo cual sus valores propios son 1 o 0, luego la dimensión de $K[V]^G$ es la suma de los valores propios, es decir, la traza de A . Más en general, la dimensión de $K[V]_j^G$ es igual a la traza de la matriz representante de π_G sobre $K[V]_j$. Así, de 1.4.1 y del hecho que la traza es un operador lineal, tenemos que

$$p(K[V]^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{j=0}^{\infty} \text{tr}(g, K[V]_j) t^j,$$

donde $\text{tr}(g, K[V]_j)$ es la traza de la matriz asociada a g por φ .

Lema 1.4.4. *Sea K un campo algebraicamente cerrado y V un K -espacio vectorial finito dimensional. Si $f : V \rightarrow V$ es un endomorfismo, entonces una matriz representante de f sobre V es triangularizable superiormente.*

Demostración. Demostramos el lema por inducción sobre $n = \dim V$.

Sea $\dim V = 2$ y A la matriz representante de f . Como K es algebraicamente cerrado, f tiene al menos un valor propio λ y un vector propio v . Consideramos una base $\{v_1 = v, v_2\}$ de V y la matriz $S_0 = (v_1 \ v_2)$ cuyas columnas son los vectores v_1 y v_2 . Luego existen $k, a_1 \in K$ tales que

$$S_0^{-1} A S_0 = \begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & a_1 \end{pmatrix},$$

es decir, la matriz A es triangularizable superiormente. Ahora supongamos que el lema se tiene hasta algún n y sea $\dim V = n + 1$. Sea A la matriz asociada a f . Como K es algebraicamente cerrado, existen λ valor propio y v vector propio de f . Completamos v hasta tener una base de V y consideramos $S = (v \ v_2 \ \dots \ v_{n+1})$, luego existen $\mathbf{x} \in K^n$ y $A_1 \in \text{GL}(n, K)$ tales que

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{x}^\top \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}.$$

Por hipótesis de inducción, existen una matriz invertible S_1 y una triangular superior T_1 tales que $T_1 = S_1 A_1 S_1^{-1}$. Consideremos

$$\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & S_1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \hat{S}_1^{-1} S^{-1} A S \hat{S}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & S_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{x}^\top \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & S_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{x}^\top S_1 \\ \mathbf{0} & S_1^{-1} A_1 S_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{x}^\top S_1 \\ \mathbf{0} & T_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición es independiente de la característica de K .

Proposición 1.4.5.

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j \text{tr}(g, K[V]_j) = \frac{1}{\det(\text{id} - g^{-1}t, V)}$$

Observación 1.4.6. Notar que $\mathcal{M}(n, K)[t] \cong \mathcal{M}(n, (K[t]))$, por lo cual tiene sentido calcular el determinante de una matriz de $\mathcal{M}(n, K)[t]$.

Demostración. Una extensión del campo K no afecta a los términos de esta ecuación, por lo cual asumiremos que K es algebraicamente cerrado. Por el Lema 1.4.4, g es triangularizable superiormente sobre V (si K tiene característica cero, es diagonalizable), digamos con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Los valores propios sobre V^* son $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$, por tanto los valores propios sobre $K[V]_j$ son productos de j valores propios λ_i^{-1} (no necesariamente distintos). Luego

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} t^j \text{tr}(g, K[V]_j) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^{-j} t^j \right) \cdots \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{-j} t^j \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \lambda_i^{-1} t} \\ &= \frac{1}{\det(\text{id} - g^{-1}t, V)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.7. (Molien) Si K es un campo de característica cero, entonces

$$p(K[V]^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\text{id} - g^{-1}t, V)}.$$

Demostración. Directa de la proposición y de la observación previas. □

Las secciones 1.4.2 y 1.4.3 están basadas en los capítulos 1 y 2 de *Polynomial Invariants of Finite Groups* [1]. Para complementar estas secciones se recomienda revisar *Reflection Groups and Invariant Theory* [11, Capítulo 5].

2 Polinomios G_n -Invariantes

2.1. Grupos Poliédricos

En la sección 1.3.1 definimos los grupos poliédricos T, O e I y el grupo de Klein V , así como también sus respectivas matrices generadoras. De la sección 1.3.3, consideramos los homomorfismos sobreyectivos $2 : 1$

$$\rho : SU(2) \rightarrow SO(3) \quad \sigma : SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4).$$

El homomorfismo ρ^{-1} transforma los grupos poliédricos en subgrupos de $SU(2)$, denominados **grupos poliédricos binarios**, y luego por σ , en subgrupos de $SO(4)$ los cuales se denominan **grupos bi-poliédricos**. Denotamos los grupos binarios $\widetilde{V} := \rho^{-1}(V)$, $\widetilde{A}_4 := \rho^{-1}(T)$, $\widetilde{S}_4 := \rho^{-1}(O)$ y $\widetilde{A}_5 := \rho^{-1}(I)$ y los grupos bi-poliédricos por $\mathcal{H} := \sigma(\widetilde{V} \times \widetilde{V})$, $G_6 := \sigma(\widetilde{A}_4 \times \widetilde{A}_4)$, $G_8 := \sigma(\widetilde{S}_4 \times \widetilde{S}_4)$, $G_{12} := \sigma(\widetilde{A}_5 \times \widetilde{A}_5)$.

En base a las matrices de 1.3.1, determinamos las matrices generadoras de los grupos binarios. Fijamos las siguientes matrices de $SU(2)$

$$q_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad q_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad q_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_3 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \quad p_4 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$p_5 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & \tau - 1 + i \\ 1 - \tau + i & \tau \end{pmatrix}.$$

Es fácil notar que $q_i^2 = p_j^j = -id$ con $i = 1, 2, 3$ y $j = 3, 4, 5$. Los grupos binarios están generados por las preimágenes por ρ de los generadores de T, O e I , por lo cual \widetilde{V} es generado por q_1, q_2 ; \widetilde{A}_4 por q_1, q_2, p_3 ; \widetilde{S}_4 por q_2, q_3, p_4 , y \widetilde{A}_5 por q_1, q_2, p_5 .

Ahora, queremos determinar las matrices generadoras de los grupos bi-poliédricos. Para

ello fijamos antes las siguientes matrices de $SO(4)$

$$\sigma_1 := \sigma(q_1, id) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma'_1 := \sigma(id, q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 := \sigma(q_2, id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma'_2 := \sigma(id, q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 := \sigma(p_3, id) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi'_3 := \sigma(id, p_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 := \sigma(p_4, id) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi'_4 := \sigma(id, p_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_5 := \sigma(p_5, id) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 0 & 1-\tau & -1 \\ 0 & \tau & -1 & \tau-1 \\ \tau-1 & 1 & \tau & 0 \\ 1 & 1-\tau & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

$$\pi'_5 := \sigma(id, p_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 0 & \tau-1 & 1 \\ 0 & \tau & -1 & \tau-1 \\ 1-\tau & 1 & \tau & 0 \\ -1 & 1-\tau & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

y observamos que $\sigma_i^2 = \sigma_i'^2 = \pi_j^j = \pi_j'^j = -id$ con $i = 1, 2$ y $j = 3, 4, 5$. Tomando las imágenes por medio de σ de los generadores de los grupos binarios, obtenemos los generadores de los grupos bi-poliédricos. Los generadores de \mathcal{H} son σ_i y σ_i' con $i = 1, 2$; para G_6 son σ_i y σ_i' con $i = 1, 2, \pi_3, \zeta_3'$; para G_8 son σ_2 y σ_2', π_j, π_j' con $j = 3, 4$; y para G_{12} son σ_i y σ_i' con $i = 1, 2, \pi_5$ y π_5' . Cada uno de estos grupos tienen orden $\frac{1}{2}|\tilde{G}|^2$ donde \tilde{G} corresponde a su respectivo grupo binario en $SU(2)$. Luego, $|G_6| = 288$, $|G_8| = 1152$, y $|G_{12}| = 7200$.

2.1.1. Valores y Vectores Propios de las Matrices $\sigma(p, q)$

El producto tensorial $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ se puede identificar con el espacio $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. Los tensores $v \otimes w \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $v = (x_1, x_2)$, $w = (y_1, y_2)$ se identifican con las matrices de determinante cero por medio de la transformación

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que

$$\sigma(p, q)(v \otimes w) = p(v \otimes w)q^{-1} = pv \cdot (wq^{-1})^\top.$$

Usando $q^{-1} = \bar{q}^\top$, obtenemos que $\sigma(p, q)(v \otimes w) = pv \otimes \bar{q}w$. De esta fórmula se sigue que los valores propios (vectores propios) de $\sigma(p, q)$ son los productos (producto tensorial resp.) de los valores propios (vectores propios resp.) de p y \bar{q} .

2.1.2. Otras propiedades

Se puede probar que las matrices $\sigma(p, id)$ y $\sigma(id, p)$ conmutan entre sí. Dado que estas matrices también son ortogonales, son diagonalizables. Así, del siguiente resultado tenemos que estas matrices tienen una misma base de vectores propios.

Proposición 2.1.1. *Sea K un campo algebraicamente cerrado. Sean $A, B \in \mathcal{M}(n, K)$ diagonalizables y tales que $AB = BA$. Entonces existe una matriz invertible M tal que $M^{-1}AM$ y $M^{-1}BM$ son matrices diagonales.*

Demostración. Sea λ un valor propio de A y v su vector propio asociado, luego

$$A(Bv) = BAv = \lambda Bv$$

por tanto, Bv es un vector del subespacio propio V_λ asociado a λ , o sea $B|_{V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$. Como K es algebraicamente cerrado, $B|_{V_\lambda}$ tiene un valor propio y luego un vector propio en V_λ , el cual también es vector propio de A . Por inducción sobre n , se concluye. \square

Por otra parte, consideremos las matrices en $O(4)$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde es fácil notar que $C^2 = C'^2 = id$. Se puede probar que $C\sigma(p, id)C = \sigma(id, p)$ con $p \in \{q_i, p_j\}$, $i = 1, 2, 3$ y $j = 3, 4, 5$. Como además $\sigma(p, q) = \sigma(p, id)\sigma(id, q)$, se cumple que $C\sigma(p, q)C = \sigma(q, p)$.

2.2. Series de Poincaré

Los grupos $G_n \subseteq SO(4)$ actúan de forma natural sobre \mathbb{C}^4 , lo que induce la acción sobre $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ definida en la página 25.

El espacio vectorial de polinomios homogéneos G_n -invariantes de grado j lo denotamos por $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_j^{G_n}$. Consideramos las series de Poincaré

$$\begin{aligned} p(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]^{G_n}, t) &:= \sum_{j=0}^{\infty} t^j \dim \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_j^{G_n} \\ &= \frac{1}{|G_n|} \sum_{g \in G_n} \frac{1}{\det(id - g^{-1}t, \mathbb{C}^4)} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

por el teorema de Molien (1.4.7).

Observación 2.2.1. Para el cálculo de la serie anterior, los argumentos en [16, Sección 2] son los siguientes: Dado que $\det g = 1$, en cada término de 2.2.1 se puede reemplazar su respectivo denominador por el polinomio característico de g . Además, como los elementos de la misma clase de conjugación tienen el mismo polinomio característico, luego 2.2.1 se puede reescribir como

$$p(\mathbb{C}([x_0, x_1, x_2, x_3]^{G_n}, t) = \frac{1}{|G_n|} \sum \frac{n_g}{\det(g - id \cdot t, \mathbb{C}^4)}$$

donde la suma es sobre todas las clases de conjugación de G_n y n_g denota el número de elementos en la clase de conjugación de g en G_n . Calculando las cardinalidades de las clases de conjugación y los polinomios característicos de cada representante, se obtiene la serie.

Nosotros calculamos con Magma la serie de Poincaré respecto a los grupos bi-poliédricos $\mathcal{H}, G_6, G_8, G_{12}$ (ver Apéndice)

Grupo	Serie de Poincaré
\mathcal{H}	$1 + t^2 + 5t^4 + 6t^6 + 15t^8 + 19t^{10} + 35t^{12} + 44t^{14} + O(t^{16})$
G_6	$1 + t^2 + t^4 + 2t^6 + 3t^8 + 3t^{10} + 7t^{12} + 8t^{14} + O(t^{16})$
G_8	$1 + t^2 + t^4 + t^6 + 2t^8 + 2t^{10} + 3t^{12} + 3t^{14} + O(t^{16})$
G_{12}	$1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + t^{10} + 2t^{12} + 2t^{14} + O(t^{16})$

De la expresión de la serie de Poincaré, los coeficientes de la j -ésima potencia de t en la serie de Molien corresponden a la dimensión de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_j^{G_n}$. Luego, de la tabla anterior se deduce lo siguiente

- Existen polinomios invariantes por los grupos bi-poliédrico sólo de grado par. Esto se debe a que para todo elemento $g \in G$ con G grupo bi-poliédrico, $-g \in G$ (ver Apéndice), luego la serie 2.2.1 es una función par.
- Dado que $G_n \leq SO(4)$, se tiene que los tres grupos dejan invariante al polinomio $Q(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Luego, en cada grado se tiene una superficie cuádrica invariante *trivial* de ecuación

$$Q_j(x) := (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{(j/2)}$$

En los grados $n = 6, 8, 12$ aparecen los primeros polinomios G_n -invariantes no triviales. Estos polinomios los denotamos $S_n(x)$, cuyas expresiones calcularemos en la siguiente sección.

2.3. Ecuaciones de Polinomios Invariantes

Diremos que un polinomio es **totalmente simétrico** si es invariante bajo cada permutación de coordenadas. Por otra parte, diremos que un polinomio P es **anti-simétrico** si es invariante para permutaciones de coordenadas pares y $\gamma \cdot P = -P$ para toda permutación impar γ .

Calculamos con Magma los polinomios invariantes $S_n(x)$ (Ver Apéndice). Para $n = 6, 8$ se tiene que

$$S_6(x) = \sum x_i^6 + 15 \sum x_i^2 x_j^2 x_k^2$$

$$S_8(x) = \sum x_i^8 + 14 \sum x_i^4 x_j^4 + 168 x_0^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

con los subíndices $i, j, k = 0, 1, 2, 3$ siempre distintos para cada monomio de las anteriores sumas. Ambos polinomios son totalmente simétricos. En cuanto a $S_{12}(x)$, los cálculos son más complicados. Se introducen algunas abreviaciones. Sea $y_i := x_i^2$ y los subíndices $i, j, k, h = 0, 1, 2, 3$ con la misma consideración en el caso de S_6 y S_8 .

$$\begin{aligned} S_{51} &:= \sum y_i^5 & S_{42} &:= \sum y_i^4 y_j^2 & S_{33} &:= \sum y_i^3 y_j^3 \\ S_{411} &:= \sum y_i^4 y_j y_k & S_{321} &:= \sum y_i^3 y_j^2 y_k & S_{222} &:= \sum y_i^2 y_j^2 y_k^2 \\ S_{3111} &:= \sum y_i^3 y_j y_k y_h & S_{2211} &:= \sum y_i^2 y_j^2 y_h y_k \end{aligned}$$

La parte totalmente simétrica de $S_{12}(x)$ es

$$f_s := 2S_{51} - 6S_{42} - 12S_{411} + 14S_{33} + 9S_{321} + 384S_{3111} + 30S_{222} - 270S_{2211}$$

y su parte antisimétrica es $33\sqrt{5}f_a$, donde

$$\begin{aligned} f_a := & y_0^3(y_1^2y_2 - y_1y_2^2 + y_2^2y_3 - y_2y_3^2 + y_3^2y_1 - y_3y_1^2) \\ & - y_1^3(y_2^2y_3 - y_2y_3^2 + y_3^2y_0 - y_3y_0^2 + y_0^2y_2 - y_0y_2^2) \\ & + y_2^3(y_0^2y_1 - y_0y_1^2 + y_1^2y_3 - y_1y_3^2 + y_3^2y_0 - y_3y_0^2) \\ & - y_3^3(y_0^2y_1 - y_0y_1^2 + y_1^2y_2 - y_1y_2^2 + y_2^2y_0 - y_2y_0^2). \end{aligned}$$

Así, $S_{12}(x) = f_s + 33\sqrt{5}f_a$.

Observamos que $\mathcal{Q}_2(x)$ y $S_n(x)$ son algebraicamente independientes. De hecho, el lugar de ceros de $\mathcal{Q}_2(x)$ no está contenido en el de $S_n(x)$, un ejemplo de esto es el punto $p = (i\sqrt{2}, 1, 1, 0)$ que cumple que $\mathcal{Q}_2(p) = 0$, pero $S_n(p) \neq 0$ para $n = 6, 8, 12$. En particular, $S_8(x) \neq S_6(x)\mathcal{Q}_2(x)$, y dado que es invariante por $\langle G_6, C, C' \rangle$ [16, Sección 3], luego es una ecuación para el polinomio invariante de grado 8 en el conjunto de polinomios invariantes fundamentales por $\langle G_6, C, C' \rangle$.

Los polinomios invariantes estudiados definen las siguientes familias de superficies simétricas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$

$$F_n(\lambda) : S_n(x) + \lambda\mathcal{Q}_n(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1.$$

Dado que $S_n(x)$ y $\mathcal{Q}_n(x)$ son polinomios invariantes por G_n , las variedades que definen son invariantes por la acción de grupo G_n . Por simplicidad, S_n y \mathcal{Q}_n denotarán las variedades proyectivas definidas por $S_n(x)$ y $\mathcal{Q}_n(x)$, respectivamente.

El propósito del siguiente capítulo es encontrar las superficies singulares de estas familias.

3 Superficies Simétricas en \mathbb{P}^3

Notación 3.0.1. En las definiciones de la sección 1.1 de variedades proyectivas, se considera K un campo algebraicamente cerrado. De ahora en adelante, consideraremos $K = \mathbb{C}$, de modo que \mathbb{P}^n denotará al espacio proyectivo complejo.

3.1. Base Locus

Sea \mathcal{G} un grupo que actúa sobre \mathbb{P}^3 .

Definición 3.1.1. Un punto $z \in \mathbb{P}^3$ se le llama **punto fijo** por \mathcal{G} si existe $\sigma \in \mathcal{G}$ con $\sigma \neq \pm id$ tal que $\sigma z = z$. Se define **grupo fijo** (o *estabilizador*) de z al conjunto

$$Fix(z) = Fix_{\mathcal{G}}(z) := \{g \in \mathcal{G} : gz = z\} \subseteq \mathcal{G}$$

y **órbita** de z bajo g a

$$O(z) = O_{\mathcal{G}} := \{gz : g \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathbb{P}^3$$

Por Teorema órbita-estabilizador, se tiene la fórmula $|Fix(z)| \cdot |O(z)| = |\mathcal{G}|$.

Definición 3.1.2. Una recta $L \subseteq \mathbb{P}^3$ se denomina **recta de puntos fijos** (o **recta fija**) de \mathcal{G} si existe un $\sigma \in \mathcal{G}$, $\sigma \neq \pm id$, tal que $\sigma x = x$ para todo $x \in L$

De la incrustación de Segre $\psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ sabemos que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es isomorfo a la cuádrica suave $z_0z_3 - z_1z_2 = 0$ [6, Proposición 7.11]. Además, de la Proposición 1.1.7 sabemos que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong \mathcal{Q}_2$. Los conjuntos $\{a\} \times \mathbb{P}^1$ y $\mathbb{P}^1 \times \{a\}$, con $a \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, los llamaremos *ruling* de \mathcal{Q}_2 .

Consideramos $\mathbb{P}GL(2, \mathbb{C})$, el espacio proyectivo de las matrices invertibles 2×2 , y la función $T : \mathbb{P}^3 \setminus \mathcal{Q}_2 \rightarrow \mathbb{P}GL(2, \mathbb{C})$ definida por

$$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Como $\mathcal{Q}_2(x) = \det(T(x))$, luego \mathcal{Q}_2 corresponde a las matrices complejas 2×2 de rango 1 (módulo multiplicación por constante).

Teorema 3.1.3. *Las matrices $\sigma(p, id)$, $\sigma(id, p) \in G_n$ definen en \mathbb{P}^3 dos rectas disjuntas de puntos fijos cada una. Dichas rectas están contenidas en \mathcal{Q}_2 , donde el primer par pertenece a un rulling \mathcal{Q}_2 y el segundo al otro rulling de \mathcal{Q}_2 .*

Demostración. De la sección 2.1.1 se sigue que las matrices $\sigma(p, id)$, $\sigma(id, p)$ tienen dos valores propios de multiplicidad 2 cada uno, por lo cual los subespacios propios son rectas en \mathbb{P}^3 . Estas rectas son generadas por puntos que corresponden a matrices de rango 1 mediante la identificación 3.1.1, luego están contenidas en \mathcal{Q}_2 . De nuevo de la sección 2.1.1, notamos que el par de rectas determinadas por $\sigma(p, id)$ son de un rulling de \mathcal{Q}_2 y el par de rectas determinadas por $\sigma(id, q)$ son del restante. \square

El *base locus* de la familia $F_n(\lambda)$ es la variedad

$$\{x \in \mathbb{P}^3 : S_n(x) = \mathcal{Q}_n(x) = 0\}$$

Claramente, el base locus es invariante por la acción del grupo G_n . Además es una variedad proyectiva no reducida, puesto que \mathcal{Q}_n es una potencia de \mathcal{Q}_2 y por lo cual \mathcal{V} tiene componentes múltiples.

Sea $B_n := \mathcal{Q}_2 \cap S_n$. Consideramos los grupos $\sigma(\tilde{G}, id)$ y $\sigma(id, \tilde{G})$, donde $\tilde{G} = \tilde{A}_4, \tilde{S}_4, \tilde{A}_5$. Ambos grupos módulo $\{\pm id\}$ son isomorfos a los subgrupos $T, O, I \subseteq SO(3)$. La tabla siguiente detalla la cardinalidad de las órbitas por la acción de estos grupos sobre \mathbb{R}^3

Tetraedro	Octaedro	Icosaedro
12, 6, 4	24, 12, 8, 6	60, 30, 20, 12

Los valores de la tabla se obtienen de considerar un punto en una arista, cara y vértice del respectivo sólido platónico y su imagen por cada elemento del grupo de rotaciones del sólido.

Observación 3.1.4.

- De la sección 2.1.1 el grupo $\sigma(\tilde{G}, id)$ actúa sobre las rectas $\{a\} \times \mathbb{P}^1$ y deja invariante cada recta del segundo rulling $\mathbb{P}^1 \times \{a\}$. Por otro lado, el grupo $\sigma(id, \tilde{G})$ actúa sobre $\mathbb{P}^1 \times \{a\}$ y deja invariante cada recta de $\{a\} \times \mathbb{P}^1$.
- Hay finitas rectas de cada rulling que tienen órbita de largo n por la acción de $\sigma(\tilde{G}, id)$ y $\sigma(id, \tilde{G})$. Denotamos por $\mathcal{L}_n, \mathcal{L}'_n$ el conjunto de rectas de órbita n de $\{a\} \times \mathbb{P}^1$ y $\mathbb{P}^1 \times \{a\}$, respectivamente. Además, como $C\sigma(p, q)C = \sigma(q, p)$, la matriz C transforma rectas de \mathcal{L}_n en rectas de \mathcal{L}'_n y viceversa.

Proposición 3.1.5. *La variedad B_n es reducida, es decir, no contiene componentes múltiples.*

Demostración. Por teorema de Bézout [6, Proposición 12.16] se tiene que $\deg(B_n) = \deg(\mathcal{Q}_2 \cap S_n) = 2n$. Si B_n no es reducida entonces existe una componente $V \subseteq \mathcal{Q}_2 \cap S_n$ tal que \mathcal{Q}_2 y S_n se intersectan con multiplicidad al menos 2 a lo largo de V . Este es el caso cuando S_n es singular a lo largo de V , o S_n y \mathcal{Q}_2 son tangentes en V . Consideremos una recta L de uno de los dos rulings, no contenida en B_n y que intersecte a V en al menos un punto. Sin pérdida de generalidad, asumamos que L está en el rulling $\{a\} \times \mathbb{P}^1$. Sea $x \in L \cap V$, luego $\text{mult}_x(L \cdot S_n) \geq 2$. Como el grupo $\sigma(\text{id}, \tilde{G})$ actúa sobre L y en la intersección $L \cap S_n$, consideramos la órbita de x bajo este grupo. Por la tabla de la página anterior, notamos que L y S_n se intersectan en más de n puntos contados con multiplicidad, por tanto $L \subseteq S_n$. Esto contradice la suposición de que L no está contenida en B_n . Por lo tanto, $\mathcal{Q}_2 \cap S_n$ es reducida. \square

Observación 3.1.6. La notación $\text{mult}_p(L \cdot S_n)$ corresponde a la multiplicidad del punto p en el producto intersección de L y S_n . Este valor, se debe pensar como la multiplicidad de p (visto como un vector en \mathbb{C}^4) como cero en el polinomio de dos variables resultante de evaluar S_n en los puntos de L (ver 1.1.13).

Proposición 3.1.7. *El base locus se divide en $2n$ rectas, n en cada rulling de \mathcal{Q}_2 . En particular dichas rectas son rectas fijas para elementos en G_n .*

Demostración. Sea L una recta del primer o segundo rulling y no contenida en B_n . La curva B_n vista como un polinomio bi-homogéneo tiene bi-grado (n, n) en \mathcal{Q}_2 , entonces $|L \cap B_n| = n$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que L es una recta del rulling $\{a\} \times \mathbb{P}^1$. El grupo $\sigma(\text{id}, \tilde{G})$ actúa sobre los puntos de L . Sea $x \in L \cap B_n$. Por la tabla de arriba, la órbita de x respecto a $\sigma(\text{id}, \tilde{G})$ es de cardinalidad n . Por tanto, x pertenece a una de las rectas de \mathcal{L}'_n . Como tenemos una cantidad infinita de rectas como L , las rectas en \mathcal{L}'_n están contenidas en B_n . Por el segundo punto de 3.1.4, las rectas en \mathcal{L}_n también están contenidas en B_n . \square

3.2. Puntos Singulares

Lema 3.2.1. *Sea p un punto singular de una superficie de la familia $F_n(\lambda)$ (no en \mathcal{Q}_n), luego p no está contenido en la cuádrica compleja.*

Demostración. Sea p un punto singular de la superficie $F_n(\lambda_0) := \{S_n(x) + \lambda_0 \mathcal{Q}_n(x) = 0\}$. Supongamos que $p \in \mathcal{Q}_2$, entonces $p \in S_n$, y como $\partial_i \mathcal{Q}_n(p) = 0$ para $i = 0, 1, 2, 3$, tenemos que $\partial_i S_n(p) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$ también, por tanto p es un punto singular de $\mathcal{Q}_2 \cap S_n$. Por la Proposición 3.1.7, este consiste de $2n$ rectas las cuales se intersectan en n^2 puntos. Por tanto, p debe ser el punto de intersección de dos rectas. Si S_n es singular en p se sigue que S_n es singular en todos los n^2 puntos de intersección de las rectas en el base

locus; de hecho estos puntos forman una órbita por $\sigma(id, \tilde{G})$ y $\sigma(\tilde{G}, id)$. En particular, S_n tiene n puntos singulares en una recta L en $\mathcal{Q}_2 \cap S_n$. Como la hipersuperficie $\{\partial_i S_n = 0\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$) tiene grado $n - 1$, luego intersecciona L en $n - 1$ puntos o bien $\partial_i S$ es el polinomio nulo. En el primer caso, S_n tiene a lo más $n - 1$ puntos singulares en L , lo que es una contradicción. Por tanto, S_n es singular en todos los puntos de L . Así, S_n y \mathcal{Q}_2 se interseccionan en L y en las $2n$ rectas de $\mathcal{Q}_2 \cap S_n$ con multiplicidad a lo menos 2. Esto no es posible, ya que $\deg(\mathcal{Q}_2 \cap S_n) = 2n$. Esto muestra que $p \notin \mathcal{Q}_2$. \square

Teorema 3.2.2.

1. La **superficie general** en la familia $F_n(\lambda)$ es suave,
2. las superficies en $F_n(\lambda)$ singulares, diferentes de \mathcal{Q}_n , tienen sólo singularidades aisladas,
3. las superficies en $F_n(\lambda)$ diferentes de \mathcal{Q}_n son irreducibles y reducidas.

Demostración.

1. Consecuencia del teorema de Bertini [9, Teorema 8.18] y del Lema 3.2.1.
2. Sea $S := \{\mathcal{Q}_n(x) + \lambda_0 S_n(x) = 0\}$. Supongamos que S contiene una curva singular, luego S intersecciona \mathcal{Q}_2 en al menos un punto p singular en S , pero por el Lema 3.2.1 esto no es posible.
3. Sea S una superficie de $F_n(\lambda)$, diferente de \mathcal{Q}_n . Supongamos que S no sea reducida. Luego S tiene una componente múltipla sobre la cual es singular, pero por 2. sólo puede tener singularidades aisladas. Ahora supongamos que S es reducible, es decir, si $S = \{G = 0\}$ entonces $G = H_1 H_2$. Por la regla de Leibnitz, las derivadas parciales de G se anulan en $\{H_1 = H_2 = 0\}$. Por lo tanto, S tiene puntos singulares a lo largo de la curva $\{H_1 = H_2 = 0\}$, lo que no es posible por 2.

\square

Proposición 3.2.3. *Un punto singular p de una superficie en la familia $F_n(\lambda)$, $n = 6, 8, 12$, es un punto fijo por G_n . Además p , como vector de \mathbb{C}^4 , es vector propio de una matriz de G_n con valor propio $+1$ o -1 .*

Demostración. Dada una superficie $S = \{F = 0\}$ de grado n en \mathbb{P}^3 , un punto p en S es singular si y sólo $\partial_i F(p) = 0$ para cada $i = 0, 1, 2, 3$. Los puntos de intersección de las superficies $S_i := \{\partial_i F = 0\}$ están contenidos en $S \cap S_i \cap S_j$. Así, por Teorema de Bézout, las superficies S_i se interseccionan en a lo más $n(n-1)^2$ puntos contados con multiplicidad. Como estos puntos son singulares en S , éstos son contados al menos dos veces en la

intersección, por lo cual una mejor cota superior es $\frac{n}{2}(n-1)^2$. En la siguiente tabla se muestra los valores de esta cota para $n = 6, 8, 12$ y en la segunda fila las cardinalidades de las órbitas de un punto (no fijo) por G_n .

n	6	8	12
$\frac{n}{2}(n-1)^2$	75	196	726
Órbita	144	576	3600

De la tabla, un punto no fijo por G_n no puede ser singular. Sea x un punto singular y consideremos su vector correspondiente en \mathbb{C}^4 . Sea $s := \sigma(p, q) \in G_n$ tal que $sx = \lambda x$, o equivalentemente

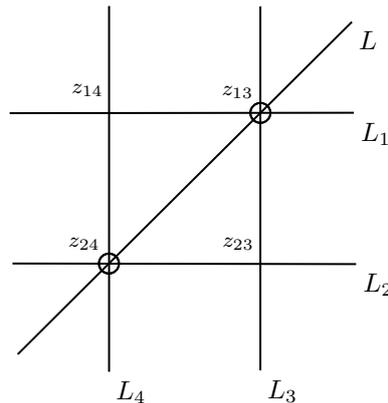
$$pxq^{-1} = \lambda x$$

Consideramos x como una matriz de $\mathbb{P}GL(2, \mathbb{C})$ mediante la identificación 3.1.1 y calculamos el determinante a ambos lados de la ecuación anterior. Obtenemos que $\det(x) = \lambda^2 \det(x)$, como $p, q \in SU(2)$, $\det(p) = \det(q) = 1$, y luego la ecuación se cumple sólo si $\det(x) = 0$ o $\lambda^2 = 1$. Si $\det(x) = 0$, luego $x \in \mathcal{Q}_n$, lo que no es posible por el Lema 3.2.1. \square

Corolario 3.2.4. *Los puntos singulares de las superficies de $F_n(\lambda)$ están contenidas en rectas fijas de G_n , $n = 6, 8, 12$.*

3.3. Rectas de puntos fijos

Sea L_1, L_2 las rectas fijas de $\sigma(p, id)$ y L_3, L_4 las rectas fijas de $\sigma(id, q) \in G_n$. Sean $z_{ij} := L_i \cap L_j$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4$, los puntos intersección de dichas rectas. Como $\sigma(p, q) = \sigma(p, id)\sigma(id, q)$, si $\sigma(p, q)$ tiene valor propio 1 o -1 , en ambos casos dicho valor propio tiene multiplicidad algebraica al menos 2, y luego multiplicidad geométrica 2 (pues $\sigma(p, q)$ es diagonalizable). Por tanto, si $\sigma(p, q)$ tiene valor propio 1 o -1 , tiene al menos una recta de puntos fijos L , la cual tiene la siguiente configuración



Notar que por el Teorema 3.1.3 la recta L no intersecta en más puntos al base locus.

Proposición 3.3.1. *Sea L como en el párrafo anterior, y supongamos que intersecta al base locus de $F_n(\lambda)$. Sin pérdida de generalidad, sean estas intersecciones z_{13} y z_{24} como en la imagen. Luego para cada superficie $S \neq \mathcal{Q}_n$ en la familia $F_n(\lambda)$ se tiene que $\text{mult}_{z_{ij}}(L \cdot S) = 1$, $(i, j) = (1, 3), (2, 4)$.*

Demostración. Por el Lema 3.2.1 los puntos z_{13} y z_{24} son puntos regulares sobre cada superficie distinta de \mathcal{Q}_n de $F_n(\lambda)$. Las rectas de ambos rulings de \mathcal{Q}_2 que se intersectan en estos puntos son rectas del base locus y por tanto está contenidas en S . El espacio tangente de S en z_{ij} está generado por estas rectas. Este plano no contiene a L , de lo contrario también contiene a las cuatro rectas L_i y L_j , y luego dicho plano no es tangente a S en un punto. Por tanto L no puede ser tangente a S en z_{ij} . \square

En la tabla de más abajo, se determina un representante por cada clase de conjugación de G_n , el cual tiene valores propios 1 o -1 y definen espacios propios de dimensión dos en \mathbb{C}^4 , por tanto tiene rectas fijas en \mathbb{P}^3 . $\pm\sigma$ indica los representantes de clases de $+\sigma$ y $-\sigma$ (los cuales fijan las mismas rectas). Dado que las matrices π_j y π'_j conmutan entre sí, de la Proposición 2.1.1 sabemos que tienen una misma base de vectores propios. De esto, se obtiene que los elementos en las clases de conjugación de $\pi_3\pi'_3$, $\pi_3^2\pi_3'^2$; $\pi_5\pi'_5$, $\pi_5^2\pi_5'^2$; $\pi_3\pi_3'^2$, $-\pi_3^2\pi_3'$ tienen dos a dos las mismas rectas fijas, por lo cual en la tabla consideramos a ambas clases juntas. Los elementos de la clase de conjugación de $\sigma_2\sigma'_2$ y $\pi_4\pi'_4$ tienen las mismas rectas fijas también, ya que los elementos de $[\sigma_2\sigma'_2]$ corresponden a cuadrados de los elementos de $[\pi_4\pi'_4]$. Además, como $C\sigma(p, q)C = \sigma(q, p)$, los elementos de las clases de $\sigma_2\pi_3'\pi'_4$ y $\pi_3\pi_4\sigma'_2$ tienen las mismas rectas fijas. En la tabla también están los números de las rectas fijas distintas en la clase de conjugación.

Grupo	Rectas fijas
G_6	$\sigma_2\sigma'_2, 18; \pm\pi_3\pi'_3, \pm\pi_3^2\pi_3'^2, 16; \pm\pi_3^2\pi_3', \pm\pi_3\pi_3'^2, 16$
G_8	$\sigma_2\sigma'_2, \pm\pi_4\pi'_4, 18; \pm\pi_3\pi_3', 32; \pi_3\pi_4\pi_3'\pi_4', 72; \pi_3\pi_4\sigma_2', \sigma_2\pi_3'\pi_4', 36$
G_{12}	$\sigma_2\sigma'_2, 450; \pm\pi_3\pi_3', 200; \pm\pi_5\pi_5', \pm\pi_5^2\pi_5'^2, 72$

Proposición 3.3.2. Si $[\sigma]$ denota la clase de conjugación de arriba, entonces las rectas fijas de los elementos de $[\sigma]$ conforman una órbita bajo G_n .

Demostración. Los representantes de las clases de conjugación de la tabla, a excepción de $[\sigma_2\sigma'_2]$, $[\pi_3\pi_4\pi_3'\pi_4']$ o $[\pi_3\pi_4\sigma_2']$, tienen sólo una recta fija, y el enunciado es claro cuando σ tiene sólo una recta de puntos fijos. Probaremos que dos rectas fijas de los elementos de estas tres clases son equivalentes bajo G_n , es decir, ambas rectas definen la misma órbita. Dadas dos rectas fijas por σ , ambas son espacios propios de \mathbb{C}^4 con valores propios 1 y -1 . Recordemos que si π es un elemento de una de las clases previas entonces $-\pi$ está en la misma clase de conjugación. Además, π y $-\pi$ tienen los mismos espacios propios pero con los valores propios intercambiados. Luego, podemos encontrar una matriz en G_n que transforme una recta en otra y viceversa. Esto implica que las órbitas de ambas rectas no son disjuntas, por lo tanto, deben ser iguales. \square

El resultado anterior muestra que toda propiedad G_n -invariante que se cumpla en alguna recta fija de un elemento de alguna clase de la tabla, se cumple para cada recta fija de los elementos de la misma clase de conjugación.

3.4. Cubrimientos de \mathbb{P}^1

La familia $F_n(\lambda)$ en \mathbb{P}^3 define un morfismo (fuera del base locus)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^3 \setminus B_n &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ x &\longmapsto [S_n(x) : Q_n(x)] \end{aligned}$$

Sea L una recta fija que no interseca el base locus. Este morfismo restringido a L , que lo llamaremos f , es una función holomorfa de grado n . Ahora, si L es una recta fija que interseca el base locus de $F_n(\lambda)$, luego f no está definida en los puntos de intersección z_{13}, z_{14} , puntos definidos en la sección 3.3. Por la Proposición 3.3.1, la recta L interseca cada superficie en $F_n(\lambda)$ con multiplicidad 1 en estos puntos. Por tanto f se extiende a la función holomorfa

$$\bar{f} : L \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

El punto $[1 : 0]$ tiene $n - 2$ preimágenes, descontando z_{13} y z_{24} , luego \bar{f} tiene grado $n - 2$. Además, como los únicos puntos de ramificación de \bar{f} son z_{13} y z_{24} , ambos puntos tienen orden $\frac{n}{2} - 1$.

Usando la fórmula de Hurwitz [9, Corolario 2.4]

$$2g(L) - 2 = n(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \deg R$$

donde $g(L)$ y $g(\mathbb{P}^1)$ son los géneros de L y \mathbb{P}^1 y $\deg R$ es el grado de la ramificación de f . Como $g(L) = g(\mathbb{P}^1) = 0$, de la ecuación anterior $\deg R = 2n - 2$. En el caso de \bar{f} , de la fórmula de Hurwitz se obtiene que $\deg R = 2n - 6$. Esto prueba el siguiente resultado.

Proposición 3.4.1. *El grado de la ramificación de f es $2n - 2$ y de \bar{f} es $2n - 6$ para $n = 6, 8, 12$.*

Observación 3.4.2. Los puntos singulares de las superficies de la familia $F_n(\lambda)$ son puntos de ramificación de los anteriores morfismos. En efecto, dado un punto singular p de una superficie de la familia, si p no está en \mathcal{Q}_n , del Lema 3.2.1 los morfismos f y \bar{f} se indefinen en p y luego es punto de ramificación de ambos morfismos. En el caso que p perteneciera a \mathcal{Q}_n , p es punto singular de \mathcal{Q}_n y de S_n , y como los polinomios de ambas variedades son de grado n , luego p es punto de ramificación de f y \bar{f} .

De la observación anterior, el grado de ramificación de los anteriores morfismos puede acotar el número de puntos singulares en las rectas fijas. De hecho, sin considerar los puntos en la cuádriga múltipla, estos puntos son a lo más n si L no intersecta el base locus, $n - 2$ puntos en el caso contrario.

3.5. Superficies Singulares

De la sección 3 de [16] se tiene que las superficies de $F_6(\lambda)$ y $F_{12}(\lambda)$ son invariantes por la acción de los grupos de reflexión de los politopos 24-celdas y 600-celdas, donde estos grupos contienen a G_6 y G_{12} , respectivamente. ¹ Consideramos las órbitas por la acción de dichos grupos sobre \mathbb{C}^4 y luego las órbitas de puntos correspondientes en \mathbb{P}^3 . Substituyendo un punto de cada órbita en las ecuaciones de las familias $F_6(\lambda)$ y $F_{12}(\lambda)$, se obtienen los valores de λ tales que la superficie correspondiente contiene toda la órbita. Dado que las derivadas parciales de las ecuaciones se anulan, estos puntos son singulares sobre su respectiva superficie.

En el caso de $F_8(\lambda)$, el cálculo de los valores de λ ocupa un argumento similar. La cardinalidad de cada órbita y el valor de λ correspondiente a la superficie que contiene la órbita se resumen en esta tabla.

¹La razón de considerar estos grupos de reflexión es que facilitan el cálculo de los largos de las órbitas por los grupos G_6 y G_{12} . De hecho, los largos de las órbitas de la tabla son la mitad del número de vértices, caras, aristas y celdas de los politopos 24-celdas y 600-celdas. Por otra parte, al considerar la acción de estos grupos, se puede mostrar que los puntos singulares forman una órbita bajo la acción de G_n .

24-celdas				
Órbita	12	48	48	12
λ	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{4}$

G_8				
Órbita	24	72	144	96
λ	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{5}{9}$

600-celdas				
Órbita	300	600	360	60
λ	$-\frac{3}{32}$	$-\frac{22}{243}$	$-\frac{2}{25}$	0

Se prueban tres resultados importantes para cada superficie de las familias $F_n(\lambda)$ $n = 6, 8, 12$

- No hay más puntos singulares ni más superficies singulares en las familias $F_n(\lambda)$, con $n = 6, 8, 12$.
- Los puntos singulares son puntos dobles.
- Los puntos singulares forman una órbita bajo la acción de G_n .

Para mostrar el primer punto, se usan los siguientes argumentos:

- De 3.2.4, los puntos singulares de una superficie en $F_n(\lambda)$ están contenidas en las rectas fijas.
- Para encontrar estos puntos, basta considerar una recta por cada G_n -órbita y su intersección con las superficies singulares determinadas por los valores de λ de la tabla, ya que de 3.3.2 las otras rectas intersectan la misma superficie en el mismo número de singularidades y todas ellas forman una G_n -órbita.
- Por 3.4.1, el número de puntos singulares en cada recta fija está acotado. Una vez encontrado el número máximo de puntos singulares por cada superficie $F_n(\lambda)$ (con los valores de λ de la tabla), se demuestra que no hay más puntos singulares, por tanto, tampoco más superficies singulares.

El detalle de las demostraciones está en la sección 9 de [16].

3.6. Superficie de Sarti

Definición 3.6.1. Sea $X = V(F)$ una superficie en \mathbb{P}^3 . Las siguientes definiciones son equivalentes:

1. Un punto singular de X se le dice **nodo** si la matriz Hessiana evaluada en tal punto es una matriz invertible, lo que implica que también sean puntos dobles.
2. Un punto singular aislado de X se le dice **nodo** si el punto admite una carta local en \mathbb{A}^3 de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

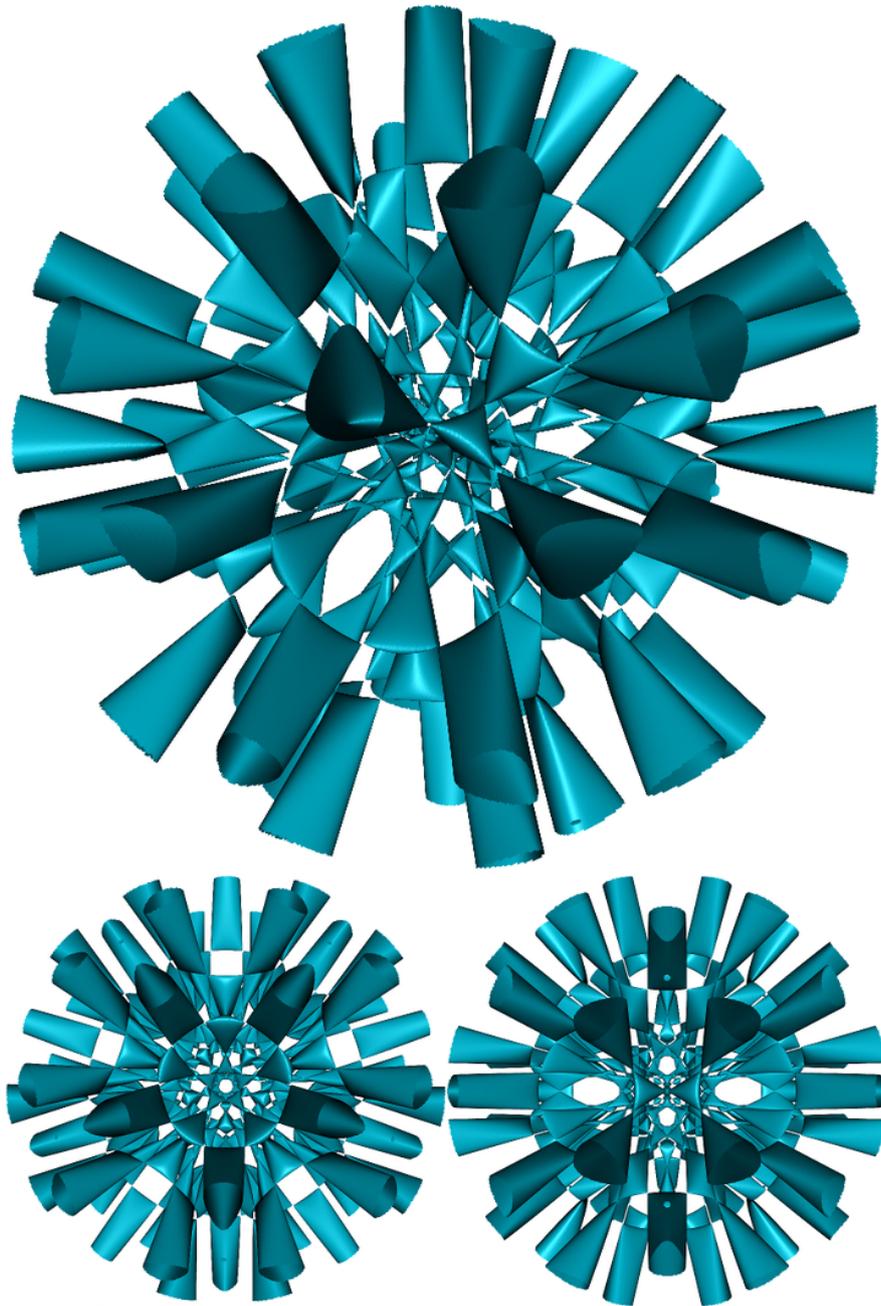
El **cono tangente** a X en un punto $p \in X$ corresponde a la variedad definida por el primer término del desarrollo de la serie de Taylor de F alrededor de p . Con respecto a la segunda definición de nodo, si p es un punto singular aislado, basta calcular el cono tangente de X en p y verificar que admite una expresión del tipo $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

En el artículo [16], se determinan que los puntos singulares son nodos usando la primera definición. Los argumentos son los siguientes: se puede escoger un punto singular arbitrario de cada órbita y al calcular la matriz Hessiana evaluada en dicho punto, obtener una matriz de rango máximo, lo que implica que cada punto singular es un nodo al igual que todo el resto de puntos de la órbita.

Una superficie cuyos puntos singulares sean nodos se dice **superficie nodal**. De las superficies nodales encontradas, destaca $F_{12}(-\frac{22}{243})$ la cual es de grado 12 y tiene 600 nodos. Esto otorga una cota inferior para el número máximo de nodos en una superficie proyectiva de grado 12 (Ver apéndice).

Mostramos una imagen de la superficie de Sarti, $F_{12}(-\frac{22}{243})$.²

²Modelo tridimensional: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3D_model_of_Sarti_surface.stl#/media/File:3D_model_of_Sarti_surface.stl



3

³By Claudio Rocchini - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=12262519>

Apéndice

Escribimos el código Magma para generar los grupos \mathcal{H} y de cada grupo bi-poliédrico. Nombramos las matrices σ'_i y σ''_i como “si i ” y “si i 1”, respectivamente ($i = 1, 2$), y las matrices π_j y π'_j como “pi j ” y “pi j 1”, respectivamente ($j = 3, 4, 5$).

```
Q := Rationals();
si1 := Matrix(4,4,[0,-1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,1,0]);
si2 := Matrix(4,4,[0,0,-1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,-1,0,0]);
si11 := Matrix(4,4,[0,1,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,1,0]);
si21 := Matrix(4,4,[0,0,1,0,0,0,0,1,-1,0,0,0,0,-1,0,0]);
pi3 := 1/2*Matrix(4,4,[1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1,1,1]);
pi31 := 1/2*Matrix(4,4,[1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,1,1,1]);
H := MatrixGroup<4,Q|[si1,si2,si11,si21]>;
G6 := MatrixGroup<4,Q|[si1,si2,si11,si21,pi3,pi31]>;

Q2<e> := QuadraticField(2);
pi4 := 1/e*Matrix(4,4,[1,-1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,-1,0,0,1,1]);
pi41 := 1/e*Matrix(4,4,[1,1,0,0,-1,1,0,0,0,0,1,-1,0,0,1,1]);
G8 := MatrixGroup<4,Q2|[si2,si21,pi3,pi31,pi4,pi41]>;

Q3<f> := QuadraticField(5);
u := 1/2*(1+f);
pi5 := 1/2*Matrix(4,4,[u,0,1-u,-1,0,u,-1,u-1,u-1,1,u,0,1,1-u,0,u]);
pi51 := 1/2*Matrix(4,4,[u,0,u-1,1,0,u,-1,u-1,1-u,1,u,0,-1,1-u,0,u]);
G12 := MatrixGroup<4,Q3|[si1,si2,si11,si21,pi5,pi51]>;
```

Calculamos los órdenes de cada grupo

```
> [Order(G): G in {H,G6,G8,G12}];
[ 288, 32, 1152, 7200 ]
```

Observación 3.0.1. Al usar Magma, el cálculo de la serie de Molien de \mathcal{H} es innecesaria. En el artículo de Sarti sí es necesario, ya que se busca una base de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]^{\mathcal{H}}$ y se definen los polinomios invariantes $S_n(x)$ como combinación lineal de los elementos de dicha base y tal que sean invariantes por $G_n \setminus \mathcal{H}$. Con Magma se pueden calcular directamente, como veremos más adelante.

En la siguiente ventana escribimos el código Magma para calcular la serie de Molien de \mathcal{H} y de los grupos G_n , $n = 6, 8, 12$.

```

> K<t> := LaurentSeriesRing(Q);
> K2<t> := LaurentSeriesRing(Q2);
> K3<t> := LaurentSeriesRing(Q3);
> K!MolienSeries(H);
1 + t^2 + 5*t^4 + 6*t^6 + 15*t^8 + 19*t^10 + 35*t^12 + 44*t^14 + 69*t^16 + 85*t^18 +
0(t^20)
> K!MolienSeries(G6);
1 + t^2 + t^4 + 2*t^6 + 3*t^8 + 3*t^10 + 7*t^12 + 8*t^14 + 9*t^16 + 13*t^18 +
17*t^20 + 18*t^22 + 27*t^24 + 0(t^25)
> K2!MolienSeries(G8);
1 + t^2 + t^4 + t^6 + 2*t^8 + 2*t^10 + 3*t^12 + 3*t^14 + 4*t^16 + 5*t^18 + 6*t^20 +
6*t^22 + 10*t^24 + 11*t^26 + 12*t^28 + 13*t^30 + 17*t^32 + 18*t^34 + 22*t^36 +
23*t^38 + 27*t^40 + 0(t^41)
> K3!MolienSeries(G12);
1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + t^10 + 2*t^12 + 2*t^14 + 2*t^16 + 2*t^18 + 3*t^20 +
3*t^22 + 4*t^24 + 4*t^26 + 4*t^28 + 5*t^30 + 6*t^32 + 6*t^34 + 7*t^36 + 7*t^38 +
8*t^40 + 9*t^42 + 10*t^44 + 10*t^46 + 11*t^48 + 12*t^50 + 13*t^52 + 14*t^54 +
15*t^56 + 15*t^58 + 19*t^60 + 20*t^62 + 21*t^64 + 0(t^65)

```

También, verificamos con Magma que la serie de Molien de uno de los grupos \mathcal{H} , G_6 , G_8 , G_{12} es una función par.

```

> {-g in G : g in G} : G in {H,G6,G8,G12}};
{
  { true }
}

```

Sea $R = K[V]^G$ el anillo invariante de un grupo finito G en una representación en V sobre un campo K y tal que el grado de la representación es n . Los *invariantes primarios* de $R = K[V]^G$ forman un conjunto $\{f_1, \dots, f_n\}$ de n polinomios homogéneos invariantes de R algebraicamente independientes tal que R es un módulo finitamente generado sobre $K[f_1, \dots, f_n]$.

Calculamos los invariantes primarios de los grupos G_6 y G_8 (en la ventana están sólo los dos primeros). De estos polinomios, restamos una potencia del primer polinomio de la lista y de este modo se obtienen los polinomios $S_n(x)$ de la sección 2.3, que son simétricos y fáciles de expresar.

```

> R1 := InvariantRing(G6);
> PrimaryInvariants(R1);
[
  x1^2 + x2^2 + x3^2 + x4^2,
  x1^6 + 15*x1^2*x2^2*x3^2 + 15*x1^2*x2^2*x4^2 + 15*x1^2*x3^2*x4^2 + x2^6 +
  15*x2^2*x3^2*x4^2 + x3^6 + x4^6,
  ...
]

```

```

> R2 := InvariantRing(G8);
> PrimaryInvariants(R2);
[
  x1^2 + x2^2 + x3^2 + x4^2,
  x1^8 + 28/9*x1^6*x2^2 + 28/9*x1^6*x3^2 + 28/9*x1^6*x4^2 + 70/9*x1^4*x2^4 +
  28/3*x1^4*x2^2*x3^2 + 28/3*x1^4*x2^2*x4^2 + 70/9*x1^4*x3^4 +
  28/3*x1^4*x3^2*x4^2 + 70/9*x1^4*x4^4 + 28/9*x1^2*x2^6 + 28/3*x1^2*x2^4*x3^2 +
  28/3*x1^2*x2^4*x4^2 + 28/3*x1^2*x2^2*x3^4 + 56*x1^2*x2^2*x3^2*x4^2 +
  28/3*x1^2*x2^2*x4^4 + 28/9*x1^2*x3^6 + 28/3*x1^2*x3^4*x4^2 +
  28/3*x1^2*x3^2*x4^4 + 28/9*x1^2*x4^6 + x2^8 + 28/9*x2^6*x3^2 +
  28/9*x2^6*x4^2 + 70/9*x2^4*x3^4 + 28/3*x2^4*x3^2*x4^2 + 70/9*x2^4*x4^4 +
  28/9*x2^2*x3^6 + 28/3*x2^2*x3^4*x4^2 + 28/3*x2^2*x3^2*x4^4 + 28/9*x2^2*x4^6 +
  x3^8 + 28/9*x3^6*x4^2 + 70/9*x3^4*x4^4 + 28/9*x3^2*x4^6 + x4^8,
  ...
]
> 144/32*F[2]-112/32*F[1]^4;
x1^8 + 14*x1^4*x2^4 + 14*x1^4*x3^4 + 14*x1^4*x4^4 + 168*x1^2*x2^2*x3^2*x4^2 +
x2^8 + 14*x2^4*x3^4 + 14*x2^4*x4^4 + x3^8 + 14*x3^4*x4^4 + x4^8

```

En el caso de S_{12} , calculamos una combinación lineal de $Q_{12} := (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^6$ y el segundo polinomio invariante de la lista de invariantes primarios por G_{12} , tal que se anule en el punto $[1 : 0 : 0 : 0]$, lo cual nos da la expresión de S_{12} de la sección 2.3 a menos de escalar. La razón de esta elección es porque $[1 : 0 : 0 : 0]$ corresponde a la clase del vector $(1, 0, 0, 0)$ en \mathbb{C}^4 que es vector propio por el valor propio 1 de una de las matrices de G_{12} . Si el polinomio $S_{12}(x)$ se anula en $[1 : 0 : 0 : 0]$, luego este punto es un punto singular de S_{12} , y se cumple la Proposición 3.2.3.

```

> R3 := InvariantRing(G12);
> inv := PrimaryInvariants(R3);
> Q12 := inv[1]^6;
> f := inv[2];
> S12 := Q12/Evaluate(Q12, [1,0,0,0]) - f/Evaluate(f, [1,0,0,0]);

```

Una de las superficies de la familia $F_{12}(\lambda)$ que es combinación lineal de $Q_{12}(x)$ y $S_{12}(x)$ será la superficie de Sarti. Nosotros trabajaremos con el polinomio f definido en la ventana anterior, ya que como hemos mencionado antes, los polinomios S_n tienen una expresión más compacta que los invariantes primarios de G_n dados por Magma, pero ambos polinomios definen superficies invariantes por G_{12} isomorfas entre sí.

En la siguiente ventana, definimos una superficie isomorfa a $F_{12}(-22/243)$, la cual llamamos X y cuyo polinomio F se anula en $[0 : 1 : 1 : 1]$. Además, calculamos el número de singularidades.

La razón de la elección de F es porque el vector $(0, 1, 1, 1)$ es un vector propio de valor propio 1 y la órbita $G_{12} \cdot [0 : 1 : 1 : 1]$ tiene cardinalidad 600. Notar que este proceso es parecido a como se determinan los valores de λ en 3.5.

```

> F := Q12/Evaluate(Q12, [0,1,1,1]) - f/Evaluate(f, [0,1,1,1]);
> S := PolynomialRing(R3);
> P := Proj(S);
> X := Scheme(P,F);
> pts := SingularPoints(X);
> #{p: p in pts};
600

```

Por último, determinamos la naturaleza de los puntos singulares de X , definiendo el cono tangente de X en el punto $[0 : 1 : 1 : 1]$.

```

> p := P![0,1,1,1];
> TangentCone(X,p);
Scheme over Q3 defined by
-9/16*x1^2 + x2^2 - x2*x3 - x2*x4 + x3^2 - x3*x4 + x4^2

```

La anterior expresión, bajo un cambio de coordenadas y después de dehomogeneizar por una de las coordenadas, se puede reescribir de la forma $x^2 + y^2 + z^2$. Así, tenemos que el punto p es una singularidad de X de tipo A_1 , es decir, admite una carta local en \mathbb{A}^3 de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Referencias

- [1] D. J. Benson, *Polynomial Invariants of Finite Groups*, 1st ed., London Mathematical Society Lecture Note Series 190, Cambridge University Press, 1993. ↑25, 27
- [2] S. Chmutov, *Examples of projective surfaces with many singularities*, J. Algebraic Geom **1** (1992), no. 2, 191–196. ↑4
- [3] H. Coxeter, *Regular Polytopes*, Pitman, 1947. ↑17
- [4] W. Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, 3rd ed., 2008. ↑10
- [5] W. Fulton, *Intersection Theory*, 2nd ed, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, 2, Springer, 1998. ↑10
- [6] A. Gathmann, *Algebraic Geometry*, version 13 Jul 2018, lecture notes, 2018. ↑7, 9, 10, 34, 36
- [7] Victor V. Goryunov, *Symmetric quartics with many nodes*, Singularities and bifurcations, 1994, pp. 147–161, DOI 10.1063/1.358102. ↑4
- [8] B. C. Hall (auth.), *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, 1st ed., Graduate Texts in Mathematics 222, Springer-Verlag New York, 2003. ↑15
- [9] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977. ↑37, 41
- [10] J. Svante, *Quaternions and Rotations*, Notes (2017), <http://www2.math.uu.se/~svante/papers/>. ↑23
- [11] R. Kane, *Reflection Groups and Invariant Theory*, Softcover reprint of the original 1st ed. 2001, CMS Books in Mathematics, Springer US, 2001. ↑27
- [12] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 202, Springer-Verlag New York, 2011. ↑13, 14
- [13] Y. Miyaoka, *The Maximal Number of Quotient Singularities on Surfaces with Given Numerical Invariants.*, Mathematische Annalen **268** (1984), 159–172. ↑4
- [14] J. Munkres, *Topology*, 2nd ed, Prentice Hall, Inc, 2000. ↑12, 13, 22, 23
- [15] G. L. Naber, *Topology, geometry and gauge fields: Foundations*, 2nd ed., Texts in Applied Mathematics 25, Springer-Verlag New York, 2011. ↑23
- [16] A. Sarti, *Pencils of Symmetric Surfaces in \mathbb{P}^3* , Journal of Algebra - J ALGEBRA **246** (2001), 429–452, DOI 10.1006/jabr.2001.8953. ↑5, 31, 33, 41, 42, 43
- [17] J. Serre, L. Scott, *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics 42, Springer, 1996. ↑24